FEB 26 1923
LIBRARY

ANNALEN
DER
PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE
BAND 70 HEFT 1
DER GANZEN REIHE 375. BANDES 1. HEFT

KURATORIUM:
M. PLANCK, G. QUINCKE, W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

LEIPZIG

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen" werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1923 erscheinen Bd. 70, 71, 72 u. 73 à 8 Hefte. Preis von Band 70 für Belgien, Luxemburg und Frankreich Fr. 47.—; Dänemark Kr. 20.—; England £ -19-; Finnland Marka 60.—; Holland fl. 11.—; Japan £ -19-; Italien Lire 60.—; Norwegen Kr. 22.—; Schweden Kr. 16.—; Schweiz Fr. 20.—; Spanien Pes. 24.—; U.S.A. $ 4.—.
Ausgegeben am 18. Januar 1923.

Inhalt.

Seite

1. W. Wien. Über das Leuchten der Kanalstrahlen 1
2. A. Sommerfeld. Über die Deutung verwickelter Spektren (Mangan, Chrom usw.) nach der Methode der inneren Quantenzahlen 32
3. Reinhold Fürth. Dielektrizitätskonstanten einiger wäßriger Lösungen und ihre Deutung nach der Dipoltheorie von Debye. Mit einem Anhang: Dielektrizitätskonstanten einiger biologisch und technologisch interessanter Stoffe 68

Die Redaktion der Annalen wird von den unterzeichneten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **München, Leopoldstraße 9/I.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE

BAND 70

ANNALEN
DER
PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE

BAND 70
DER GANZEN REIHE 375. BAND

KURATORIUM:
M. PLANCK, G. QUINCKE, W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

MIT DEM BILDNIS W. C. RÖNTGEN
UND EINER TAFEL

1923

LEIPZIG · VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

anon Fd
G.E.S.
+125

WITHDRAWN
from
OBERLIN COLLEGE
LIBRARY

Inhalt.

Vierte Folge. Band 70.

Erstes Heft.

Seite

1. W. Wien. Über das Leuchten der Kanalstrahlen 1
2. A. Sommerfeld. Über die Deutung verwickelter Spektren (Mangan, Chrom usw.) nach der Methode der inneren Quantenzahlen 32
3. Reinhold Fürth. Dielektrizitätskonstanten einiger wäßriger Lösungen und ihre Deutung nach der Dipoltheorie von Debye. Mit einem Anhang: Dielektrizitätskonstanten einiger biologisch und technologisch interessanter Stoffe 63

Ausgegeben am 18. Januar 1923.

Zweites Heft.

1. Hans Kuppenheim. Über die Beständigkeit der Phosphoreszenzzentren I 81
2. Hans Kuppenheim. Über die Beständigkeit der Phosphoreszenzzentren II 113
3. Walter Gordon und Hartmut Kallmann. Zur Theorie der Dispersion in einem System asymmetrischer Dipole . . . 121
4. K. F. Niessen. Zur Quantentheorie des Wasserstoffmolekülions 129
5. Heinrich Wommelsdorf. Ein neuer Elektrophor 135
6. Maximilian Camillo Neuburger. Über die Dimensionen der Atomkerne und die α-, H^+-, β- und γ-Strahlung 139
7. H. Zanstra. Die Relativierung der Bewegung mit Hilfe der Hypothese von A. Föppl 153

Ausgegeben am 31. Januar 1923.

Drittes Heft.

Seite

1. **Ferdinand Schmidt.** Über das Leuchten der Phosphore in hohen elektrischen Feldern 161
2. **G. du Prel.** Über Verstärkung von photoelektrischen und Ionisationsströmen mittels der Elektronenröhre 199
3. **W. Graffunder.** Über die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von Benzol, Aceton und Glycerin von der Temperatur 225
4. **G. Panconcelli-Calzia.** Ein Verfahren, um graphisch gewonnene Schallaufnahmen auf dem üblichen glyphischen Wege (Sprechmaschine) wieder hörbar zu machen (Paka-Verfahren) . 250
5. **H. Baerwald.** Zur Frage des Umladungsmechanismus im Kanalstrahl 255

Ausgegeben am 15. Februar 1923.

Viertes Heft.

1. **Erich Marx.** Experimentaluntersuchung über die Glimmlichtverstärkerröhre 257
2. **W. Hahnemann und H. Hecht.** Zur experimentellen Untersuchung von Telephonen 283
3. **K. Krüger.** Mechanische Schwingungssysteme mit Stoßanregung 291
4. **A. Magnus.** Die spezifische Wärme des Kohlenstoffs, Siliziums und Siliziumkarbids bei hohen Temperaturen 303
5. **Karl F. Herzfeld.** Nachtrag zu der Arbeit: „Zur Theorie des Kerr- und Faradayeffektes“ 332

Ausgegeben am 22. Februar 1923.

Fünftes Heft.

W. Wien. Röntgen †.

1. **E. Back.** Zur Kenntnis des Zeemaneffektes. (Hierzu Tafel I.) 333
2. **Martin Rusch.** Über Lichtbrechung an Gasen im Sichtbaren und Ultrarot (6,76 μ) und Bestimmung der Kalkspateigenschwingung bei 6,76 μ 373
3. **E. Rupp.** Über Leitfähigkeitserregung bei Hitzeaustreiben der Phosphore 391

Ausgegeben am 8. März 1923.

Sechstes Heft.

Seite

1. Friedrich Kottler. Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen 405
2. George Jaffé. Grundriß einer Theorie des anisotropen Strahlungsfeldes. II 457
3. O. Werner. Über die Schwächung der sichtbaren Strahlung durch künstlichen, homogenen Nebel 480

Ausgegeben am 20. März 1923.

Siebentes Heft.

1. Gustav Mie. Das elektrische Feld eines schweren, elektrisch geladenen Kügelchens, das um ein Gravitationszentrum kreist 489
2. C. Dieterici. Über das Refraktionsvolumen sehr verdünnter Lösungen 558

Ausgegeben am 5. April 1923.

Achtes Heft.

1. Gregor Wentzel. Zur Theorie der Rückdiffusion von β-Strahlen 561
2. Otto Laporte. Zur Theorie der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen auf der Erdkugel 595
3. C. Dieterici. Über die Dampfdruckverminderung einiger Metallsalze in wäßriger Lösung bei 0° C 617
4. L. S. Ornstein und H. C. Burger. Zur Theorie des Schroteffektes 622
5. Richard Gans. Bemerkung zu meiner Arbeit über Hochvakuumentladung 625

Ausgegeben am 20. April 1923.

Nachweis zu der Figurentafel.

Tafel I. E. Back.

1923. № 1.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 70.

1. *Über das Leuchten der Kanalstrahlen;* *von W. Wien.*

Die große Bedeutung, die der Beobachtung der Lichtaussendung der Kanalstrahlen zukommt, läßt es wünschenswert erscheinen, die hier auftretenden natürlichen Vorgänge möglichst vollständig übersehen zu können, insbesondere auch, um ein Urteil darüber zu gewinnen, welche Aufschlüsse über den noch völlig ungeklärten Mechanismus der Lichterregung aus Versuchen an Kanalstrahlen erwartet werden können. In den Kanalstrahlen haben wir die Atome und Moleküle unter besonders einfachen Bedingungen vor uns, da hier wegen der äußerst geringen Dichte der bewegten Teile eine gegenseitige Beeinflussung ausgeschlossen erscheint und die Einwirkung der ruhenden Gasmoleküle auf Zusammenstöße zurückzuführen ist. Da es indessen vorläufig aussichtslos ist, die Lichtaussendung einzelner Atome oder Moleküle zu beobachten, so haben wir es bei den leuchtenden Kanalstrahlen immer noch mit der Wirkung sehr vieler Einzelvorgänge zu tun, so daß die theoretische Behandlung eine statistische bleibt. Diese Statistik wird nun erheblich dadurch vereinfacht, daß die Kanalstrahlen sich nur in einer bestimmten Richtung bewegen. Die Wirkung der Zusammenstöße läßt sich dann am besten durch Einführung von freien Weglängen statistisch behandeln.

1. Allgemeine Statistik des Leuchtens bewegter Atome in den Kanalstrahlen.

Um zu bestimmten Ansätzen für die Statistik des Leuchtens zu gelangen, müssen wir uns Vorstellungen über die Wirkung der Zusammenstöße der bewegten Atome mit den ruhenden Molekülen des Gases bilden.

Wir nehmen zunächst als einfachsten Fall einen solchen, bei dem nur die ungeladenen Atome leuchten, wie das bei der

Aussendung der Balmerserie des Wasserstoffs der Fall ist.[1]) Damit ein ungeladenes Atom zum Leuchten kommt, bedarf es noch einer besonderen Anregung durch einen Zusammenstoß. Die Lichtaussendung, welche bei der Aufnahme eines Elektrons durch ein positiv geladenes Atom eintritt, lassen wir vorläufig außer Betracht. Wir nehmen an, daß in diesem Falle eine andere Art Strahlung erfolgt, beim Wasserstoff etwa eines der kontinuierlichen Spektra.

Weiter müssen wir noch die in die neuere Entwicklung der Quantentheorie eingeführte „Verweilzeit" berücksichtigen, nämlich die Zeit, welche ein zum Leuchten angeregtes Atom im Durchschnitt braucht, um wirklich zum Leuchten zu gelangen. Wir beschränken uns dabei zunächst auf Wasserstoffatome.

Wir haben die Zahl der den Querschnitt des Kanalstrahls in der Zeiteinheit fliegenden Atome N in drei Teile zu zerlegen. Es soll sein:

1. n_1 = der Zahl der positiv geladenen Atome, die nicht leuchten;
2. n_2 = der Zahl der ungeladenen, aber nicht zum Leuchten angeregten Atome,
3. n_3 = der Zahl der zum Leuchten angeregten Atome.

Es müssen nun folgende freie Weglängen eingeführt werden:

L_1: die freie Weglänge des geladenen Atoms bis zur Umladung;

L_2: die freie Weglänge des ungeladenen Atoms bis zur Umladung;

l_2: die freie Weglänge des ungeladenen, nicht erregten Atoms bis zur Erregung für das Aussenden einer bestimmten Spektrallinie;

l_3: die freie Weglänge des erregten Atoms, bis es wieder in den unerregten Zustand zurückfällt.

Dieses Zurückfallen in den unerregten Zustand kann nun auf zwei verschiedene Weisen erfolgen:

1. Das Atom legt während der Verweilzeit die Strecke l zurück und beginnt dann zu leuchten. Von diesem Augenblick an wird es wieder als unerregt betrachtet.

---

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 69. S. 325. 1922.

2. Das Atom wird während der Verweilzeit durch einen Zusammenstoß gestört und kann die Spektrallinie, zu der es erregt war, nicht mehr aussenden. Die freie Weglänge dieser Störung nennen wir l_1.

Die freie Weglänge l_2 bezieht sich auf die Aussendung einer bestimmten Spektrallinie. Wenn das Atom zur Aussendung irgendeiner anderen Spektrallinie erregt wird, gilt es für diese Betrachtung als nicht erregt. Schneiden wir aus dem Kanalstrahl die Strecke dx aus, so ist in derselben Weise wie bei der Theorie der Umladung[1])

$$\frac{dn_1}{dx} = \frac{n_2 + n_3}{L_2} - \frac{n_1}{L_1} . \tag{1}$$

Für die Umladung werden die zum Leuchten erregten und nicht erregten als gleich betrachtet. In der Tat kann man ja bei der Messung der freien Weglängen der Umladung einen Unterschied zwischen erregten und nicht erregten Atomen nicht machen.

Die Gleichung drückt aus, daß die Änderung der Anzahl der positiven Atome bedingt ist durch die sich umladenden neutralen Atome, vermindert um die neutral werdenden positiven.

n_2 ändert sich in vierfacher Weise:

1. Ein Teil der positiven Atome wird neutral.
2. Ein Teil der erregten Atome kommt in den unerregten Zustand.
3. Ein Teil der neutralen Atome wird zum Leuchten der Spektrallinie erregt.
4. Ein Teil der neutralen Atome wird positiv geladen.

1. und 2. geben eine Zunahme, 3. und 4. eine Abnahme von n_2. Wir haben also

$$\frac{dn_2}{dx} = \frac{n_1}{L_1} + \frac{n_3}{l_3} - \frac{n_2}{l_2} - \frac{n_2}{L_2} . \tag{2}$$

Genau in gleicher Weise ergibt sich

$$\frac{dn_3}{dx} = \frac{n_2}{l_2} - \frac{n_3}{l_3} - \frac{n_3}{L_3} . \tag{3}$$

Natürlich muß

$$\frac{dn_1}{dx} + \frac{dn_2}{dx} + \frac{dn_3}{dx} = 0$$

sein, da immer

$$n_1 + n_2 + n_3 = N ,$$

der Gesamtzahl der Atome ist.

1) W. Wien, Sitz.-Ber. d. Berl. Akad. 27. Juli 1911; Ann. d. Phys. 39. S. 328. 1912. Kanalstrahlen. 2. Aufl. S. 145.

2. Das allgemeine Integral der gleichseitigen Differentialgleichungen.

Um das allgemeine Integral der Differentialgleichungen (1), (2), (3) zu gewinnen, haben wir bekanntlich zu setzen

$$n = A_0 e^{\alpha_1 x} + B_0 e^{\beta_1 x} + C_0 e^{\gamma_1 x},$$

wenn α, β, γ die Wurzeln der Determinante sind

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{L_1} + s & -\frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_2} + \frac{1}{l_2} + s & -\frac{1}{l_2} \\ 0 & -\frac{1}{l_2} & \frac{1}{L_2} + \frac{1}{l_2} + s. \end{vmatrix}$$

Diese Wurzeln sind:

$$s = \alpha_1 = 0, \quad s = \beta_1 = -\left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}\right), \quad s = \gamma_1 = -\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right).$$

Das allgemeine Integral nimmt daher die Gestalt an, wenn wir $\beta = -\beta_1$, $\gamma = -\gamma_1$ setzen,

$$\begin{aligned} n_1 &= A e^{-\gamma x} + A_1 e^{-\beta x} + A_2, \\ n_2 &= B e^{-\gamma x} + B_1 e^{-\beta x} + B_2, \\ n_3 &= C e^{-\gamma x} + C_1 e^{-\beta x} + C_2. \end{aligned}$$

Aus Gleichung (3) folgt dann unter Berücksichtigung von

$$\gamma = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}, \qquad \beta = \frac{1}{L_2} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}$$

zunächst

$$C_1 = -B_1$$

und dann aus (1)

$$-A_1\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{L_2}\right) = -\frac{A_1}{L_1},$$

d. h., da die l_2, l_3, L_1, L_2 voneinander unabhängig sind,

$$A_1 = 0.$$

Setzt man nun die gewonnenen Ausdrücke in die Gleichungen (1), (2), (3) ein, so erhält man

$$(4)\quad \begin{cases} n_1 = A e^{-\gamma x} + A_2, \\ n_2 = -\dfrac{A l_2 (L_1 - l_1) e^{-\gamma x}}{L_1 l_2 + L_1 l_2 - l_2 l_2} - C e^{-\beta x} + \dfrac{A_2 l_2 L_2 (l_2 + L_2)}{L_1 (l_2 L_2 + l_2 l_2 + L_2 l_2)}, \\ n_3 = -\dfrac{A L_1 l_2 e^{-\gamma x}}{L_1 l_2 + L_1 l_2 - l_2 l_2} + C e^{-\beta x} + \dfrac{A_2 l_2 L_2^2}{L_1 (l_2 L_2 + l_2 l_2 + L_2 l_2)}, \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}, \qquad \beta = \frac{1}{L_2} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_2}.$$

Für $x = \infty$ ist

$$n_1 = A_2.$$

Hier ist der stationäre Zustand eingetreten, wo n_1 nicht mehr von x abhängt. Setzen wir für diesen $n_1 = n_1^0$, so ist

$$A_2 = n_1^0.$$

Addiert man die drei Gleichungen (4), so erhält man

$$n_1 + n_2 + n_3 = A_2 \frac{L_2}{L_1} + A_2 = A_2 \frac{(L_2 + L_1)}{L_1} = N,$$

$n_1^0 = N \dfrac{L_1}{L_1 + L_2}$ wie aus der Theorie der einfachen Umladungen folgt.

Hierdurch ist die Konstante $A_2 = n_1^0$ bestimmt. Die beiden anderen Konstanten A und C sind durch die Anfangsbedingungen, unter denen der Strahl in den betrachteten Raum eintritt, zu berechnen.

3. Der stationäre Zustand.

Wir erhalten den stationären Zustand, wenn $x = \infty$ gesetzt wird; dann ist

$$(5)\quad \begin{cases} n_1 = n_1^0 = N \dfrac{L_1}{L_1 + L_2}, \\ n_2^0 = \dfrac{n_1^0 l_2 L_2 (l_2 + L_2)}{L_1 (l_2 L_2 + l_2 l_2 + L_2 l_2)}, \\ n_3^0 = \dfrac{n_1^0 l_2 L_2^2}{L_1 (l_2 L_2 + l_2 l_2 + L_2 l_2)}. \end{cases}$$

Dieser Zustand entspricht den meisten Beobachtungen an Kanalstrahlen.

4. Bestimmung der Konstanten für den Fall, daß Kanalstrahlen von einem Raum 1 plötzlich in einen Raum 2 treten, in welchem ein anderer Druck herrscht.

Wir werden später Beobachtungen zu besprechen haben, bei denen die Kanalstrahlen durch einen engen Spalt von einem

Raum in einen anderen treten, in welchem ein anderer Druck herrscht. Wir haben daher unsere Theorie diesem Falle anzupassen. Es mögen im Raum 1 Kanalstrahlen fliegen, bei denen N-Atome durch den Querschnitt in der Zeiteinheit gehen.

In diesem Raume sollen die freien Weglängen

$$L_1', L_2', l_2', l_3'$$

sein. Im stationären Zustand ist dann nach (5)

$$n_1' = \frac{N L_1'}{L_1' + L_2'}, \qquad n_2' = \frac{N L_2' l_2' (l_2' + L_2')}{(L_1' + L_2')(l_2' L_2' + l_2' l_2' + L_2' l_2')},$$

$$n_3' = \frac{N L_2'^2 l_2'}{(L_1' + L_2')(l_2' L_2' + l_2' l_2' + L_2' l_2')}.$$

Diese stationären Strahlen treten dann in den Raum 2. An der Grenze sei $x = 0$. Im Raum 2 sollen die freien Weglängen sein: L_1'', L_2'', l_2'', l_3''. Dann ist

$$n_1'' = N\left(\frac{L_2''}{L_1'' + L_2''} - \frac{L_2'}{L_1' + L_2'}\right) e^{-\gamma'' x} + \frac{N L_1''}{L_1'' + L_2''},$$

$$n_2'' = -N\left(\frac{L_2''}{L_1'' + L_2''} - \frac{L_2'}{L_1' + L_2'}\right) \frac{(L_1'' - l_2'') l_2'' e^{-\gamma'' x}}{L_1'' l_2'' + L_1'' l_2'' - l_2'' l_2''}$$

$$+ N\left\{\frac{L_2''^2 l_2''}{(L_1'' + L_2'')(l_2'' L_2'' + l_2'' l_2'' + L_2'' l_2'')} - \frac{L_2'^2 l_2'}{(L_1' + L_2')(l_2' L_2' + l_2' l_2' + L_2' l_2')}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{L_2'}{L_1' + L_2'} - \frac{L_2''}{L_1'' + L_2''}\right) \frac{L_1'' l_2''}{L_1'' l_2'' + L_1'' l_2'' - l_2'' l_2''}\right\} e^{-\beta'' x}$$

$$+ \frac{N l_2'' L_2'' (l_2'' + L_2'')}{(L_1'' + L_2'')(l_2'' L_2'' + l_2'' l_2'' + L_2'' l_2'')},$$

$$n_3 = -N\left(\frac{L_2''}{L_1'' + L_2''} - \frac{L_2'}{L_1' + L_2'}\right) \frac{L_1'' l_2'' e^{-\gamma'' x}}{(L_1'' l_2'' + L_1'' l_2'' - l_2'' l_2'')}$$

$$+ \frac{N l_2'' L_2''^2}{(L_1'' + L_2'')(l_2'' L_2'' + L_2'' l_2'' + l_2'' l_2'')}$$

$$- N\left\{\frac{L_2''^2 l_2''}{(L_1'' + L_2'')(l_2'' L_2'' + l_2'' l_2'' + L_2'' l_2'')} - \frac{L_2'^2 l_2'}{(L_1' + L_2')(l_2' L_2' + l_2' l_2' + L_2' l_2')}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{L_2'}{L_1' + L_2'} - \frac{L_2''}{L_1'' + L_2''}\right) \frac{L_1'' l_2''}{L_1'' l_2'' + l_1'' l_2'' - l_2'' l_2''}\right\} e^{-\beta'' x}.$$

5. Vereinfachung der Ausdrücke durch die experimentell gefundene Tatsache, daß die freien Weglängen L_1 und L_2 umgekehrt proportional dem Druck sind.

Wenn die freien Weglängen der Umladungen von Zusammenstößen herrühren, so müssen sie nach den Vorstellungen der Gastheorie dem Druck umgekehrt proportional sein. Das ist, wie sich experimentell genauer hat feststellen lassen, der Fall. Nehmen wir dies an, so ist

$$\frac{L_1'}{L_1'} = \frac{L_1''}{L_1''} \cdots$$

Dann vereinfachen sich die Ausdrücke des Abschnitts 4 wesentlich und wir erhalten

$$n_1'' = \frac{N L_1'}{L_1' + L_2'} = \frac{N L''}{L_1'' + L_2''},$$

$$n_2'' = -Ne^{-\beta'' z}\left\{\frac{L_2'^2 l_2'}{(L_1' + L_2')(l_2' L_2' + l_2' l_2' + L_2' l_2')} - \frac{L_2''^2 l_2''}{(L_1'' + L_2'')(L_2'' l_2'' + l_2'' l_2'' + L_2'' l_2'')}\right\} + \frac{N l_2'' L_2''(l_2'' + L_2'')}{(L_1'' + L_2'')(l_2'' L_2'' + l_2'' l_2'' + L_2'' l_2'')},$$

$$n_2'' = Ne^{-\beta'' z}\left\{\frac{L_2'^2 l_2'}{(L_1' + L_2')(l_2' L_2' + l_2' l_2' + L_2' l_2')} - \frac{L_2''^2 l_2''}{(L_1'' + L_2'')(L_2'' l_2'' + l_2'' l_2'' + L_2'' l_2'')}\right\} + \frac{N l_2'' L_2''^2}{(L_1'' + L_2'')(l_2'' L_2'' + l_2'' l_2'' + L_2'' l_2'')}.$$

6. Die freien Weglängen der Verweilzeit und der Störungen. Abhängigkeit der freien Weglängen vom Druck.

Wir haben bisher die freie Weglänge l_2 diejenige genannt, nach deren Durchlaufen ein zum Aussenden einer bestimmten Spektrallinie angeregtes Atom wieder in den unerregten Zustand zurückkehrt. Das ist nun, wie wir gesehen haben, der Fall entweder durch Beginn des Leuchtens nach Verlauf der Verweilzeit oder nach Durchlaufen der freien Weglänge l_1, die zu einer Störung führt. Nennen wir t_0 die Verweilzeit, so ist die freie Weglänge der Verweilzeit

$$l = v t_0,$$

wenn v die Geschwindigkeit der Strahlen ist.

In den Differentialgleichungen (2) und (2) ist daher anstatt $\frac{n_2}{l_2}$ zu setzen $\frac{n_2}{l} + \frac{n_2}{l_1}$, so daß $\frac{1}{l_2} = \frac{1}{l} + \frac{1}{l_1}$ ist.

Während wir nun nach den Vorstellungen der kinetischen Gastheorie die freien Weglängen, die von Zusammenstößen mit ruhenden Molekülen herrühren, dem Druck umgekehrt proportional einzusetzen haben, ist die freie Weglänge der Verweilzeit, als eine dem Atom selbst zukommende Konstante, vom Druck unabhängig anzunehmen.

Wir haben also die freien Weglängen L_1, L_2, l_1, l_2 umgekehrt proportional dem Druck zu setzen, dagegen l vom Druck unabhängig anzunehmen.

7. Die Stärke des Leuchtens.

Die Lichtmenge, die von den bewegten Atomen auf einer bestimmten Wegstrecke ausgestrahlt wird, hängt von der Zeitdauer des Ausstrahlungsvorgangs selbst ab.

Bekanntlich bilden sich die Vertreter der radikalen Quantentheorie die Vorstellung, daß ein zum Leuchten angeregtes Atom nach Verlauf der Verweilzeit seine ganze Lichtenergie in einer sehr kurzen Zeit, gewissermaßen plötzlich, ausstrahlt. Wir wollen hier nicht untersuchen, wie weit die Anschauung mit der Interferenzfähigkeit des Lichtes vereinbar ist. Da indessen die Interferenzfähigkeit an sich schon durch die Wärmebewegung beeinträchtigt wird, so ist noch ein gewisser Spielraum für die Annahme frei, daß die Dauer der Lichtemission kürzer ist, als den Folgerungen aus der klassischen Theorie entspricht.

Jedenfalls gestaltet sich die Rechnung unter der Annahme einer sehr kurzen Ausstrahlungszeit am einfachsten. Nach dieser kommen auf der Strecke dx dauernd $\frac{n_2\,dx}{l}$ angeregte Atome zum Leuchten. Jedes sendet nach der Quantentheorie den Betrag $h\nu$ aus. Die Emission auf der Strecke dx ist also

$$J_0\,dx = \frac{n_2}{l}\,h\nu\,dx, \tag{6}$$

also ist nach (5) im stationären Zustande

$$J_0 = \frac{h\nu\,N\,l_2\,L_2^2}{(L_1 + L_2)(l_2 L_1 + l_1 l_2 + L_2 l_1)\,l}.$$

Wir haben nun gesehen, daß die freie Weglänge der Verweilzeit vom Druck unabhängig ist, so daß mit abnehmendem Druck l_2 einer oberen Grenze zustrebt. Für kleinen Druck muß $l_2 = l$ werden und kann über diese Grenze nicht gehen.

Andererseits ist von mir[1]) schon früher die freie Weglänge der Lichterregung l_2 für die Spektrallinie $H\beta$ gemessen worden. Obwohl die damaligen Messungen, die noch bei unvollkommenen Kenntnissen der Eigenschaften der Kanalstrahlen angestellt sind, einer Wiederholung bedürfen, kann wohl mit Sicherheit angenommen werden, daß das Ergebnis eines sehr großen Wertes von l_2 richtig ist. Bei kurzer Abklingungszeit ist l endlich. Setzen wir also ein großes l_2 voraus, so ist

$$J_0 = \frac{h\nu N l_1 L_2^2}{(L_1 + L_2)(L_2 + l_2) l_2 l}, \tag{6a}$$

Gehen wir zu niedrigen Drucken über, so wird, wie wir gesehen haben, L_2 groß gegen l_2 und wir haben, wenn schließlich $l_2 = l$ wird,

$$J_0 = \frac{h\nu N L_2}{(L_1 + L_2) l_1}, \tag{6b}$$

bezogen auf die Spektrallinie, deren freie Weglänge der Erregung l_2 ist. Da die höhern Glieder der Serien an Intensität stark abnehmen, so muß für diese l_2 rasch wachsen.

Wir sehen hieraus, daß sich aus der Messung der absoluten Intensität des von Kanalstrahlen in einer Spektrallinie ausgesandten Lichts die freie Weglänge l_2 der Lichterregung bestimmen läßt, wie ich es früher ausgeführt habe.

Gehen wir andererseits zu hohen Drucken, so wird schließlich das vom Druck abhängige l_1 in der Gleichung

$$\frac{1}{l_2} = \frac{1}{l} + \frac{1}{l_1}$$

überwiegen und $l_2 = l_1$ werden. Da die freie Weglänge der Störungen von Zusammenstößen bestimmt sein muß, so können wir sämtliche freie Weglängen dem Druck umgekehrt proportional setzen. Es ist dann

$$L_1 = \frac{L_1^0}{p}, \quad L_2 = \frac{L_2^0}{p}, \quad l_2 = \frac{l_2^0}{p}, \quad l_2 = l_1 = \frac{l_1^0}{p}.$$

---

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 39. S. 644. 1912.

Dann ist

$$J_0 = \frac{h\nu N l_1^0 L_2^{0\,2}}{(L_1^0 + L_2^0)(L_2^0 + l_1^0) l_2^0}.$$

Wenn L_2 groß gegen l_1, so wird einfacher

$$J_0 = \frac{h\nu N L_2^0 l_1^0}{l l_2^0 (L_1^0 + L_2^0)}.$$

Dies stellt die Grenze dar, der die Lichtemission der Kanalstrahlen zustrebt. Treten diese Strahlen in einen hohen Druck ein, so wird die Lichtemission der bewegten Teile nicht mit dem Druck unbegrenzt wachsen, sondern einem festen Grenzwert zustreben, aus dem l berechnet werden kann.

Vegard[1]) hat in der Tat beobachtet, daß die Lichtemission der bewegten Atome nicht dem Druck proportional wächst, sondern wesentlich langsamer. Bis zu dem konstanten Grenzwert ist er jedoch nicht gelangt.

Tritt ein Kanalstrahl von höherem Druck plötzlich in ein hohes Vakuum, so verschwinden in den Ausdrücken des Abschnitts 5, da l_2 klein bleibt, die doppelt gestrichelten Glieder und wir haben für Werte von x, die nicht zu groß sind,

$$J = \frac{h\nu N L_1'^2 l_2' e^{-\beta'' x}}{(L_1' + L_2')(l_2' L_2' + l_2' l_2' + L_2' l_2') l}$$
$$= \text{const}\, e^{-\beta'' x}.$$

Nun ist aber

$$\beta'' = \frac{1}{L_2''} + \frac{1}{l_2''} + \frac{1}{l_2''} = \frac{1}{l},$$

wenn der Druck genügend klein ist und es wird

$$J = \text{const}\, e^{-\frac{x}{l}}. \tag{6c}$$

Nach dieser Darstellung würde in meinen Abklingungsversuchen die freie Weglänge der Verweilzeit gemessen werden.

8. Annahme einer endlichen Abklingung und gleichzeitigen Verweilzeit.

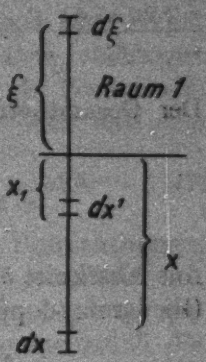
Die bisherigen Betrachtungen gründen sich auf die Annahme, daß die wirkliche Ausstrahlung eines Atoms sehr kurze

1) L. Vegard, Ann. d. Phys. 39. S. 147. 1912.

Zeit dauert. Die Abklingung des Leuchtens erscheint dann als hervorgerufen durch die statistische Verweilzeit.

Wir müssen nun aber auch die Annahme einer wirklichen, nach dem Exponentialgesetz erfolgenden Abklingung machen und zwar wollen wir voraussetzen, daß neben der Verweilzeit noch eine solche Abklingung bestehen soll.

Wir lassen zunächst die Kanalstrahlen in ein hohes Vakuum eintreten. Wir betrachten im Raum 2 ein Element der Kanalstrahlen, das Licht aussenden soll. Im Raum 1 herrscht stationärer Zustand.



Die Strahlung des Elements dx setzt sich dann aus zwei Teilen zusammen. Der erste Teil rührt von den schon im Raum 1 zum Leuchten gekommenen Atomen her. In jedem Element $d\xi$ dieses Raumes werden $\frac{n_2'^0 d\xi}{l}$ - Atome zum Leuchten kommen. Jedes Atom sendet eine Strahlung aus, die nach der Funktion $e^{-\frac{2ax}{v}}$ abklingt. Die gesamte Ausstrahlung des frei strahlenden Atoms ist $h\nu$, also haben wir

$$A\int_0^\infty dx\, e^{-\frac{2ax}{v}} = h\nu, \qquad A = \frac{h\nu \cdot 2a}{v}.$$

Die $\frac{n_2'^0 d\xi}{l}$ - Atome, die in $d\xi$ anfingen zu leuchten, strahlen im Element dx die Energie aus:

$$A\,dx\,\frac{n_2'^0 d\xi}{l}\, e^{-\frac{2a}{v}(\xi+x)-\frac{\xi}{l_1'}},$$

weil auf der Strecke zwischen $d\xi$ und dx die Strahlung gemäß der Funktion $e^{-\frac{2a}{v}(\xi+x)}$ abklingt und außerdem ihre Zahl im Raum 1 durch die störenden Zusammenstöße, deren freie Weglänge l_1' ist, im Verhältnis $e^{-\frac{\xi}{l_1'}}$ verringert sind.

Setzen wir für A seinen Wert und integrieren von 0 bis ∞, so erhalten wir als den aus dem Raum 1 kommenden Teil der Strahlung

$$\frac{n_2'^0 h\nu\, 2a\, dx}{lv}\int_0^\infty e^{-\frac{2a}{v}(\xi+x)-\frac{\xi}{l_1'}} d\xi = \frac{n_2'^0 h\nu\, 2a\, e^{-\frac{2a}{v}x}\, dx}{lv\left(\frac{2a}{v}+\frac{1}{l_1'}\right)}.$$

Von den Atomen, die erst im Raum 2 zu leuchten beginnen, betrachten wir die, welche im Element dx_1 zum Leuchten kommen. Wir haben für diese die Zahl $dx_1 \frac{n_3'^0}{l} e^{-\frac{x_1}{l}}$ und nach Abschnitt 7

$$\frac{n_3'^0 2a h\nu\, dx}{l v} \int_0^x dx_1\, e^{-\frac{2a}{v}(x-x_1)-\frac{x_1}{l}} = \frac{n_3'^0 h\nu 2a}{l v\left(\frac{1}{l}-\frac{2a}{v}\right)}\left(e^{-\frac{2a}{v}x}-e^{-\frac{x}{l}}\right).$$

Der Gesamtbetrag ist also

$$(7) \qquad J dx = \frac{n_3'^0 2a h\nu dx}{v l\left(\frac{1}{l}-\frac{2a}{v}\right)}\left\{\frac{e^{-\frac{2a}{v}x}}{l_3'\left(\frac{2a}{v}+\frac{1}{l_3'}\right)}-e^{-\frac{x}{l}}\right\}.$$

Aus Abschnitt 5 setzen wir nun, da in dem hohen Vakuum die Glieder mit doppelt gestrichenen Größen verschwinden (vgl. S. 10)

$$n_3'^0 = \frac{N L_1'^2 l_3'}{(L_1'+L_3')(l_3' L_3' + l_3' l_3' + L_3' l_3')}.$$

Wir nehmen nun l_3' und L_3' groß an gegen l_3', so daß $n_3'^0 = \frac{N L_1' l_3'}{(L_1'+L_3') l_3'}$ wird. Nun ist $l_3' = \frac{l_1' l}{l_1'+l}$ und wir haben

$$n_3'^0 = \frac{N L_1' l_1' l}{(L_1'+L_3') l_3' (l_1'+l)}.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

1. l ist klein gegen $v/2a$ und l_1'. Dann ist

$$J dx = \frac{n_3'^0 2a h\nu dx}{v} \cdot \frac{e^{-\frac{2a}{v}x}}{l_3'\left(\frac{2a}{v}+\frac{1}{l_1'}\right)}$$

$$= \frac{N L_1'}{(L_1'+L_3') l_3'} \cdot \frac{2a h\nu dx}{v} \cdot \frac{e^{-\frac{2a}{v}x}}{\frac{2a}{v}+\frac{1}{l_1'}}.$$

Im zweiten Fall ist $v/2a$ klein gegen l und l_1'. Dann ist

$$J dx = \frac{N L_1' l_1'}{(L_1'+L_3') l_3' (l_1'+l)} h\nu\, dx\, e^{-\frac{x}{l}}.$$

Wenn wir $v/2a$ mit λ bezeichnen, so haben wir im ersten Falle

$$J dx = \frac{N L_1'}{(L_1'+L_3') l_3'} h\nu\, dx\, e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot \frac{l_1'}{(l_1'+\lambda)},$$

im zweiten

$$J\,dx = \frac{N L_2'}{(L_1' + L_2') l_1'} h\nu\, dx\, e^{-\frac{x}{l}} \cdot \frac{l_1'}{(l_1' + l)}.$$

Die beiden Ausdrücke unterscheiden sich nur dadurch, daß in einem $\lambda = \frac{v}{2\alpha}$, im anderen l steht.

Die beobachtete Abklingung, wenn sie nach der Exponentialfunktion tatsächlich erfolgt, kann daher ebensogut als wirkliche Abklingung durch $2\alpha/v$ als wie als Verweilzeit, deren freie Weglänge l ist, aufgefaßt werden, ohne daß eine Unterscheidung zwischen beiden möglich wäre.

9. Vergleich mit der Theorie von Mie.

Hr. G. Mie hat schon früher ähnliche Betrachtungen, wie wir sie im Abschnitt 8 angestellt haben, veröffentlicht. Der Unterschied beruht nur darin, daß er die Abklingungsfunktion zunächst unbestimmt läßt und die Zusammenstöße, die zu Störungen der Lichtemission führen, nicht in Betracht zieht. Setzen wir $\frac{1}{l_1'} = 0$, so erhalten wir aus (7)

$$J\,dx = \frac{N L_2' 2\alpha h\nu\, dx}{(L_1' + L_2') l_1' v \left(\frac{1}{l} - \frac{2\alpha}{v}\right)} \left\{ \frac{v\, e^{-\frac{2\alpha}{v} x}}{2\alpha l} - e^{-\frac{x}{l}} \right\}.$$

Bilden wir

$$\frac{dJ}{dx} = - \frac{N L_2' 2\alpha h\nu}{(L_1' + L_2') l_1' v \left(\frac{1}{l} - \frac{2\alpha}{v}\right) l} \left\{ e^{-\frac{2\alpha}{v} x} - e^{-\frac{x}{l}} \right\},$$

so verschwindet dJ/dx für $x = 0$. Das ist die von G. Mie gezogene Folgerung.

Wenn wir aber den die Störungen berücksichtigenden Ausdruck (7) nehmen, so ist

$$\frac{dJ}{dx} = - \frac{\text{const}}{\left(\frac{1}{l} - \frac{2\alpha}{v}\right)} \left\{ \frac{2\alpha\, e^{-\frac{2\alpha}{v} x}}{v l_1' \left(\frac{2\alpha}{v} + \frac{1}{l_1'}\right)} - \frac{e^{-\frac{x}{l}}}{l} \right\}.$$

Jetzt verschwindet dJ/dx nicht für $x = 0$. Setzen wir wieder $\frac{2\alpha}{v} = \frac{1}{\lambda}$, so ist $\frac{dJ}{dx} = 0$ für

$$x = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{l}} \log \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{1}{l_1' \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{l_1'}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{l}} \log \frac{l + l_1'}{\lambda + l_1'}.$$

x ist Null, wenn $l_1' = \infty$ ist, d. h. die Störungen fortfallen. Wenn l_1' klein ist, so wird $\frac{dJ}{dx} = 0$ für

$$x = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{l}} \log \frac{l}{\lambda},$$

da $l_2' = l_1'$ wird.

10. Leuchten im stationären Zustand.

Wir haben bereits in Gleichung (6) die von Kanalstrahlen im stationärem Zustand ausgesandte Lichtmenge unter der Voraussetzung abgeleitet, daß nur eine Verweilzeit anzunehmen ist. Es bleibt diese Ableitung noch für den allgemeineren Fall zu ergänzen, daß außer der Verweilzeit noch eine Abklingungszeit in Betracht zu ziehen ist.

Wir gewinnen die im stationären Zustand ausgesandte Lichtintensität leicht, wenn wir in Abschnitt 8 diese für $x = 0$ bestimmen, wo der Kanalstrahl den Raum 1 verläßt.

Diese ist

$$J_0 = \frac{n_2'^0 h\nu 2\alpha}{lv\left(\frac{2\alpha}{v} + \frac{1}{l_1'}\right)} \quad \text{oder, da nach Abschnitt 4 für große } l_1' \quad n_2'^0 = \frac{N L_2'^2}{(L_1' + L_2') l_2' (L_2' + l_2')} \text{ ist,}$$

$$(8) \qquad = \frac{N L_2'^2 h\nu 2\alpha l_2'}{(L_1' + L_2') lv l_2' \left(\frac{2\alpha}{v} + \frac{1}{l_1'}\right)(L_2' + l_2')}.$$

Wir setzen wieder $\frac{v}{2\alpha} = \lambda$, dann ist

$$J_0 = \frac{N L_2'^2 h\nu l_2'}{(L_1' + L_2') l l_2 \lambda \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{l_1'}\right)(L_2 + l_2')}.$$

Da wir jetzt nur einen Raum zu betrachten brauchen, so können wir anstatt der gestrichelten Größen die ungestrichelten setzen. Ferner führen wir $l_2 = \frac{l l_1}{l_1 + l}$ ein. Dann ist

$$(9) \qquad J_0 = \frac{N h\nu L_2^2 l_1^2}{(L_1 + L_2) l_2 [L_2 (l_1 + l) + l l_1] (l_1 + \lambda)},$$

für $\lambda = 0$ wird hieraus

$$(9a) \qquad J_0 = \frac{N h\nu L_2^2 l_1}{(L_1 + L_2) l_2 [L_2 (l_1 + l) + l l_1]},$$

für $l = 0$

$$J_0 = \frac{N h\nu L_2 l_1}{(L_1 + L_2) l_2 (l_1 + \lambda)} \quad (9\,b)$$

Die beiden Ausdrücke sind in bezug auf l und λ nur symmetrisch, wenn wir l_1 gegen L_2 vernachlässigen können. In diesem Falle kann also in der Tat nicht zwischen Abklingung und Verweilzeit unterschieden werden.

Daß zwischen der Annahme der Verweilzeit und der Abklingungszeit überhaupt ein Unterschied besteht, beruht darauf, daß bei der reinen Abklingung die Möglichkeit vorhanden ist, daß ein Atom während des Leuchtens aufs neue zum Leuchten angeregt werden kann, während nach unserer Annahme ein angeregtes erst wieder aufs neue in diesen Zustand versetzt werden kann, wenn die Lichtemission begonnen hat. Im ersteren Falle ergibt sich daher eine größere Lichtemission.

Wenn sowohl Abklingung als Verweilzeit angenommen werden müssen, so werden bei ganz hohen Drucken λ und l groß schließlich gegen alle übrigen.

Ohne Vernachlässigungen ist unter der Annahme endlicher λ und l der Ausdruck für J_0 im stationären Zustande nach Abschnitt 3

$$J_0 = \frac{n_2^0 h\nu}{l\lambda\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{l_1}\right)}$$

$$= \frac{N h\nu l_1 L_2^2}{\lambda\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{l_1}\right)\left(l_1 L_2 + (L_2 + l_1)\frac{l l_1}{l_1 + l}\right)(L_1 + L_2)(l_1 + l)}.$$

Setzen wir wieder

$$l_1 = \frac{l_1^0}{p}, \quad l_2 = \frac{l_2^0}{p}, \quad L_2 = \frac{L_2^0}{p}, \quad L_1 = \frac{L_1^0}{p},$$

so wird mit zunehmendem Druck l und λ groß, zunächst gegen l_1 und

$$J_0 = \frac{N h\nu l_1^0 L_2^{0\,2} l_1}{(L_1^0 + L_2^0)[l_2^0 L_2^0 + (L_2^0 + l_2^0) l_1^0]\lambda l},$$

oder da l_2 jedenfalls groß gegen L_2 bleibt

$$J_0 = \frac{N h\nu l_1^0 L_2^{0\,2} l_1}{(L_1^0 + L_2^0)(L_2^0 + l_2^0) l_1^0 \lambda l}.$$

Hier ist nur noch l_1 vom Druck abhängig $= \frac{l_1^0}{p}$ und J_0 würde also umgekehrt proportional mit dem Druck abnehmen. Wenn l_2 groß gegen L_2 ist, so verschwindet

$$\frac{dJ_0}{dp} = \text{const}\,\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\lambda p}{l_1^0}\right)\left[L_2^0\left(\frac{l_1^0}{p}+l\right)+l\,l_1^0\right]}\right)$$

für

$$p = l_1^0\sqrt{\frac{L_2^0}{(L_2^0+l_1^0)\,\lambda\,l}}$$

oder annähernd, da wir später sehen werden, l_2^0 kleiner als L_2^0 ist

$$p = \frac{l_1^0}{\sqrt{\lambda\,l}}, \qquad l_1 = \sqrt{l\,\lambda}\,.$$

Für diesen Druck hat J_0 ein Maximum. Aus diesem Maximum würde sich am leichtesten bestimmen lassen, wie groß λ bei gegebenem l oder umgekehrt ist.

11. Experimentelle Prüfung.

Um die im vorstehenden entwickelte Theorie einer experimentellen Prüfung von einiger Vollständigkeit zu unterwerfen, ist eine bedeutende Arbeit erforderlich, die längere Zeit in Anspruch nehmen muß. Es sollen jedoch schon hier einige Versuche mitgeteilt werden. Wir haben gesehen, daß es zunächst kaum möglich sein wird, zwischen der Annahme einer wirklichen Abklingung der Lichtstrahlung im Sinne der alten klassischen Theorie und der Vorstellung einer Verweilzeit zu unterscheiden.

Ferner zeigen die von mir ausgeführten[1]) und von Hrn. G. Mie[2]) diskutierten Versuche, daß sich zwar Abweichungen vom exponentiellen Abfall der Intensität zu ergeben scheinen, daß diese aber doch verhältnismäßig klein sind. Wir brauchen also zunächst nicht auf die gleichzeitige Berücksichtigung von Verweilzeit und Abklingungszeit einzugehen.

Nach Gleichung (6) ist

$J_0 = \frac{n_2}{l}\,h\nu$ und nach Abschnitt 5

$$= \frac{N e^{-\beta'' a}\,h\nu}{l}\left\{\frac{L_2'^2\,l_2'}{(L_1'+L_2')(l_2'L_2'+l_2'l_2'+L_2'l_2')} - \frac{L_2''^2\,l_2''}{(L_1''+L_2'')(L_2''l_2''+l_2''l_2''+L_2''l_2'')}\right\}$$
$$+ \frac{N l_2''\,L_1''^2\,h\nu}{l(L_1''+L_2'')(l_2''L_2''+l_2''l_2''+L_2''l_2'')}\,,$$

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 66. S. 229. 1921.
2) G. Mie, Ann. d. Phys. 66. S. 237. 1921.

wenn der Strahl von einem Gas mit bestimmtem Druck plötzlich in einen anderen Druck übergeht. Wir können also setzen

$$J = B_1 e^{-\beta'' s} + B_0,$$

$$\beta'' = \frac{1}{l_1''} + \frac{1}{l_2''} + \frac{1}{L_2''}, \qquad \frac{1}{l_1''} = \frac{1}{l} + \frac{1}{l_1''}.$$

Da l vom Druck unabhängig ist, so muß für sehr niedrigen Druck, wenn l_1'' groß gegen l wird, $l_1'' = l$ werden. Dann ist, da auch l_2 und L_2 groß gegen l sind,

$$B_0 = \frac{N h \nu L_1''}{(L_1'' + L_2'') l_2}$$

klein gegen B_1.

Ist diese Grenze erreicht, so kommen wir zur Gleichung (6c), d. h. einfacher exponentieller Abnahme der Intensität, die Abnahme darf sich dann bei weiterer Abnahme des Drucks nicht mehr ändern.

Um dies zu prüfen, wurde die Anordnung für die frühere Messung der Abklingung[1]) etwas abgeändert. Der Kanalstrahl trat aus einem kürzeren Spalt aus als früher. Seine Abmessungen waren:

1 mm Länge,
1 mm Tiefe,
0,1 mm Breite.

Es gelang, mit diesem Spalt die Drucke im Beobachtungsraum noch weiter herabzusetzen.

In dem Beobachtungsraum konnte jedoch auch der Druck wieder erhöht werden, indem entweder Gas zuströmte oder, wenn im Entladungsraume und Beobachtungsraume gleiches Gas benutzt wurde, indem einige Diffusionspumpen außer Betrieb gesetzt wurden.

Es wurden nun auf dieselbe photographische Platte mit dem früher benutzten Quarzspektrographen zwei Aufnahmen nacheinander gemacht, die erste mit niedrigem, die nächste mit höherem Druck. Fig. 1 zeigt die Schwärzungskurven für zwei solche Aufnahmen mit Wasserstoffkanalstrahlen in Wasserstoff, von denen die eine bei einem Druck im Beobachtungsraum von 0,0002 mm Hg, die andere bei solchen von 0,002 mm Hg aufgenommen wurde. Man sieht, daß die Schwärzungs-

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 60. S. 597. 1919.

kurven vollständig zusammenfallen. Fig. 2 zeigt die beiden Aufnahmen bei größerer Druckdifferenz, nämlich einmal wieder 0,0002, das andere Mal 0,0046.

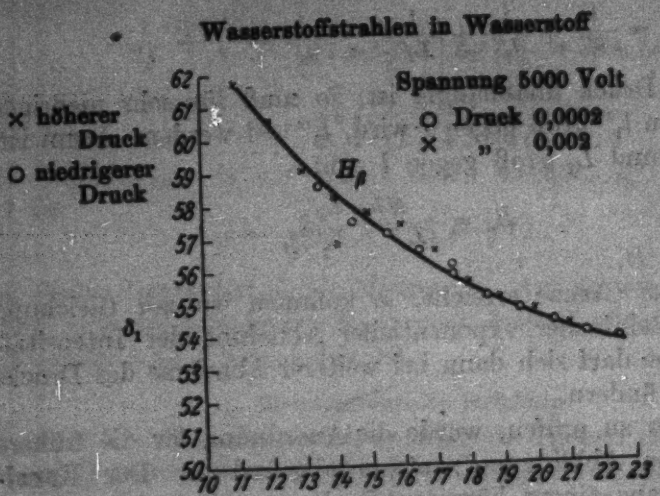


Fig. 1.

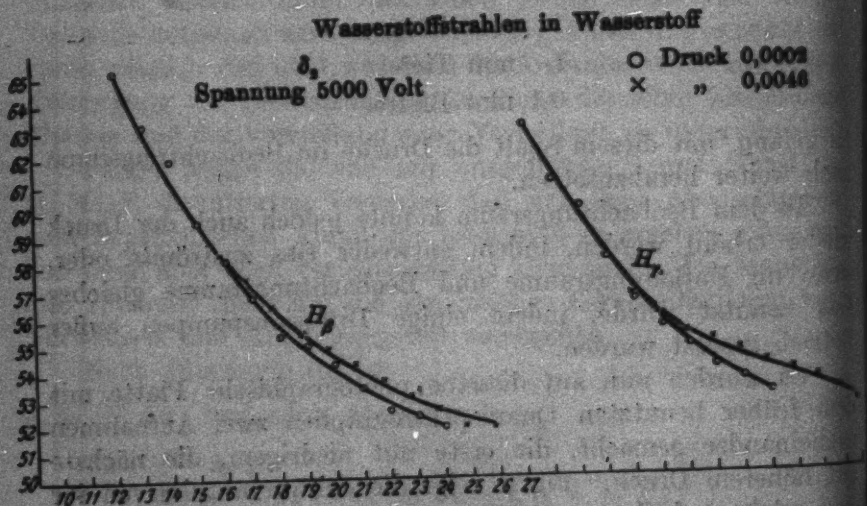


Fig. 2.

Hier ist bereits ein kleiner Unterschied bemerkbar. Wir sind also hier an der Grenze, wo l_1'' nicht mehr sehr groß gegen l ist. Fig. 3 zeigt Kurven von Aufnahmen, bei denen im Beobachtungsraum Stickstoff eingelassen war vom Druck 0,0015.

Man sieht auch hier keinen Unterschied gegenüber dem niedrigen Wasserstoffdruck 0,0002.

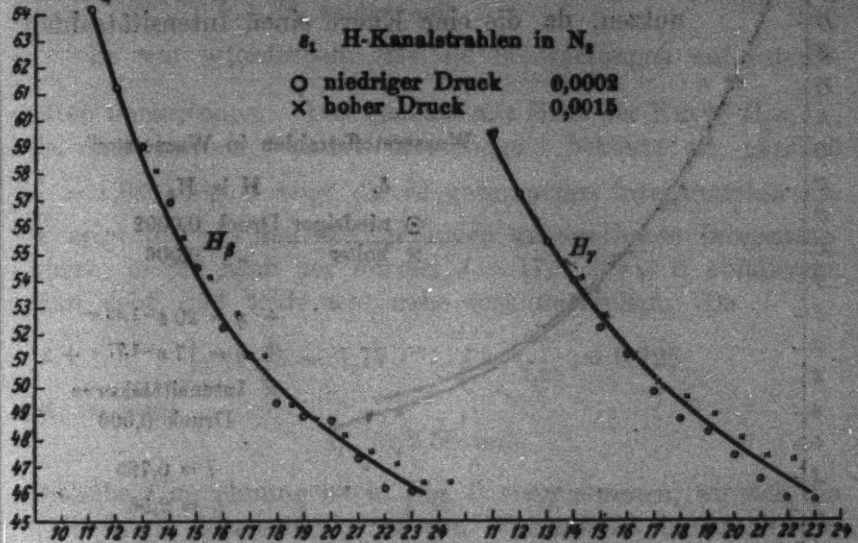


Fig. 3.

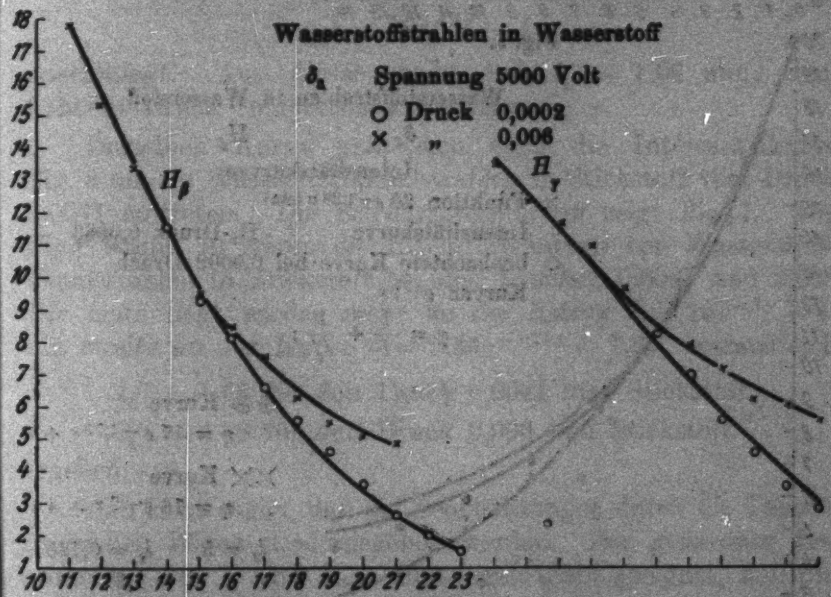


Fig. 4.

Bei den Kurven Fig. 4 (Wasserstoffstrahlen in Wasserstoff), bei denen der höhere Druck 0,006 war, ist der Unterschied

schon deutlicher. Man kann die größeren Abweichungen zur näheren Bestimmung von l_1'' benutzen, da die eine Kurve einen Intensitätsabfall

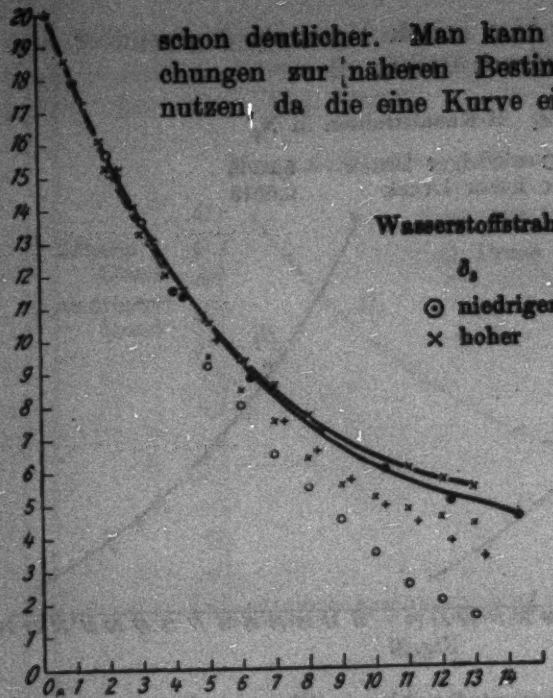


Fig. 5.

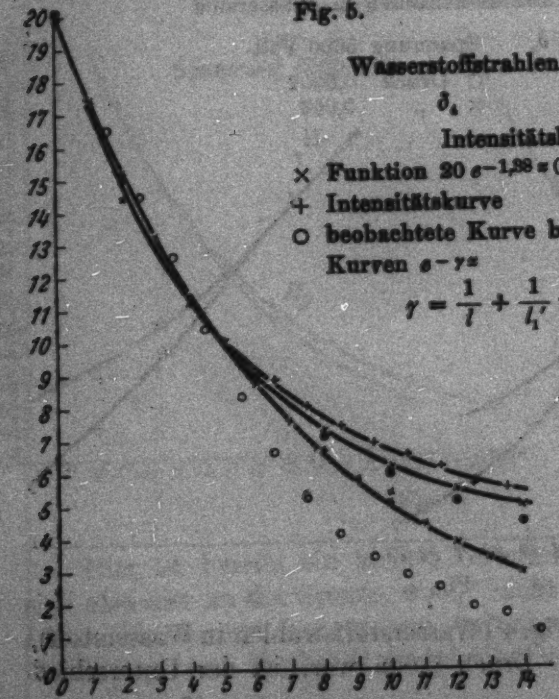


Fig. 6.

nach der Formel $B_1 e^{-\frac{x}{l}}$, die andere nach der Formel $B_1 e^{-x\left(\frac{1}{l_1''}+\frac{1}{l}\right)} + B_0$ zeigen soll.

Es war erforderlich, erst die Schwärzungen auf Intensitäten umzurechnen. Das geschah mit Hilfe der Kurve $B_1 e^{-\frac{x}{l}}$, da nach meinen früheren Messungen l bekannt ist, nämlich $\frac{1}{l} = 1{,}88$. Fig. 5 zeigt die so gewonnenen Intensitätskurven. × zeigt die aus den Schwärzungen umgerechnete Intensitätskurve, ⊕ die nach der Formel $J = 17e^{-1{,}77x} + 3$ abfallende. Man sieht, daß beide sehr nahe zusammenfallen. Da

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l_1''} = 1{,}77, \qquad l = \frac{1}{1{,}88} = 0{,}725$$

ist, so folgt

$$l_1'' = 2{,}58 \text{ mm}.$$

Dieselbe Umrechnung ist in Fig. 6 vorgenommen, wo sich die beobachtete Intensitätskurve von Wasserstoffkanalstrahlen in Wasserstoffdruck von 0,0088 mm Hg besser der Kurve

$$J = 16e^{-2x} + 4$$

anschmiegt. Aus dieser ergibt sich $l_1'' = 1{,}66$ mm, dem höheren Druck entsprechend niedriger.

Derselben Kurve paßt sich auch die Intensitätskurve Fig. 8 an, wo Wasserstoffkanalstrahlen in Stickstoff vom Druck 0,0041 eintreten. Die Schwärzungskurven zeigt Fig. 7. Die Figg. 9 und 10 zeigen die Intensitätskurven von Wasserstoffkanalstrahlen in Stickstoff bei den Drucken 0,0041 und 0,003 Die erste liegt wieder mehr an der Kurve $J = 16e^{-2x} + 4$, die zweite an der Kurve $J = 9{,}35e^{-1{,}77x} + 1{,}65$, woraus sich

$l_1'' = 1{,}66$ für den Druck 0,0041 mm Stickstoff,
$l_1'' = 2{,}58$ für den Druck 0,003 mm Stickstoff

ergeben.

Man kann sagen, daß die Beobachtungen durch die Theorie in großen Zügen wiedergegeben werden. Zur genaueren Bestimmung von l_1 sind diese Messungen nicht geeignet, weil die Größe aus der Beziehung

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l_1} = \frac{1}{l_0}$$

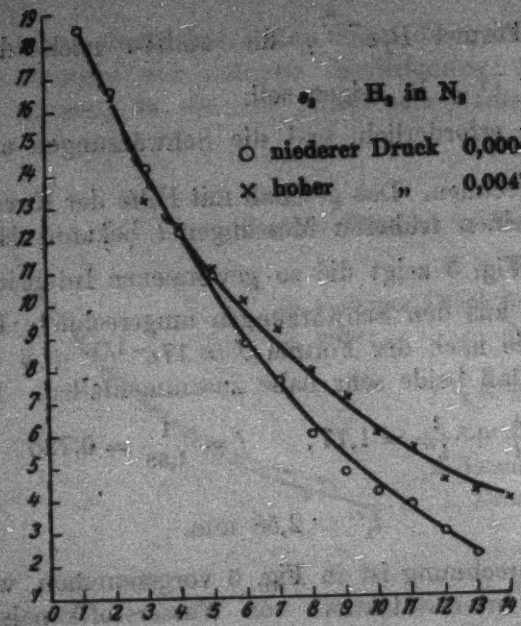

s_3 H_3 in N_3
○ niederer Druck 0,0004
× hoher „ 0,0047

Fig. 7.

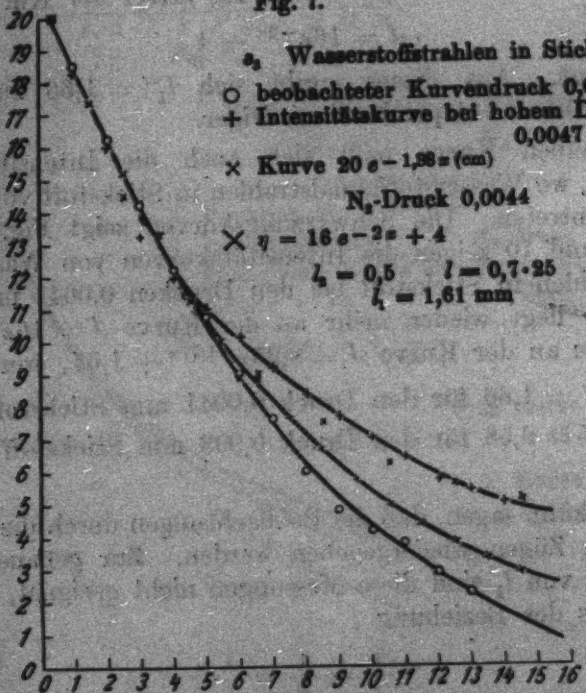

s_3 Wasserstoffstrahlen in Stickstoff
○ beobachteter Kurvendruck 0,0008
+ Intensitätskurve bei hohem Druck 0,0047
× Kurve $20\,e^{-1{,}38\,s}$ (cm)
N_2-Druck 0,0044
$\eta = 16\,e^{-2s} + 4$
$l_2 = 0{,}5$ $l = 0{,}7 \cdot 25$
$l_1 = 1{,}61$ mm

Fig. 8.

gewonnen wird und l kleiner ist als l_1 bei den beobachteten Drucken, also in der Gleichung überwiegt.

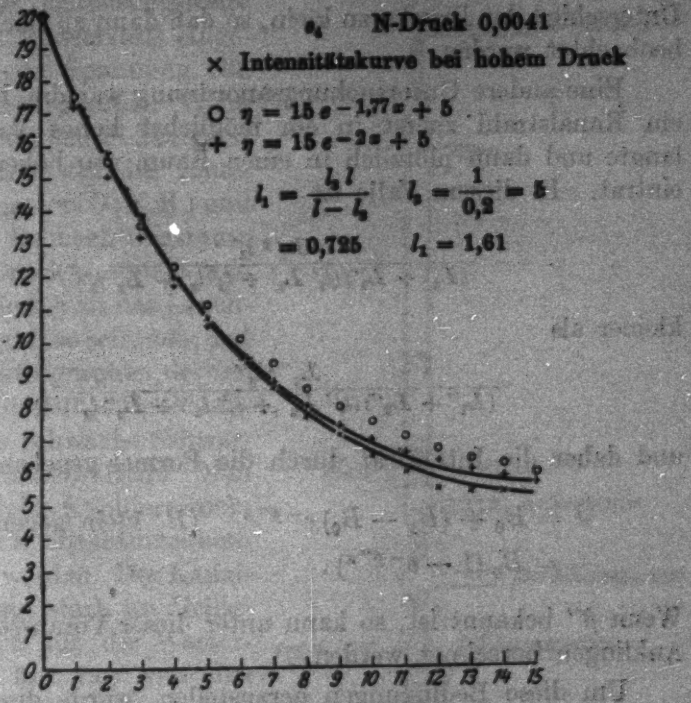


Fig. 9.

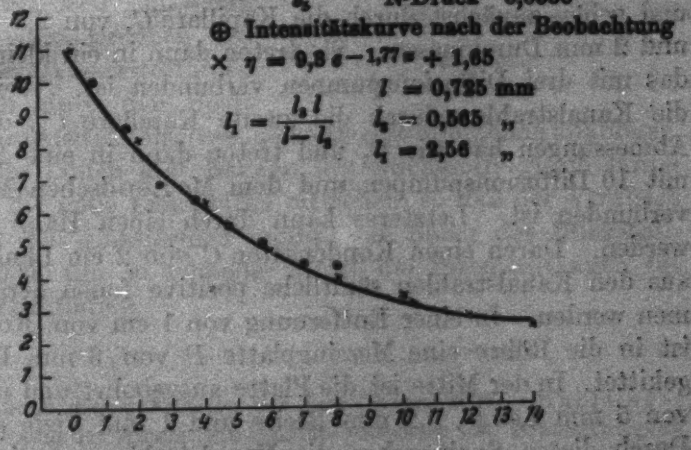


Fig. 10.

Für höhere Drucke ließ sich diese Methode nicht anwenden, weil bei Stickstoff von höherem Druck dieses Gas in den Entladungsraum eindringt. Bei höheren Drucken wird auch der Unterschied der Drucke zu klein, so daß dann zu flache Kurven beobachtet werden.

Eine andere Untersuchungsanordnung war die, bei welcher ein Kanalstrahl zuerst in ein möglichst hohes Vakuum gelangte und dann plötzlich in einen Raum von höherem Druck eintrat. In diesem Falle ist

$$\frac{L_1'^2 l_2'}{(L_1' + L_2')(l_1' L_1' + l_1' l_2' + L_2' l_2')}$$

kleiner als

$$\frac{L_1''^2 l_2''}{(L_1'' + L_2'')(l_1'' L_2''_1 + l_1'' l_2'' + L_2'' l_2'')}$$

und daher die Intensität durch die Formel gegeben

$$J = B_0 + (B_1 - B_0) e^{-\beta'' x} \quad (B_1 \text{ klein gegen } B_0)$$
$$= B_0 (1 - e^{-\beta'' x}).$$

Wenn β'' bekannt ist, so kann unter dieser Voraussetzung das Anklingen berechnet werden.

Um diese Bedingungen herzustellen, wurde die Versuchsanordnung Fig. 11 getroffen.

Wasserstoffkanalstrahlen treten aus der Kathode K aus und gehen zunächst durch die Kapillare C, von 2,5 cm Länge und 2 mm Durchmesser. Sie treten dann in ein kleines Gefäß, das mit drei Diffusionspumpen verbunden ist. Weiter gehen die Kanalstrahlen durch die zweite Kapillare C_2, die gleiche Abmessungen hat wie C_1 und treten dann in eine Röhre, die mit 10 Diffusionspumpen und dem McLeodschen Manometer verbunden ist. Letzteres kann durch einen Hahn abgestellt werden. Durch einen Kondensator C von 2 cm Länge können aus den Kanalstrahlen sämtliche positive Ionen herausgenommen werden. In einer Entfernung von 1 cm vom Kondensator ist in die Röhre eine Messingplatte P von 3 mm Dicke eingekittet. In der Mitte ist die Platte ausgebohrt und ein Spalt S von 5 mm Länge, 0,2 mm Breite und 1 mm Tiefe eingesetzt. Durch diesen Spalt gehen die Kanalstrahlen nun in den Be-

obachtungsraum *B.R.*, der ebenfalls mit dem McLeodschen Manometer verbunden werden kann.[1])

In die Entladungsröhre wurde nun Wasserstoff eingeleitet und eine Spannung von 10000 Volt hergestellt. Wenn dann alle Pumpen in Tätigkeit sind, so stellt sich im Raum des Kondensators *C* (K.R.) und ebenso im Beobachtungsraum (B.R.) ein Druck von 0,0006 mm Hg her. Hierbei ist das Leuchten des Strahls so schwach, daß in dem Spektrographen, der den Strahl an Stelle des Spalts abbildet, eine schwache Schwärzung der Platte auftritt. Nun kann durch eine Kapillare Stickstoff in den Beobachtungsraum eingeleitet werden. Der Kanalstrahl nimmt stark an Helligkeit zu, die für die Wasserstofflinien fast nur von den bewegten Teilchen ausgesandt wird.

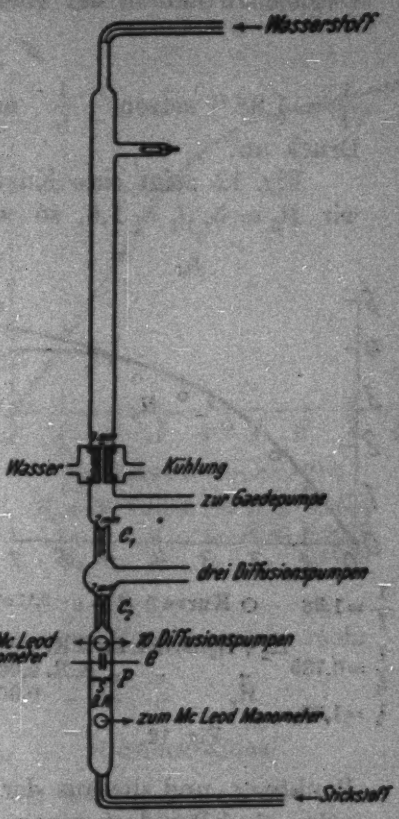


Fig. 11.

Es zeigt sich nun, daß bei niedrigeren Drucken des Stickstoffs die Wasserstofflinien nicht gleich hinter dem Spalt mit voller Intensität einsetzen, sondern erst allmählich anklingen, während die Linien und Banden des Stickstoffs gleich hinter dem Spalt die volle Lichtstärke erreichen, so daß der Vergleich mit diesen den Unterschied ergibt. Je höher der Stickstoffdruck wächst, um so schneller steigt die Intensität auch für die Wasserstofflinien.

---

1) Auch bei diesen Arbeiten hat Herr Oberwerkführer Knöllinger durch Ausführung der schwierigen Glasbläserarbeiten und Beaufsichtigung der langen Belichtungen wesentliche Beihilfe geleistet.

Wir können nun diesen Anstieg mit der Formel

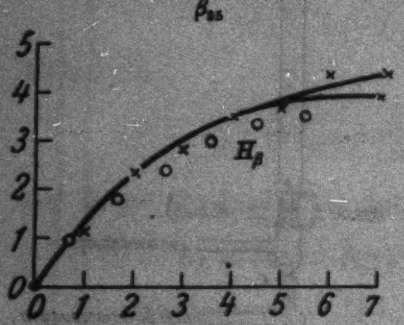
$$J = B_0 (1 - e^{-\beta'' x})$$

vergleichen und in der Gleichung

$$\beta'' = \frac{1}{l} + \frac{1}{l_1}$$

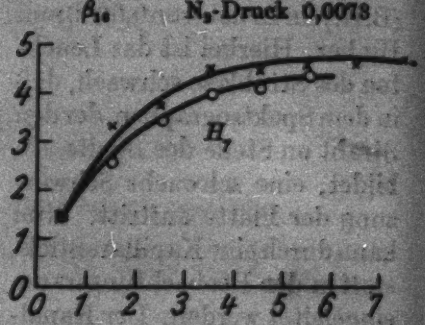
$\frac{1}{l} = 1{,}88$ [1]) setzen. $\frac{1}{l_1}$ nehmen wir proportional mit dem Druck an.

Fig. 12 zeigt eine Kurve mit dem Druck 0,0041. Setzen wir $B_0 = 5$, $l_1 = 1{,}6$, so wird $\beta'' = 2{,}11$. Die beobachteten



$\frac{1}{l} = 1{,}88$ ○ Kurve 5 $(1 - e^{-2{,}11x})$
$H_2 + N_2$-Druck im B.R. 0,0047
$\frac{1}{l_1} = 0{,}785$ „ „ „ K.R. 0,0010
H_2 „ „ „ 0,0006
$l_1 = 1{,}87$

Fig. 12.



$\frac{1}{l_1} = 1{,}15$ ○ Kurve 5 $(1 - e^{-2{,}53x})$
$H_2 + N_2$-Druck im B.R. 0,0074
$\frac{1}{l} = 1{,}38$ „ „ „ K.R. 0,001
H_2 „ „ „ 0,000
$l_1 = 0{,}865$

Fig. 13.

Punkte × und die aus der Gleichung (5) $(1 - e^{-2{,}11x})$ berechneten ○ fallen fast genau zusammen. Gehen wir von diesem Wert von l_1 aus, so wäre für den Druck 0,0074 (Fig. 13) $\frac{1}{l_1} = 1{,}15$. Die Kurve für H_γ fällt etwas unter den beobachteten Wert, würde also einen etwas größeren Wert von $\frac{1}{l_1}$ verlangen. In Fig. 14 erhalten wir für einen Druck von 0,0095 mm N_2 $\frac{1}{l_1} = 1{,}5$ und die Kurven für H_β und H_γ stimmen genau mit den berechneten überein, wenn $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = 1{,}38 + 1{,}5 = 2{,}9$ gesetzt wird. Fig. 15 für den Druck 0,0144 weicht wieder etwas ab, ebenso

1) Da bei diesen Versuchen höhere Spannungen verwendet wurden, ist das von der Geschwindigkeit abhängige l eigentlich etwas größer einzusetzen. Der Unterschied erwies sich indessen als gering.

Fig. 16 (Druck 0,028), während Fig. 17 (Druck 0,029) wieder gut übereinstimmt. Fig. 18 (Druck 0,046) verlangt wieder etwas größeres $\frac{1}{l_1}$, obwohl bei diesen hohen Drucken der Anstieg der

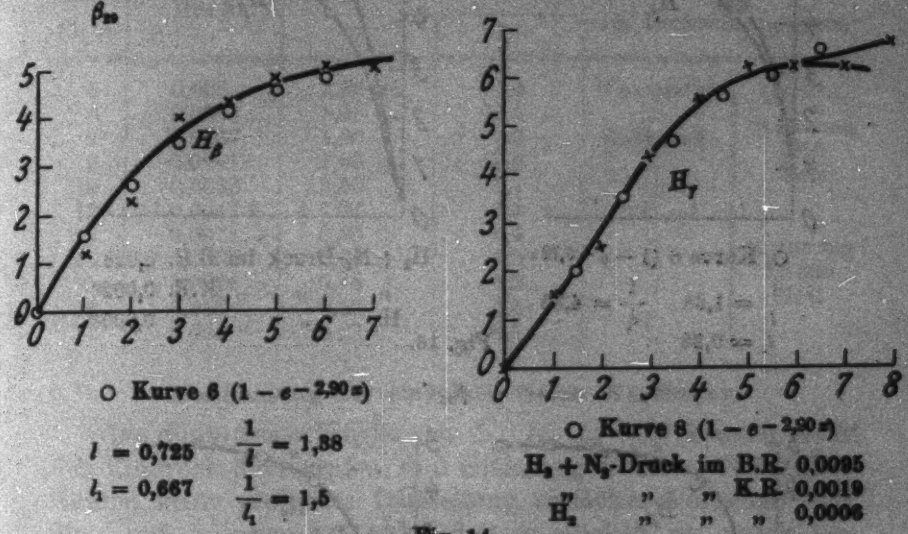


Fig. 14.

Intensität so steil ist, daß eine genauere Messung nicht mehr möglich ist.

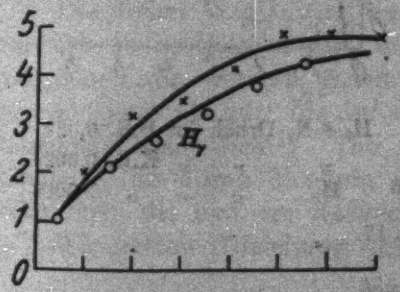
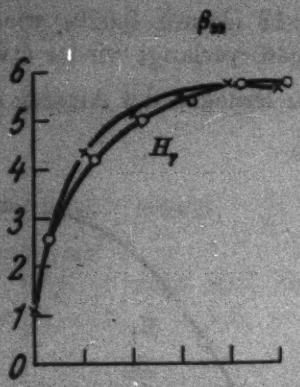
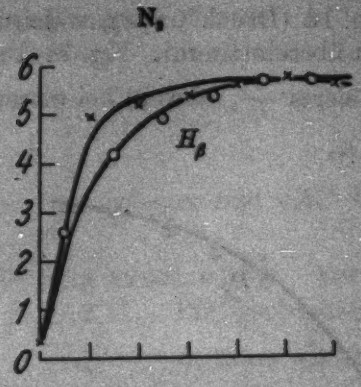


Fig. 15.

Die Werte von l_1 stimmen mit den früheren (S. 21) recht gut überein.

Wenn es auch in der Natur der Sache liegt, daß genaue Messungen unter den gegebenen Verhältnissen nicht möglich waren, so muß man doch sagen, daß die Theorie die tatsächlichen Vorgänge jedenfalls in erster Näherung richtig wiedergibt.





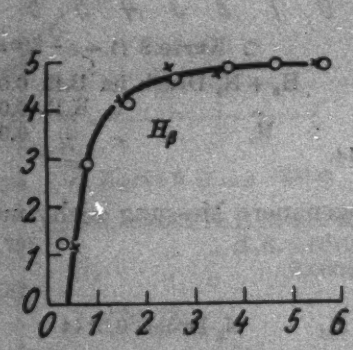
○ Kurve 6 $(1 - e^{-5{,}78x})$

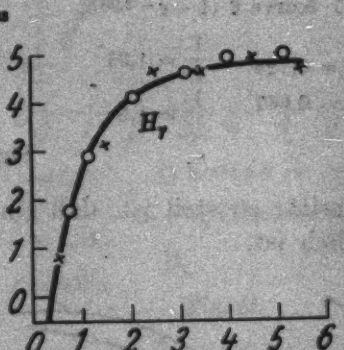
$\frac{1}{l} = 1{,}38 \quad \frac{1}{l_1} = 4{,}35$

$l_1 = 0{,}28$

$H_2 + N_2$-Druck im B.R. 0,028
" " " K.R. 0,0028
H_2 " " " 0,0006

Fig. 16.



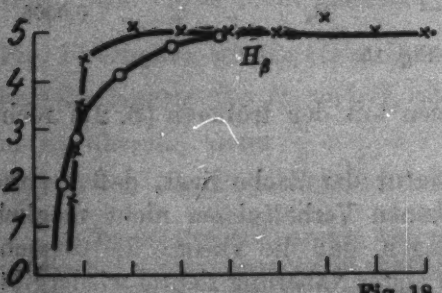


× Beobachtete Kurve
○ Kurve 6 $(1 - e^{-5{,}78x})$

$l_1 = 0{,}28 \quad \frac{1}{l} = 1{,}38 \quad \frac{1}{l_1} = 4{,}35$

$H_2 + N_2$-Druck im B.R. 0,029
" " " K.R. 0,0028
H_2 " " " 0,0006

Fig. 17.



β_{12}

○ Kurve 5 $(1 - e^{-8{,}6x})$

$\frac{1}{l} = 1{,}38 \quad \frac{1}{l_1} = 7{,}2$

$H_2 + N_2$-Druck im B.R. 0,046
" " " K.R. 0,0021
H_2 " " " 0,0007
(unsicher)

Fig. 18.

Die folgende Tabelle gibt die aus den Kurven gewonnenen Werte von l_1, l_1^0 ist der Wert für den Druck 1/1000 mm Hg.

Kurve Figur	Druck	Wasserstoffstrahlen		Gas im Beobachtungsraum	
		l_1	l_1^0		
5	0,006	2,56 cm	15,4	Wasserstoff	
6	0,0083	1,66 „	13,4	„	Spannung 5000 Volt
7	0,0047	1,66 „	7,6	Stickstoff	
9	0,0041	1,66 „	6,6	„	
10	0,0030	2,56 „	7,7	„	
12	0,0047	1,37 „	6,4	„	
13	0,0074	0,86 „	6,4	„	Spannung 10 000 Volt
14	0,0095	0,66 „	6,3	„	
15	0,0144	0,44 „	6,3	„	
16	0,028	0,23 „	6,4	„	
17	0,029	0,23 „	6,7	„	

Bestimmung der einzelnen freien Weglängen.

Die fünf freien Weglängen L_1, L_2, l_2, l_1, l können leicht den Eindruck hervorrufen, daß Gleichungen mit so vielen Konstanten keine geeignete Darstellung einfacher Vorgänge sind. Man muß indessen beachten, daß es möglich ist, durch verschiedene Versuchsanordnungen die einzelnen Weglängen so voneinander zu trennen, daß die einzelnen unabhängig von den andern bestimmt werden können.

Die freien Weglängen der Umladungen L_1 und L_2 sind für sich zu bestimmen und werden durch Versuche gemessen, bei denen die übrigen freien Weglängen nicht vorkommen. Sie sind jetzt als gut, bis auf den Fehler von wenigen Prozent, bestimmt anzusehen.[1]) Die Bestimmung der freien Weglängen l_2 ist durch Messung der absoluten Lichtemission zu erhalten[2]), die man im stationären Zustand erhält.

Wir hatten (Gleichung 6a) im stationärem Zustande

$$J_0 = \frac{N h \nu L_2^2 l_2}{(L_1 + L_2)(L_2 + l_2) l_1 l} .$$

Wenn wir J_0 bei niedrigen Drucken messen, so wird $l_2 = l$ und klein gegen L_2, so daß wir dann 6b haben

$$J_0 = \frac{N h \nu L_2}{(L_1 + L_2) l_1} .$$

1) Vgl. E. Rüchardt, Münchener Habilitationsschrift. 1922.
2) Vgl. S. 9.

Da L_1 und L_2 als bekannt anzusehen sind, so kann durch Messung von J_0 unmittelbar l_2 bestimmt werden. Es fällt dann auch, wie aus (9a) und (9b) hervorgeht, der Unterschied zwischen Verweilzeit und Abklingung fort.

Meine früheren Messungen sind nicht bei genügend niedrigem Druck angestellt und bedürfen daher einer Wiederholung.

Die Größe l ist durch meine Abklingungsversuche bestimmt, wenn man sich auf den Standpunkt der Verweilzeit stellt. Sonst ist an ihrer Stelle λ einzuführen, möglicherweise λ und l, was erst durch genaue Messungen der Abweichungen von der Intensitätsabnahme nach dem Exponentialgesetz entschieden werden kann oder durch Beobachtung des Maximums des ausgestrahlten Lichts bei einem bestimmten Druck (vgl. S. 16).

Für l_1 haben wir oben eine Schätzung gewonnen. Rüchardt hat l_1 aus Beobachtungen von Vegard der Abhängigkeit des Leuchtens vom Druck zu bestimmen gesucht. Die Größenordnung stimmt überein, doch kann auf diese Weise der Wert von l_1 noch nicht genau gemessen werden.

Am genauesten läßt sich l_1 durch Bestimmung der Intensität bei hohen Drucken erreichen. Wir hatten in den Gleichungen (9a) und (9b) für kleine l_1

$$J_0 = \frac{N h\nu L_2^2 l_1}{(L_1 + L_2) l_2 l (L_2 + l)} \qquad \text{(Verweilzeit)} \tag{9c}$$

oder

$$J_0 = \frac{N h\nu L_2 l_1}{(L_1 + L_2) l_2 \lambda} \qquad \text{(Abklingung)}. \tag{9d}$$

Hieraus ergibt eine Messung von J_0, wenn L_1, L_2, l_2, l oder λ bekannt sind, den Wert von l_1.

12. Bestimmung von l_1^0 aus den Beobachtungen von Vegard.

Es liegen bereits einige, wenn auch nur in engen Grenzen liegende, Messungen vor, aus denen l_1^0 sich bestimmn läßt. Von Vegard sind Intensitätsmessungen des von Wasserstoffkanalstrahlen ausgesandten Lichts bei verschiedenen Drucken ausgeführt.[1]) Vegard findet für das Verhältnis der Lichtintensitäten bei den Drucken 0,1 und 0,085 mm Hg bei einer Spannung von 8500 Volt die Zahl 1,55.

1) L. Vegard, Ann. d. Phys. 39. S. 154. 1912.

Wir setzen in (9a)

$$l_1 = \frac{l_1^0}{p}, \quad L_1 = \frac{L_1^0}{p}, \quad L_2 = \frac{L_2^0}{p}, \quad l_2 = \frac{l_2^0}{p},$$

wo die mit dem Index $_0$ versehenen Größen vom Druck unabhängig sein sollen und bilden das Verhältnis für $p' = 0{,}1$, $p'' = 0{,}035$

$$1{,}55 = \frac{J_0'}{J_0''} = \frac{L_2^0\left(\frac{l_1^0}{p''} + l\right) + l_1^0 l}{L_2^0\left(\frac{l_1^0}{p'} + l\right) + l_1^0 l} \qquad (\lambda = 0, \text{ Annahme der Verweilzeit}).$$

Setzen wir $l = 1{,}17$, $L_2^0 = 0{,}3$ für 1 mm Druck, so erhalten wir für l_1^0 den Wert 0,057, bezogen auf 1 mm Hg und 57 bezogen auf $^1/_{1000}$ mm Hg.

Gehen wir von der Gleichung (9b) aus, so ist

$$1{,}55 = \frac{J_0'}{J_0''} = \frac{\frac{l_1^0}{p''} + \lambda}{\frac{l_1^0}{p'} + \lambda} \qquad (l = 0, \text{ Annahme der Abklingung}).$$

Hieraus ergibt sich

$l_1^0 = 0{,}049$, bezogen auf 1 mm Hg,

$= 49$, bezogen auf $^1/_{1000}$ mm Hg.

Diese Werte sind erheblich größer als die oben gefundenen. Das vorhandene Beobachtungsmaterial reicht indessen bei weitem nicht aus um weitere Betrachtungen hieran zu knüpfen.

München, 2. September 1922.

(Eingegangen 2. September 1922.)

2. *Über die Deutung verwickelter Spektren (Mangan, Chrom usw.) nach der Methode der inneren Quantenzahlen;*
von A. Sommerfeld.

In einer vorangehenden Arbeit[1]) wurde der Begriff der „inneren Quantenzahlen" eingeführt, in der Absicht, die in den Spektren der Alkalien und Erdalkalien auftretenden oder verbotenen Kombinationen der Mehrfachterme auf ein einfaches formales Schema zu bringen. Es soll in der gegenwärtigen Arbeit gezeigt werden, wie sich das früher entworfene Schema bei entsprechender Erweiterung an den viel komplizierteren Linienstrukturen bewährt, die am Ende des periodischen Systems vorkommen. Den Anstoß zu dieser Erweiterung erhielt ich, als ich eine Untersuchung des Spektrums von Mangan kennen lernte, die Herr Catalan[2]) im Laboratorium von A. Fowler ausgeführt hat. Es zeigte sich, daß die von Herrn Catalan analysierten neuartigen Liniengebilde sich vortrefflich in das Schema der „inneren Quantenzahlen" einfügen. Außer dem Bogen- und Funkenspektrum von Mangan kommt für das Folgende wesentlich auch das von Herrn Catalan betrachtete, aber nur auszugsweise mitgeteilte Spektrum von Chrom in Betracht. Ich benutze zugleich die Gelegenheit, um meine zuerst genannte Arbeit in solchen Punkten zu ergänzen und zu berichtigen, über die in der Zwischenzeit neue Aufschlüsse bekannt geworden sind.

§ 1. Ursprung und bisherige Verwendung der inneren Quantenzahlen.

Um die einzelne Spektrallinie serientheoretisch zu kennzeichnen, haben wir *drei Quantenzahlen* nötig: 1. das „azimutale Quantum", 2. die „Hauptquantenzahl" oder „Quantensumme"

1) Ann. d. Phys. 63. S. 221. 1920. Vgl. auch „Atombau und Spektrallinien", 3. Aufl. Braunschweig 1922, VI. Kap., § 5.

2) Die Arbeit erscheint in englischer Sprache in den Phil. Transactions of the R. Soc. London, und wurde mir vom Verfasser freundlichst im Manuskript zur Verfügung gestellt.

und 3. die „innere Quantenzahl". Wir wollen sie hier nach dem Vorgange von Bohr mit k, n und j bezeichnen (meine ursprüngliche Bezeichnung, die auch in meinem oben genannten Buche festgehalten ist, war bez. n, $n + n'$ und n_i; n' heißt „radiale Quantenzahl".) Während durch die *azimutale Quantenzahl* k die Zugehörigkeit der betrachteten Linie zu einer der bekannten Serientypen (Hauptserie, scharfe oder diffuse Nebenserie usw.) und durch die *Hauptquantenzahl* n die Stellung der Linie innerhalb der Serie festgelegt wird[1]), unterscheidet *die innere Quantenzahl* j die verschiedenen Teilniveaus, in die der einzelne Serienterm zerfällt. Für den Übergang der inneren Quantenzahl von ihrem Anfangs- zu ihrem Endwerte soll dabei die *Auswahlregel* gelten

$$\text{(I)} \qquad j \to \begin{cases} j-1 \\ j \\ j+1 \end{cases},$$

im Gegensatz zur azimutalen Quantenzahl, für welche die Auswahlregel lautet:

$$\text{(II)} \qquad k \to k \mp 1.$$

Der Zahlenwert der inneren Quantenzahl wird für die Dublett- und Tripletterme der Alkalien und alkalischen Erden so festgesetzt, daß er jedesmal im obersten Niveau der Termmultiplizität mit dem Zahlenwert der azimutalen Quantenzahl k übereinstimmt[2]) und daß er von da aus in jedem folgenden Niveau um Eins abnimmt.

Wir stellen hier das Triplettsystem der alkalischen Erden einmal durch das früher benutzte Niveauschema (die Zahlen links von der Fig. 1 bedeuten die jedem Term beizulegende Quantenzahl j; die Figur ist meiner früheren Arbeit von 1920 entnommen), das andere Mal durch ein abgekürztes Zahlenschema

---

1) Bohr muß seine Hauptquantenzahl n in jeder Serie der Beschränkung unterwerfen $n \geq k$; in meiner ursprünglichen Bezeichnungsweise lautet dieselbe Beschränkung etwas einfacher: $n' \geq 0$.

2) Diese Übereinstimmung ist durchaus nicht allgemein verbindlich. Schon bei den Einfachtermen der Erdalkalien (vgl. diesen § unter b) ist j nicht gleich k, sondern gleich $k - 1$; bei den verwickelten Spektren (vgl. § 7 und 9, Schema H, I und L) ist der Maximalwert von j innerhalb jedes Termes im allgemeinen größer als k, nämlich immer dann, wenn (vgl. § 8) ein Eigenimpuls $j_0 > 1$ vorhanden ist.

dar. Bei den alkalischen Erden gilt (ebenso wie bei den Alkalien) die „Permanenz[1]) der Multiplizitäten"; die Anzahl der d- und b-Terme ist ebensogroß wie die der p-Terme, nur der s-Term

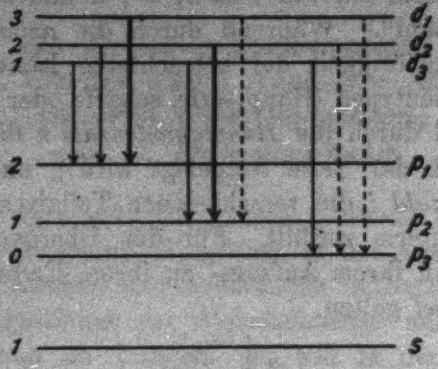
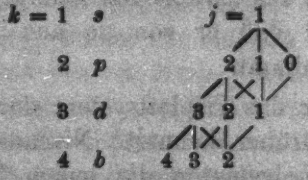


Fig. 1.

ist stets einfach. Das Schema zeigt die Werte der inneren Quantenzahlen, die nach dem soeben Gesagten den verschiedenen Niveaus s; p_1, p_2, p_3; d_1, d_2, d_3; b_1, b_2, b_3 beizulegen sind, und deutet diejenigen Übergänge durch Verbindungslinien an, die nach unserer Auswahlregel erlaubt sind.

Schema A.



Man sieht: Während in den Kombinationen ($s\,p$) der Hauptserie und scharfen Nebenserie alle drei hier möglichen Übergänge realisiert werden und das bekannte einfache Triplett ergeben, sind in den Kombinationen ($p\,d$) der diffusen Nebenserie (und ebenso in den Kombinationen ($d\,b$) der Bergmannserie) von den neun möglichen Übergängen nur sechs erlaubt; drei Übergänge, in denen j um mehr als eine Einheit springen würde, sind nach der Auswahlregel (I) verboten; z. B. in der Kombination

1) Wie dieses Gesetz allgemein zu fassen ist, werden wir in § 8 sehen.

(p d) die Übergänge 1—3, 0—2, 0—3. Die erlaubten sechs Übergänge ordnen sich in Gruppen zu $3 + 2 + 1$ Linien und ergeben so die bekannte *Struktur der zusammengesetzten Tripletts.*

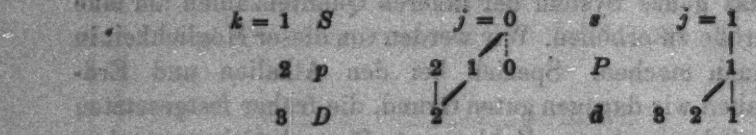
Wie schon früher (a. a. O., S. 232) hervorgehoben, ist unsere Verfügung über die Absolutwerte der inneren Quantenzahlen nicht ohne Willkür. Worauf es bei der Erklärung der Termkombinationen ankommt, sind die relativen Werte, die Differenzen der inneren Quantenzahlen. Nur diese sind daher durch die spektroskopischen Tatsachen gewährleistet. Es wäre an sich möglich, das ganze System der inneren Quantenzahlen um eine additive Größe zu erhöhen. Wir werden von dieser Möglichkeit in § 7 Gebrauch machen. Speziell bei den Alkalien und Erdalkalien haben wir dagegen guten Grund, die früher festgesetzten und hier wiedergegebenen Zahlenwerte für endgültig anzusehen (vgl. unter b).

In der Folgezeit ist die hier skizzierte Methode nach verschiedenen Richtungen vertieft und erweitert worden.

a) Was den *physikalischen Sinn* der inneren Quantenzahlen betrifft, so war ihre ursprüngliche Einführung eine empirisch-formale. Dementsprechend konnte auch die Auswahlregel (I) nur als empirische Forderung aufgestellt werden. Inzwischen hat sich aber, teils in den Untersuchungen von Landé (s. u.), teils in dem magnetooptischen Modell von Heisenberg gezeigt, daß die innere Quantenzahl, multipliziert mit $h/2\pi$ das *gesamte Impulsmoment des Atoms in dem betreffenden Anregungszustand* bedeutet (oder jedenfalls enge mit diesem zusammenhängt). Es ist daher nunmehr auch möglich, der Regel (I) eine theoretische Bedeutung unterzulegen; diese ergibt sich aus den Betrachtungen von Rubinowicz: das gesamte Impulsmoment des Atoms kann bei strahlungsfähigen Übergängen nur um $\pm h/2\pi$ oder Null springen. Jene Betrachtungen sind also geeignet, die Auswahlregel (I) für die innere Quantenzahl, nicht aber diejenige (II) für die azimutale zu erklären. Nur im Falle des Wasserstoffatoms, bei dem $j = k$ ist, können sie auch zur Veranschaulichung der Regel (II) herangezogen werden. Im allgemeinen dagegen scheint zur Erklärung der Auswahlregel (II) nur das Bohrsche Korrespondenzprinzip zu dienen. Die Darstellung meines Buches (3. Aufl. Kap. 5, § 2 und 3), die sich allerdings in erster Linie auf das H-Atom bezieht, ist daraufhin zu berichtigen.

b) Sodann hat Landé[1]) den mit den Triplettermen gemeinsam auftretenden *Einfachtermen* S, P, D der Erdalkalien innere Quantenzahlen beigelegt, indem er für diese allgemein setzt $j = k - 1$. Z. B. ist für den S-Term, wie seine Bezeichnung andeutet, $k = 1$; daher gilt für ihn nach Landé $j = 0$; für den p-Term ist $k = 2$ und daher $j = 1$ usw. Man erhält somit die folgenden *Schemata für die „Interkombinationslinien" zwischen Einfach- und Triplettermen:*

Schema B



Der Übergang $0 - 2$ ist sowohl in der Kombination $(s\,p)$ wie $(p\,D)$ durch unsere allgemeine Auswahlregel verboten; der Übergang $0 - 0$ wird durch eine besondere [auch in der Gruppe $(p\,p')$, siehe unter d), sich bewährende] *Zusatzregel* verboten. Die Kombination $(s\,p)$ reduziert sich daher auf *eine* Linie, die berühmte Resonanzlinie $(s\,p_2)$, $\lambda = 2536$ bei Quecksilber. Die Kombination $(p\,D)$ besteht aus zwei Linien; das Entsprechende gilt von der Kombination $(d\,P)$.

Am Ende seiner wichtigen Arbeit über das Spektrum des Bariums, in der — entsprechend der „Permanenz der Multiplizitäten" — die Dreifachheit des Bergmanntermes einwandfrei bewiesen wird, bemerkt F. A. Saunders[2]), daß er die Interkombinationslinien $(d_2\,P)$ und auch Anzeichen von $(d_3\,P)$, aber keine Kombinationen $(d_1\,P)$ gefunden habe, die er zusammen mit jenen erwarten zu müssen glaubt. Nach unserem Schema B dürfen in der Tat keine Linien $(d_1\,P)$ auftreten. Auch der Befund, daß die Linien $(d_3\,P)$ schwach gegen $(d_2\,P)$ sind, ist (vgl. die nachstehende Intensitätsregel unter c) mit unserem Schema in bestem Einklang.

Das Landésche Zusatzverbot $0 \not\to 0$ ist für uns deshalb von besonderer Bedeutung, weil es eine Handhabe bietet, um die absoluten Werte der Quantenzahlen zu normieren. Wenn in einer Linienstruktur eine Komponente, die nach unserer

1) A. Landé, Phys. Zeitschr. 22. S. 417. 1921.
2) F. A. Saunders, Astrophys. Journ. 51. S. 36. 1920.

allgemeinen Auswahlregel (I) möglich wäre, in Wirklichkeit nicht auftritt, werden wir ihr sowohl im Anfangs- wie im Endterm die innere Quantenzahl $j = 0$ beizulegen haben. Im Falle der Erdalkalien bestätigt daher das Nichtauftreten der Komponente Sp_2 den Wert $j = 0$ sowohl für den Tripletterm p_2 wie für den Einfachterm S. Von da aus können wir mit Hilfe unserer allgemeinen Auswahlregel (I) schließen, daß auch die übrigen Absolutwerte der inneren Quantenzahlen sowohl bei den Triplett- wie bei den Einfachtermen endgültig richtig gewählt sind.

Im Sinne des Korrespondenzprinzipes bedeutet, wie an anderer Stelle ausgeführt werden soll, das Landésche Zusatzverbot, daß bei einem Übergange 0—0 sowohl die Polarisationsrichtung wie die Amplitude undefiniert sind. Von da aus ist nach dem Korrespondenzprinzip die Schlußfolgerung unabweislich, daß derartige Übergänge zu verbieten sind.

c) Der Begriff der inneren Quantenzahlen gestattet aber nicht nur die Existenz oder Nichtexistenz der Linien, sondern auch deren Intensität zu beurteilen. Wie ich in meinem Buche (3. Aufl., S. 447 u. ff.) hervorgehoben habe, sind *diejenigen Linien die stärksten, bei denen sich j im gleichen Sinne ändert wie k; die Intensität wird um so schwächer, je mehr die Änderung Δj von der Änderung Δk abweicht.* Z. B. sind bei den zusammengesetzten Tripletts $(p\,d)$ die stärksten Linien oder „Hauptlinien" diejenigen, die zu den Übergängen $3 \to 2$, $2 \to 1$, $1 \to 0$ der inneren Quantenzahl gehören. Der Sprung Δj in der inneren Quantenzahl ist hier nämlich gleich -1, also gleichsinnig mit dem Übergange $(d \to p)$ $\Delta k = -1$ in der azimutalen Quantenzahl. Die übrigen Linien der zusammengesetzten Tripletts werden wegen ihrer geringeren Intensität als „Satelliten" bezeichnet; für diese ist $\Delta j = 0$ oder $\Delta j = +1$, also dem Sinne nach verschieden von $\Delta k = -1$. Von den beiden Linien $(p\,D)$ sowie den beiden Linien $(d\,P)$ (vgl. das oben über Barium Gesagte) ist erfahrungsgemäß der Übergang $2 \to 1$ in der inneren Quantenzahl der stärkere; in der Tat geht er parallel zu dem Übergange $3 \to 2$ in der azimutalen Quantenzahl. In den vorangehenden Schemata sind die Hauptlinien durch stärkere Verbindungslinien, die Satelliten durch schwächere angedeutet. Auch im Triplett $(s\,p)$ ist die Intensitätsabstufung im Einklang mit unserer all-

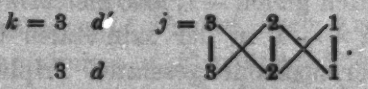
gemeinen Regel, wenn auch nicht so stark ausgeprägt wie in den Kombinationen $(p\,d)$, weshalb man hier nicht von Hauptlinie und Satelliten, sondern von drei gleichberechtigten Triplettlinien spricht.

Das Korrespondenzprinzip gestattet übrigens, wie an anderer Stelle ausgeführt werden soll, vorauszusehen, unter welchen Umständen der Intensitätsunterschied zwischen gleichsinnigen und ungleichsinnigen Übergängen stark ausgeprägt ist und unter welchen Umständen er mehr zurücktritt. Der Umstand, daß er in den Kombinationen $(s\,p)$ gering ist im Vergleich zu den Kombinationen $(p\,d)$, steht, wie hier nur angedeutet werden möge, in Übereinstimmung mit dem Korrespondenzprinzip; dasselbe gilt von den später zu erwähnenden Intensitätsunterschieden im Manganspektrum.

d) In sehr interessanter Weise hat R. Götze[1]) die Methode der inneren Quantenzahlen auf gewisse schon von Rydberg untersuchte Liniengruppen von Ca und Sr angewendet, die er als Kombinationen $(p\,p')$ und $(d\,d')$ deutet, d. h. als *Übergänge zwischen zwei nach ihren Quantenzahlen gleichartigen, numerisch aber verschiedenartigen Termen.*

Wir schreiben des Folgenden wegen insbesondere das Schema der Kombination $(d\,d')$ an; (bei der Kombination $(p\,p')$, zu der u. a. die starke von Fraunhofer mit G benannte Liniengruppe von Ca gehört, ist das zusätzliche Verbot des Überganges $0 \to 0$ zu beachten).

Schema C.



Die Kombination $(d\,d')$ setzt sich hiernach aus $2 + 3 + 2$ Linien zusammen; die stärksten von ihnen sind diejenigen, für welche $\Delta j = 0$ ist; dies stimmt mit unserer Intensitätsregel insofern überein, als jetzt auch $\Delta k = 0$ ist.

Das Auftreten der Terme p' und d' läßt sich nach einer persönlichen Mitteilung von Hn. J. Franck erklären durch einen metastabilen Zustand des Atomrumpfes, der nach den neuen Bohrschen Vorstellungen über den Aufbau der Atome

1) R. Götze, Ann. d. Phys. 66. S. 285. 1921.

in der Reihe der Erdalkalien gerade vom Ca ab zu erwarten ist. Bei den komplizierteren und weniger abgeschlossenen Atomkonstruktionen von Mn und Cr scheinen nach den später mitzuteilenden spektroskopischen Ergebnissen solche metastabilen Zustände in größerer Zahl aufzutreten.

e) Weitaus die wichtigste Verwendung finden aber die inneren Quantenzahlen in der Theorie der *anomalen Zeemaneffekte*, deren Ausarbeitung und formale Abrundung wir Landé[1]) verdanken. Wir gehen hierauf nicht ein, da uns für das Folgende kein ausreichendes magnetooptisches Material zur Verfügung steht.

Nur eine Bemerkung über den „magnetooptischen" Zerlegungssatz möge hier Platz finden, der in der früheren Arbeit (Ann. d. Phys. 63) aufgestellt wurde. Der Satz besagt, daß der „Rungesche Nenner" der anomalen Zeemaneffekte sich in zwei Faktoren zerlegt: $r = r_1 r_2$, deren einer zum Endterm, der andere zum Anfangsterm gehört. Der Satz bildet den Ausgangspunkt für die Landésche Bestimmung der magnetooptischen Energieniveaus und ist natürlich an sich korrekt. Ebenfalls korrekt ist die Zahlenfolge 1, 3, 5, 7, . . ., die ich den aufeinanderfolgenden Termen der Dublettsysteme zuordnete. Inkorrekt aber sind die Zahlen 1, 2, 3, 4, . . ., die ich als Rungesche Nenner für die Terme *s*, *p*, *d*, *b* . . . der Triplettsysteme angegeben habe. Sie müssen vielmehr nach Landé heißen: 1, 1·2, 2·3, 3·4, . . ., welche Werte mit unserem Zerlegungssatze natürlich ebenso verträglich sind wie die ursprünglich vermuteten einfacheren Faktoren 1, 2, 3, 4 . . . Näheres hierüber in meinem Buche, 3. Aufl., S. 480. In betreff der Dublettsysteme sei nur noch bemerkt, daß man hier den Rungeschen Nenner für den zur azimutalen Quantenzahl k gehörenden Term statt $2k - 1$, wie ich es ursprünglich tat, unter Abspaltung des Faktors 2 schreiben kann $k^* = k - {}^1/_2$, in Übereinstimmung mit Landé und mit S. 498 meines Buches.

§ 2. Die diffuse Nebenserie von Mangan.

Kayser und Runge hatten im Spektrum von Mangan zwei Triplettserien entdeckt, die sie als scharfe und diffuse Nebenserie ansprachen. Hr. Catalan vervollständigt ihre

1) A. Landé, Zeitschr. f. Phys. 5. S. 231. 1921.

Messungen, ergänzt sie durch Auffindung einer zugehörigen Hauptserie und bestätigt, daß die scharfe Nebenserie sowie die Hauptserie den Charakter einfacher Tripletts haben. Man schließt daraus, daß wie bei den Erdalkalien der s-Term einfach, der p-Term dreifach ist und im wesentlichen dieselben Quantenzahlen $j = 1$ bzw. $j = 2, 1, 0$ wie bei jenen besitzt. („Im wesentlichen" heißt: bis auf einen gemeinsamen, zunächst unbestimmt bleibenden Addenden, vgl. § 1, S. 35.)

Dagegen findet Hr. Catalan, daß die diffuse Nebenserie nicht, wie bei den Erdalkalien, aus Liniengruppen von $3 + 2 + 1$ Komponenten besteht, sondern *aus solchen von* $3 + 3 + 3$ *Komponenten*. Begreiflicherweise läßt sich nur das erste Glied $2p—3d$ der diffusen Nebenserie vollkommen auflösen; bei den folgenden Gliedern $2p—m\,d$ wird die Trennung des zweiten Terms zu klein. Hr. Catalan zeigt nun, daß die Struktur von $2p—3d$ zurückzuführen ist auf die Kombination eines dreifachen p-Terms mit einem *fünffachen* d-Term. Wir setzen, um dies zu erläutern, das Catalansche Schema der Wellenzahlen von $2p—3d$ her (die Wellenlängen liegen zwischen $\lambda = 3570$ und $\lambda = 3531$ Å.).

$j =$		3		2		1		0		$\bar{1}$
		d_1	Δd	d_2	Δd	d_3	Δd	d_4	Δd	d_5
2	p_1	28007,16	2,34	28004,82	1,85	28002,97				
	Δp			173,70		173,71				
1	p_2			28178,52	1,84	28176,68	1,24	28175,44		
	Δp					129,17		129,14		
0	p_3					28305,85	1,27	28304,58	0,90	28303,68

Jede der neun Wellenzahlen entsteht als Differenz des links stehenden p-Terms mit dem darüber stehenden d-Term. Die drei p-Terme sowie die fünf d-Terme sind dabei wie üblich der Größe nach indiziert, so daß gilt:

$$p_1 < p_2 < p_3; \qquad d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5.$$

Der Beweis für die Catalansche Deutung des Liniengebildes, nämlich für seinen Aufbau aus drei p- und fünf d-Termen liegt in der hinreichenden Gleichheit der Differenzen Δp und Δd, die in dem Schema neben- bzw. untereinander stehen. Unser Schema zeigt zugleich die inneren Quantenzahlen j, die wir den p- und d-Termen beizulegen haben. Für

die p-Terme sind es die schon genannten Zahlen 2, 1, 0; für die d-Terme 3, 2, 1, 0, $\bar{1}$. Wir schreiben wie in der Kristallographie $\bar{1}$ an Stelle von -1 und sehen im übrigen hier und im folgenden das Auftreten negativer Quantenzahlen als einen Formalismus an, der durch geeignete spätere Normierung (Hinzufügung eines gemeinsamen Addenden zu der Gesamtheit der inneren Quantenzahlen) zu beseitigen sein wird.

Wie man sieht, ist bei dieser Wahl der inneren Quantenzahlen unserer Auswahlregel (I) Genüge geleistet: Es kombinieren überall nur solche j miteinander, die sich um ± 1 oder 0 unterscheiden. Daß andererseits unserem Zusatzverbot $0 - 0$ nicht genügt wird, weist auf die Notwendigkeit einer späteren Normierung der Absolutwerte hin.

Wir veranschaulichen die Verhältnisse wie in § 1 einerseits durch ein Niveauschema, in dem wir außer der gegenseitigen Lage der Terme auch ihre inneren und azimutalen

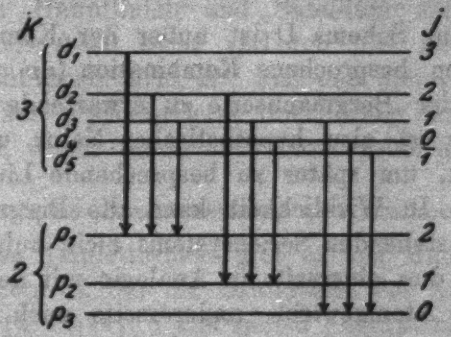
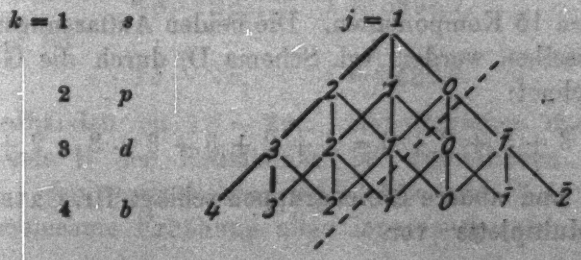


Fig. 2.

Quantenzahlen anmerken, andererseits durch ein Zahlenschema, welches links von der punktierten Linie mit dem Schema A der Erdalkalien genau identisch ist:

Schema D.



Da hier von jedem p-Term drei Striche zu den d-Termen führen, liest man aus diesem Schema, ebenso wie aus Fig. 2, ab, daß die Kombination $(p\,d)$ in der Tat aus $3+3+3$ Komponenten besteht. Indem die p-Terme weit mehr getrennt sind als die d-Terme (es war $p_1-p_2=173$, $p_2-p_3=129$, dagegen $d_1-d_2=2{,}3$, $d_2-d_3=1{,}8$, $d_3-d_4=1{,}3$, $d_4-d_5=0{,}9$), ist die Zerlegung in $3+3+3$ Gruppen in der Tat die naturgemäße und diejenige, die sich dem Auge darbietet. Es ist aber prinzipiell auch möglich, die Struktur des Liniengebildes vom Standpunkte des d-Terms aus zu beurteilen, d. h. diejenigen Linien zu einer Gruppe zusammenzufassen, die zum gleichen d_i gehören. Von diesem Standpunkte aus zerfällt das Liniengebilde in die Gruppen $1+2+3+2+1$; die doppelte Zerlegungsmöglichkeit drücken wir durch die symbolische Gleichung aus:

$$(1)\qquad 3+3+3=1+2+3+2+1.$$

In unserem Schema D ist außer der Kombination $(p\,d)$ die schon oben besprochene Kombination $(s\,p)$ aufgenommen, sowie die in der Bergmannserie zu erwartende Kombination $(d\,b)$. Letztere ist also hypothetischer Natur und wird hier nur aufgeführt, um später zu besprechende Linienstrukturen vorzubereiten. In Wirklichkeit kann die Bergmannserie des jetzt in Rede stehenden Seriensystems nicht aufgelöst werden. Man erwartet dies einerseits in Analogie mit den Erdalkalien von niedrigem Atomgewicht, andererseits nach der Kleinheit der Differenzen Δd, die auf noch kleinere Differenzen Δb schließen lassen. Nehmen wir aber einmal mit Hrn. Catalan extrapolatorisch an, daß der Bergmannterm *siebenfach* ist (der s-Term war einfach, der p-Term dreifach, der d-Term fünffach), so ergibt sich für die Kombination $(d\,b)$ ein noch viel komplizierteres Gebilde als für die Kombination $(p\,d)$, nämlich eine Gruppe von 15 Komponenten. Die beiden Auffassungsmöglichkeiten desselben werden (vgl. Schema D) durch die Gleichung gekennzeichnet:

$$(2)\qquad 3+3+3+3+3=1+2+3+3+3+2+1.$$

Für diese und andere Liniengruppen schlägt Hr. Catalan den Namen „Multipletts“ vor.

Wir kehren zur Kombination $(p\,d)$ zurück und vergleichen die hier beobachteten Intensitäten mit unserer Intensitätsregel aus § 1. Hr. Catalan findet für die drei Tripletts, in die sich nach Schema D die Kombination $(p\,d)$ zerlegen läßt:

$j =$	2			1			0		
	3	2	1	2	1	0	1	0	1
Intensität =	10	9	7	$8^1/_2$	8	$7^1/_2$	$7^1/_2$	8	8

Wir sehen daraus: 1. Das erste Triplett stimmt mit unserer Regel überein, die Intensitäten nehmen von 10 über 9 nach 7 in dem Maße ab, als der Übergang Δj der inneren Quantenzahl von demjenigen Δk der azimutalen Quantenzahl dem Sinne nach verschieden wird. 2. Im zweiten Triplett gilt die Regel noch andeutungsweise, im dritten nicht mehr. 3. Durchweg sind die Intensitätsunterschiede hier viel geringer als bei der Kombination $(p\,d)$ der alkalischen Erden; man wird hier keinesfalls von „Hauptlinien" und „Satelliten" sprechen. 4. Daß die Kombination 0—0 nicht verboten und auch der Intensität nach nicht geschwächt ist, und daß dieser Umstand auf die Notwendigkeit einer späteren Normierung der Absulutwerte von j hinweist, wurde schon oben hervorgehoben.

§ 3. Interkombinationslinien und Einfachterme.

Neben den Triplettermen gibt es bei Mangan zunächst einen Einfachterm S, der die Grundbahn des Atoms darstellt. Er wird von Hrn. Catalan aus seinen charakteristischen thermischen Eigenschaften erkannt (Selbstumkehrung, Beständigkeit bei tiefsten Temperaturen).

Von den Interkombinationslinien zwischen dem Einfachterm $1S$ und dem Tripletterm $2p_i$ beobachtete Hr. Catalan als stärkste Linie

$$1S - 2p_2, \qquad \lambda = 5394{,}7.$$

Schwächer ist

$$1S - 2p_3, \qquad \lambda = 5432{,}6.$$

Nicht vorhanden ist $1S - 2p_1$. Wir schließen daraus, daß das Schema B der Erdalkalien im wesentlichen auch für Mn gilt. „Im wesentlichen" heißt, wie auf S. 40: Bis auf eine gemeinsame Erhöhung aller inneren Quantenzahlen um

einen gemeinsamen Addenden, durch dessen Hinzutreten die Linie (Sp_3), die bei den Erdalkalien durch das Zusatzverbot 0—0 unterdrückt war, bei Mn möglich wird. Sehen wir hiervon einstweilen ab, halten also an der bisherigen Wahl der j-Werte für die p_i-Terme vorläufig fest, so muß jedenfalls für den S-Term, wie in Schema B, $j = 0$ gewählt werden.

Es handelt sich sodann um die Hauptserie der Einfachterme, insbesondere um ihr erstes Glied $1S - 2P$. Hr. Catalan begründet, daß diese Linie bei Mn durch das Triplett vertreten wird:

$$1S - 2P_i, \qquad \lambda = 2794{,}8;\ 2798{,}3;\ 2801{,}1.$$

Als innere Quantenzahlen müssen wir den drei Termen P_1, P_2, P_3 beilegen

$$j = 1,\ 0,\ \bar{1},$$

damit nach unserer Auswahlregel (I) alle drei Kombinationen der P_i mit dem Term S, $j = 0$ möglich sind. Es besteht also eine gewisse Analogie zwischen diesem Term P_i und dem Term d_i im vorigen Paragraphen. Der Term d_i bestand bei den Erdalkalien aus den drei Niveaus $j = 3,\ 2,\ 1$; er wird bei Mn zu einem fünffachen Term, indem sich hier die beiden neuen Niveaus $j = 0$ und $\bar{1}$ anlagern. Ebenso bestand der Term P bei den Erdalkalien aus dem einen Niveau $j = 1$; auch diesem lagern sich bei Mn die beiden Niveaus $j = 0$ und $\bar{1}$ an und erzeugen so den dreifachen Term P_i.

Es gibt aber noch ein anderes Triplett, welches Hr. Catalan derselben Hauptserienlinie $1S - 2P$ der Erdalkalien zuordnet. Den darin auftretenden neuen Term wollen wir mit P_i' bezeichnen. Das fragliche Triplett heißt dann

$$1S - 2P_i', \qquad \lambda = 4030{,}8;\ 4033{,}1;\ 4034{,}5.$$

Der Umstand, daß alle drei Kombinationen SP_i' auftreten und nicht etwa, wie bei den Kombinationen Sp_i eine derselben fortfällt, zwingt uns, dem Terme P_i' dieselben inneren Quantenzahlen

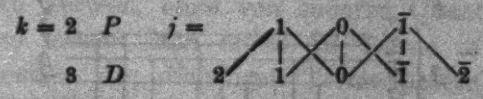
$$j = 1,\ 0,\ \bar{1}$$

zuzuordnen, wie dem Terme P_i.

§ 4. Die Multipletts (PD).

Mit den Dreifachtermen P_i und P_i' kombinieren gewisse Fünffachterme, die wir allgemein mit D bezeichnen wollen. Die entstehende Linienstruktur ist im Grunde dieselbe wie die der Kombination $(p_i\, d_i)$ in § 2: Man hat Gebilde von 9 Linien, die wie in Gleichung (1), § 2 in $3+3+3$ oder in $1+2+3+2+1$ Linien zerlegt werden können. Mit Rücksicht auf die inneren Quantenzahlen $j = 1, 0, \bar{1}$ der Terme P_i, P_i' muß man aber, um diese Struktur zu erklären, den Termen $D_1 D_2 D_3 D_4 D_5$ die inneren Quantenzahlen $j = 2, 1, 0, \bar{1}, \bar{2}$ beilegen. Als Analogon zu dem Schema D in § 2 ergibt sich so:

Schema E.



Man sieht: Die relative Folge der inneren Quantenzahlen ist bei den P- und D-Termen dieselbe wie bei den p- und d-Termen; nur die absoluten Werte sind (in der einmal angenommenen und zunächst beizubehaltenden Normierung der j) durchgehends um 1 heruntergesetzt. Und zwar ergeben sich diese um 1 verkleinerten Werte der Quantenzahlen Schritt für Schritt zwangläufig aus den Überlegungen des vorigen und dieses Paragraphen.

Hr. Catalan findet sechs Multipletts vom Typus (PD). In der folgenden Aufzählung bedeuten P und P' dieselben Tripletterme wie im vorigen Paragraphen, P^x und P^y zwei neue, sonst unbekannte Tripletterme. D' und D sind zwei Fünffachterme bzw. von den Termdifferenzen:

$$D' : \Delta\nu = \quad 4{,}8; \quad 3{,}5; \quad 2{,}6; \quad 1{,}4$$
$$D : \Delta\nu = 229{,}7; \quad 169{,}6; \quad 116{,}9; \quad 68{,}6.$$

Multipletts vom Typus (PD):

$\lambda =$	4455	bis 4462	Bezeichnung	$P'D'$,
$\lambda =$	8740	„ 8671	„	PD',
$\lambda =$	5341	„ 5538	„	DP,
$\lambda =$	12990	„ 13997	„	DP',
$\lambda =$	3578	„ 3630	„	DP^x,
$\lambda =$	3044	„ 3082	„	DP^y.

Die Bezeichnung DP, DP', DP^{II} und DP^{IV} deutet an, daß hier der D-Term größer als der P-Term ist, daß also D den Endzustand, P den Anfangszustand darstellt. Umgekehrt ist bei den Kombinationen $P'D'$ und PD' der Anfangszustand D', der Endzustand P bzw. P'.

Zwischen dem D- und D'-Term einerseits, dem d-Term andererseits besteht dabei ein bemerkenswerter Gegensatz:

Die Niveaus d_i sind in gewöhnlicher Weise angeordnet, so daß das *oberste* Niveau (der kleinste Termwert) die größte innere Quantenzahl ($j = 3$) trägt und j von hier aus schrittweise in den aufeinander folgenden Niveaus *nach unten hin* abnimmt; vgl. Fig. 2. Dagegen sind die Niveaus D und D' in

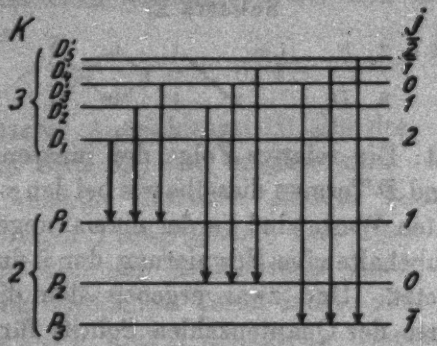


Fig. 8.

verkehrter Weise angeordnet; die größte innere Quantenzahl ($j = 2$) müssen wir hier dem *untersten* Niveau (dem größten Termwert) beilegen und j von hier aus *nach oben hin* abnehmen lassen, um die tatsächlich beobachteten Kombinationen mit unserer Auswahlregel beherrschen zu können. Vgl. Fig. 8, welche qualitativ die Verhältnisse bei der Kombination PD' darstellt.

Wir bezeichnen den d-Term als *regelrechten*, den D- und D'-Term als *verkehrten Term*. Auch die Terme P^{II}, P^{IV} sind verkehrte Terme, dagegen sind die Terme p, P, P' von Mn sowie fast alle Terme der Alkalien und Erdalkalien *regelrechte* Terme. Das einzige Beispiel eines verkehrten Termes, welches mir außerhalb des Mn-Spektrums bekannt ist, ist der b-Term von Cäsium. Hier müssen wir, um die von K. W. Meissner[1])

1) K. W. Meissner, Ann. d. Phys. 65. S. 378. 1920. Vgl. auch mein Buch, 3. Aufl., S. 445 und 441. Anm.

festgestellte Lage des Satelliten gegen die Hauptlinie der Bergmanngruppe erklären zu können, dem höheren der beiden b-Niveaus die kleinere Quantenzahl ($j = 3$), dem tieferen die größere ($j = 4$) beilegen.

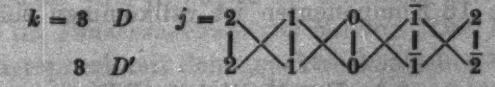
Daß die so getroffene Unterscheidung zwischen regelrechten und verkehrten Niveaus nicht willkürlich ist und nicht nur zur Erklärung der beobachteten Kombinationen dient, zeigt sich darin, daß die Niveau*unterschiede* $\Delta\nu$ bei den verkehrten Termen ebenso wie bei den regelrechten mit abnehmendem j abnehmen. Es ist also auch bei den verkehrten D- und D'-Termen der Abstand $D_1 D_2 > D_2 D_3$ . ., gerade so wie bei den regelrechten d-Termen oder wie bei den p- und P-Termen. Man könnte daher die Unterscheidung zwischen regelrechten und verkehrten Termen, ohne von inneren Quantenzahlen zu reden, auch so fassen: Man ordne die Terme in eine Reihe nach abnehmenden $\Delta\nu$; diejenigen Terme heißen regelrechte bzw. verkehrte, bei denen in dieser Reihenfolge die absoluten Größen der Terme zu- bzw. abnehmen.

Hervorzuheben ist noch, daß bei allen hier aufgezählten Multipletts die Intensitäten im großen und ganzen unserer Regel aus § 1 c) entsprechen. Die stärkste Linie ist immer diejenige, die zu dem Übergange $j = 2$ in $j = 1$ gehört, also zu einem Übergange, der parallel geht zu dem Übergange der azimutalen Quantenzahl $k = 3$ in $k = 2$. Wir haben dies im Schema E durch Verstärkung der betreffenden Verbindungslinie angedeutet.

§ 5. Die Multipletts (DD').

Wir kommen jetzt zu Liniengebilden, die den Kombinationen (dd') im § 1 d), analog sind. Da der D-Term in unserem Falle fünffach ist, ergibt sich die folgende Erweiterung des Schemas C in § 1:

Schema F.



Dies Gebilde besteht also aus 13 Einzellinien, die sich, gleichviel nach welchem der beiden Terme wir ordnen, in Gruppen von

$$2 + 3 + 3 + 3 + 2$$

Komponenten zusammenfassen lassen. Da hier die Quantenzahl k ungeändert bleibt, sind diejenigen Komponenten in unserem Schema durch Verstärkung hervorgehoben und auch in der Beobachtung am stärksten ausgeprägt, bei denen die innere Quantenzahl j ihren Anfangswert ungeändert beibehält.

Hr. Catalan weist zwei Gruppen dieser Bauart nach, nämlich

$\lambda = 4018$ bis 4083 Bezeichnung $D\,D^{\alpha}$
$\lambda = 3207$ „ 3260 „ $D\,D^{\beta}$.

D ist derselbe weit getrennte „verkehrte" Term wie im vorigen Paragraphen: die Terme D^{α} und D^{β}, mit denen er kombiniert, sind sonst unbekannte, ebenfalls „verkehrte" Terme von den Termdifferenzen:

$D^{\alpha} : \Delta\nu = 143{,}2;\quad 121{,}1;\quad 89{,}8;\quad 55{,}1,$
$D^{\beta} : \Delta\nu = 58{,}0;\quad 44{,}9;\quad 30{,}1;\quad 17{,}1.$

Wir entnehmen der Catalanschen Arbeit z. B. das Schema für die Wellenzahlen des Multipletts $D\,D^{\alpha}$ und ergänzen es durch Hinzufügung der Quantenzahlen j:

$j =$		2		1		0		$\bar{1}$		$\bar{2}$
		D_1^{α}	ΔD^{α}	D_2^{α}	ΔD^{α}	D_3^{α}	ΔD^{α}	D_4^{α}	ΔD^{α}	D_5^{α}
2	D_1	24787,15	143,17	24880,32						
	ΔD	229,71		229,70						
1	D_2	24507,44	143,18	24650,62	121,07	24771,69				
	ΔD			169,57		169,51				
0	D_3			24481,05	121,13	24602,18	89,79	24691,97		
	ΔD					116,96		116,96		
$\bar{1}$	D_4					24485,22	89,79	24575,01	55,05	24630,06
	ΔD							68,67		68,67
$\bar{2}$	D_5							24506,34	55,09	24561,43

Die ΔD sind dieselben Differenzen, die schon im vorigen Paragraphen in den Multipletts vom Typus $(D\,P)$ auftraten; die ΔD^{α} sind neue Differenzen, welche aber, da sie je zweimal auftreten, sich selbst kontrollieren. Die Bauart des ganzen Gebildes von 13 Komponenten ist vollkommen einheitlich und folgerichtig.

§ 6. Das Multiplett $(D\,B)$.

Das komplizierteste Gebilde, welches Hr. Catalan im Mn-Spektrum gesetzmäßig geordnet hat, besteht aus 15 Linien zwischen $\lambda = 3777$ und $\lambda = 3844$. Diese 15 Linien lassen sich

im Sinne der Gleichung (2) aus § 2, je nachdem man sie nach dem einen oder anderen Term zusammenfaßt, entweder als 5 Tripletts oder als Aufeinanderfolge von $1+2+3+3+3+2+1$ Linien anordnen. Das ganze Gebilde entsteht, wie Hr. Catalan bereits bemerkt hat, durch Kombination eines fünffachen und eines siebenfachen Terms. Der fünffache Term ist der uns bekannte D-Term. Da seine inneren Quantenzahlen durch die vorangehenden Schlüsse festgelegt sind, ergeben sich auch die inneren Quantenzahlen des siebenfachen Termes zwangläufig. Aber auch die azimutale Quantenzahl des siebenfachen Termes kann nicht zweifelhaft sein: nach der Auswahlregel für die letztere kann der D-Term ($k = 3$) nur in einen B-Term ($k = 4$) übergehen, da wir nicht annehmen werden, daß es einen siebenfachen P-Term ($k = 2$) geben kann. Wir kommen also zu dem folgenden Schema, welches im wesentlichen (d. h. bis auf die Verminderung aller inneren Quantenzahlen um eine Einheit) die beiden letzten Zeilen des Schemas D aus § 2 reproduziert:

Schema G.

Der B-Term ist ebenso wie der D-Term ein verkehrter Term. Die Größe der Differenzen des B-Termes

$$\Delta\nu = 115{,}3;\ 95{,}5;\ 71{,}4;\ 49{,}0;\ 28{,}5;\ 9{,}8$$

ist natürlich für einen Bergmannterm etwas Ungewöhnliches und Bedenkliches. Doch scheint die hier vorgeschlagene Auffassung vom systematischen Standpunkte aus unvermeidlich. Daß sich diese komplizierte Gruppe von 15 Linien so naturgemäß, gewissermaßen als Krönung der von den Erdalkalien her bekannten Strukturen deuten läßt (vgl. Schema D), ist jedenfalls bemerkenswert.

§ 7. Das Spektrum von Chrom.

Multipletts vom Typus ($P\,D$) kommen, wie Hr. Catalan zeigt, auch im *Funkenspektrum* von Mn vor. Daß Mn^+ in scheinbarem Widerspruch mit dem „spektroskopischen Verschiebungssatz“ ein Spektrum vom gleichen Charakter wie das neutrale Mn zeigt, hängt offenbar mit der Stellung des Mn im periodischen System zusammen (unmittelbar vor der Eisengruppe, wo die Umordnung der Achterschale in die Achtzehnerschale stattfindet).

Daß das Spektrum von Cr demjenigen von Mn^+ verwandt ist, muß nach dem „Verschiebungssatz“ erwartet werden. In der Tat weist Hr. Catalan bei Cr z. B. ein Multiplett vom Typus $(P\,D)$ bei $\lambda = 5300$ nach. Es tritt aber auch je ein partielles Analogon zum Typus $(D\,D')$ und $(D\,B)$ auf, ersteres bei $\lambda = 3900$, letzteres bei $\lambda = 4350$.

Wegen der Bezeichnung sei folgendes vorausgeschickt: Es ist in gewissem Grade willkürlich, wenn wir die Chromterme durch große Buchstaben P, D, B charakterisieren. Bei den Mangantermen hatten wir in den Interkombinationslinien (Sp_2).. eine Handhabe, um zwischen den Termen p.., P.. und ihren inneren Quantenzahlen zu unterscheiden. Bei Chrom ist dies nach dem von Hrn. Catalan mitgeteilten Beobachtungsmaterial noch nicht möglich. Übrigens ist diese Unterscheidung hier auch zunächst belanglos, da es für die Erklärung der auftretenden und nichtauftretenden Kombinationen wieder nur auf die relativen Werte der kombinierenden inneren Quantenzahlen ankommt. Daß wir hier die großen Buchstaben bevorzugt haben, geschieht nur deshalb, weil z. B. die weit getrennten und „verkehrten“ Terme D, D', B von Chrom viel mehr Ähnlichkeit haben mit den ebenso bezeichneten Termen von Mangan, als mit den Mangantermen d, b. Das Multiplett $(D\,D')$ $(\lambda \cong 3900)$ besteht nun bei Chrom nicht wie die entsprechenden Multipletts bei Mangan aus 13, sondern nach Hrn. Catalan nur aus 11 Linien. Hr. Catalan bemerkt aber bereits, daß diesen Linien vermöge ihrer Temperaturabhängigkeit auch die Linie $\lambda = 3916{,}26$, $\nu = 25527{,}3$ hinzugerechnet werden könnte. Wir bestätigen dies, indem wir, unter Hinzunahme dieser Linie, das ganze Schema der Wellenzahlen aufschreiben:

$j =$		4		3		2		1		0
		D_1'	$\Delta D'$	D_2'	$\Delta D'$	D_3'	$\Delta D'$	D_4'	$\Delta D'$	D_5'
4	D_1	25508,4	144,6	25363,8						
	ΔD	212,6		212,6						
3	D_2	25721,0	144,6	25576,4	129,7	25446,7				
	ΔD			167,4		168,1				
2	D_3			25743,8	129,0	25614,8	118,7	25496,1		
	ΔD					116,6		117,2		
1	D_4					25731,4	118,1	25613,3	86,0	25527,3
	ΔD							59,7		
0	D_5							25673,0		

Wir sehen: Die von uns hinzugefügte, durch fetten Druck hervorgehobene Wellenzahl liefert eine Differenz $\Delta D' = 86{,}0$, die sich vortrefflich in den allgemeinen Gang der $\Delta D'$ und ΔD einfügt. Das so vervollständigte Multiplett setzt sich dann aus Gruppen von

$$2 + 3 + 3 + 3 + 1$$

Komponenten zusammen, während die entsprechenden Multipletts bei Mangan aus

$$2 + 3 + 3 + 3 + 2$$

Komponenten bestanden. Verglichen mit dem Schema des Mn-Multipletts ist im vorstehenden Schema die rechte untere Ecke unbesetzt.

Worin liegt der Grund für den Fortfall dieser Komponente? *Offenbar darin, daß hier das Zusatzverbot $0 \to 0$ wirksam wird.* Wir wählen also in unserem Schema die inneren Quantenzahlen j so, daß der fortfallenden Komponente der Übergang $0 \to 0$ entspricht und *normieren dadurch bei Cr die inneren Quantenzahlen ohne Unsicherheit hinsichtlich ihres absoluten Wertes.* Gegenüber dem Schema F von Mn sind bei Cr alle Zahlen um 2 heraufgesetzt, so daß das Analogon zu jenem Schema jetzt lautet:

Schema H.

Indem wir hier den Übergang 0—0 punktieren, deuten wir an, daß die betreffende Linie irreal ist. Sie würde übrigens, wie man aus der Tafel der Wellenzahlen leicht entnimmt, bei

$$\nu = 25678{,}0 - 86{,}0 = 25527{,}3 + 59{,}7 = 25587{,}0$$

liegen. Unser Schema H gibt jetzt auf Grund unserer Auswahlregel (I) und des Landéschen Zusatzverbotes die beobachtete Struktur des fraglichen Multipletts getreu wieder.

Entsprechend läßt sich nun auch das schon genannte Multiplett $(D\,B)$ bei $\lambda = 4350$ erklären. Es besteht aus

$$1 + 2 + 3 + 3 + 3 = 12$$

Linien und setzt sich aus dem schon bekannten fünffachen D-Term und einem *ebenfalls fünffachen B-Term* zusammen nach dem Schema:

Schema I.

Weshalb der *B*-Term bei Cr fünffach, nicht wie bei Mangan siebenfach ist, werden wir im nächsten Paragraphen begründen.[1])

Über die bei Sc auftretenden Strukturen und die ihnen beizulegenden inneren Quantenzahlen wird auf Grund seiner Messungen Hr. Catalan selbst berichten.

§ 8. Über die absolute Normierung der inneren Quantenzahlen. Ein allgemeines Gesetz für die Niveauzahl der Mehrfachterme und ihre Permanenz.

Die Spektren von Mangan und Chrom zusammen mit den bekannten Spektren der Erdalkalien, lassen, wie mir Hr. W. Heisenberg mitteilt, das folgende allgemeine Verhalten der Multipletts vermuten: *Die Anzahl Niveaus, in die ein S, P, D, ... bzw. ein s, p, d, ...-Term zerfällt, steigt zunächst in der Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, ... an. Von einem gewissen Term ab, der durch das Auftreten von $j = 0$ charakterisiert ist, gilt das „Permanenzgesetz der Multiplizitäten", d. h. von diesem Term ab bleibt die Niveauzahl konstant.* Hierfür läßt sich eine einfache, wenn auch möglicherweise noch etwas zu formale Erklärung geben:

Wir nehmen wie in § 1 an, daß die innere Quantenzahl j das gesamte Impulsmoment[2]) des Atoms in dem betreffenden Anregungszustand bedeutet und daß dieses Gesamtmoment sich

---

1) Als das Manuskript dieser Arbeit bereits fertiggestellt war, erhielt ich durch freundliche Vermittlung von Hr. Paschen Einblick in die Tübinger Diss. von Frl. H. Gieseler, „Serienzusammenhänge im Bogenspektrum von Chrom". Hier sind außer dem von uns behandelten noch zwei weitere Multipletts vom Charakter $(D\,D')$ studiert. Ihre Struktur wird in derselben Weise wie in unserem Schema H auf innere Quantenzahlen zurückgeführt. Nur die Bezeichnung ist eine andere: Frl. Gieseler schreibt $(p\,p')$ und $(p\,d)$, wo wir $(D\,D')$ und $(D\,B)$ schreiben. Ich glaube, daß der Vergleich mit Mn und die allgemeine Betrachtung des nächsten Paragraphen für unsere Bezeichnung sprechen. Hervorzuheben ist, daß Frl. Gieseler in ausgiebiger Weise die Zeemaneffekte zur Ordnung der Cr-Linien heranzieht.

2) Im Interesse der kürzeren Ausdrucksweise lassen wir den Faktor $h/2\pi$ als selbstverständlich fort; „ganzzahlig" heißt im folgenden immer „in Einheiten von $h/2\pi$".

vektoriell zusammenzetzt aus dem Impulsmoment j_0 des unangeregten Atoms und dem Impulsmoment j_1 der Anregung. Wir nehmen an, daß letzteres in die Reihe der Terme $S, P, D \ldots$ bzw. $s, p, d \ldots = 0, 1, 2 \ldots$ ist. Der größte in der betreffenden Linienstruktur vorkommende Wert von j entspricht dann offenbar der gleichsinnigen Auseinanderlegung $j_0 + j_1$ beider Momente; der kleinste Wert entsteht, wenn beide Teilmomente mit entgegengesetztem Sinn sich überlagern, und ist gleich $|j_0 - j_1|$. Zwischen diesen beiden Extremwerten sind alle ganzzahligen Zwischenwerte möglich. Sie entstehen durch vektorielle Zusammensetzung von j_0 und j_1 bei solcher gegenseitiger Neigung, daß dabei das Resultat der Vektoraddition ganzzahlig wird. Durch die letztgenannte Forderung ist (vgl. die folgenden Figuren) die räumliche Lage von j_0 und j_1 bestimmt, ähnlich wie bei der „räumlichen Quantelung" die Lage, z. B. eines Wasserstoffatoms, in einem äußeren Kraftfelde bestimmt wird. Die Gesamtzahl der so erhaltenen Niveaus ist offenbar

$$j_0 + j_1 - |j_0 - j_1| + 1 = \begin{cases} 2j_1 + 1 & \text{für } j_0 > j_1 \\ 2j_0 + 1 & \text{für } j_0 < j_1 \end{cases},$$

also in der Tat eine ungerade Zahl, im ersten Falle aus der aufsteigenden Reihe 1, 3, 5 ..., im zweiten Falle eine von j_1 unabhängige „permanente" Zahl.

Für den oben mit D bezeichneten Term von Chrom z. B. haben wir

$$j_0 + j_1 = 4; \quad j_0 - j_1 = 0,$$

also

$$j_0 = 2; \quad j_1 = 2.$$

Für die Zwischenwerte $j = 3, 2, 1$ ist die gegenseitige Lage von j_0 und j_1 durch Fig. 4a eindeutig bestimmt. Indem wir mit dem Radius $j_1 = 2$ um den Endpunkt von $j_0 = 2$ einen (in der Figur punktierten) Halbkreis legen, andererseits um den Anfangspunkt 0 von $j_0 = 2$ Kreisbögen bzw. mit den Radien $j = 3, 2, 1$ beschreiben und die Schnittpunkte der beiderlei Kreise mit dem Anfangspunkte 0 von $j_0 = 2$ verbinden, erhalten wir diejenigen Lagen des Gesamtimpulses j, die sich aus j_0 und j_1 ganzzahlig-vektoriell zusammensetzen. In der Figur sind die betreffenden Schnittpunkte, die also zugleich die Endpunkte des von 0 auslaufenden Gesamtimpulses bedeuten, mit 3, 2, 1 be-

zeichnet. Nehmen wir noch die Extremwerte $j = j_0 + j_1 = 4$ und $j = j_0 - j_1 = 0$ hinzu, so haben wir in der Figur die *fünf Möglichkeiten* vor uns, *die den fünf Energieniveaus des D-Terms entsprechen.*

Gehen wir zum nächst höheren Term über, den wir *B*-Term nannten, so ist hier j_0 wieder gleich 2, während j_1 sich um eins erhöht, also gleich drei

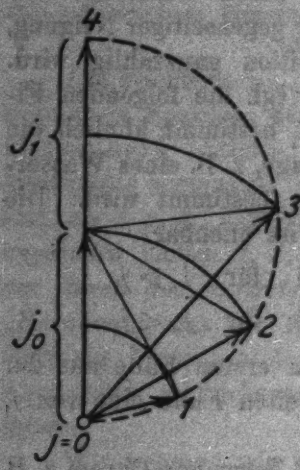


Fig. 4a.

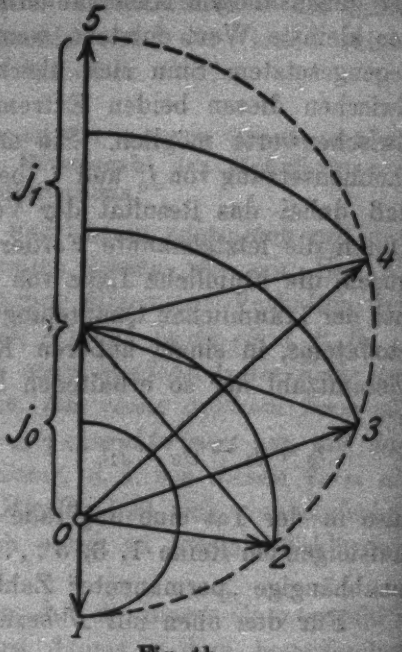


Fig. 4b.

wird. Man hat dann als höchsten beziehungsweise niedrigsten Wert von j

$$j_0 + j_1 = 2 + 3 = 5, \quad |j_0 - j_1| = |2 - 3| = 1,$$

wie es unser Schema I fordert und unsere Fig. 4b erläutert. Der punktierte Hauptkreis hat jetzt den Radius $j_1 = 3$; die um den Anfangspunkt 0 von j_0 gelegten Kreise bzw. mit den Radien 4, 3, 2 schneiden den punktierten Halbkreis in den mit 4, 3, 2 bezeichneten Punkten; der Kreis mit dem Radius 1 berührt jenen Halbkreis. Der Berührungspunkt 1 gibt zusammen mit den Schnittpunkten 2, 3, 4 und dem Endpunkte 5 des Vektors $j_0 + j_1$ die *fünf Lagen* an, deren der Vektor des Gesamtimpulses bei unserem *B*-Term infolge ganzzahlig-quantentheoretischer Beschränkung fähig ist.

Indem wir auch die niederen bzw. höheren Terme, die wir *S* und *P* bzw. *X* nennen, hinzufügen, erhalten wir das folgende zusammenfassende Schema der von uns betrachteten Cr-Terme (*N* bedeutet allgemein die Niveauzahl):

Schema K.

S					$j=2$					$N=1$
P					3	2	1			3
D				4	3	2	1	0		5
B			5	4	3	2	1			5
X		6	5	4	3	2				5

Das Gesetz von der „Permanenz der Multiplizitäten" wird auf diese Weise zugleich erklärt und eingeschränkt. Die Einschränkung besteht darin, daß die Niveauzahl erst von demjenigen Terme an permanent wird, in welchem *die Folge der inneren Quantenzahlen mit 0 abschließt*; vorher wächst die Niveauzahl je um zwei Einheiten an. Der Term, für den zum erstenmal die volle Niveauzahl erreicht wird, ist dadurch ausgezeichnet, daß für ihn $j_1 = j_0$ ist. Für jeden folgenden Term nimmt $j_1 - j_0$ je um eine Einheit zu, d. h. die Folge der inneren Quantenzahlen schließt hier nicht mit 0, sondern mit 1, 2,... ab.

Bei den *Triplettermen der Erdalkalien* haben wir offenbar $j_0 = 1$. Die Permanenz der Niveauzahl tritt hier schon bei dem *p*-Term ein, dessen kleinster *j*-Wert in der Tat gleich Null ist. Dementsprechend ergibt sich unser Schema A aus dem Schema K, wenn wir hier alle Zahlen fortlassen, die *links* von dem punktierten Linienzug stehen. Es ist sehr bemerkenswert, daß die *Einfachheit des s-Termes* im Schema A, die bisher immer als eine seltsame Ausnahme gegolten hat, sich nunmehr unter ein allgemeines Gesetz einordnet, nämlich das Gesetz, nach welchem die Niveauzahl je um zwei Einheiten anwächst, bis ihr permanenter Wert erreicht ist. Bei den *Einfachtermen S, P, D ... der Erdalkalien* andererseits haben wir $j_0 = 0$; *hier wird die Niveauzahl daher schon bei dem S-Term permanent gleich* 1.

Ebenso wie bei den Erdalkalien wird sich allgemein der *s*-Term von dem *S*-Term dadurch unterscheiden, daß j_0 bei *s* um 1 größer ist als bei *S*. Gleichzeitig wird dann bei den aus *s* durch zunehmende Anregung j_1 entstehenden Termen

p, d, ... die schließlich permanente Niveauzahl um zwei Einheiten größer sein, als die permanente Niveauzahl in der Termreihe S, P, D, ...

Im Manganspektrum schließlich folgt aus dem Vorkommen von $j = -3$ im Schema G $j_0 \geqq 3$; die Permanenz der Multiplizitäten ist deshalb hier frühestens bei dem B-Term erreicht. Alle j-Werte unserer Schemata E, F, G, sowie D erhöhen sich somit um dieselbe Größe $j_0 \geqq 3$. Die früher mit $0 \to 0$ bezeichneten Übergänge bedeuten in Wirklichkeit Übergänge $j_0 \to j_0$ und sind als solche nicht verboten. Ob $j_0 = 3$ oder > 3 ist, würde sich unmittelbar entscheiden lassen, wenn eine Kombination $(B\,B')$ bekannt wäre. Wäre $j_0 = 3$, so käme dem letzten B-Niveau (früher mit $\bar{3}$ bezeichnet) die Quantenzahl $j = 0$ zu, und es müßte im Multiplett $(B\,B')$ eine Linie ausfallen: dieses Multiplett würde nicht aus $2+3+3+3+3+3+2 = 19$, sondern aus $2+3+3+3+3+3+1 = 18$ Linien bestehen. Wäre dagegen $j_0 > 3$, so wäre im letzten B-Niveau $j > 0$ und es müßten alle 19 Linien des Gebildes $(B\,B')$ vollständig vertreten sein. Wenn $j_0 = 3$ ist, wird die Niveauzahl N in den Reihen $S, P, D, \ldots$ gleich $1, 3, 5, 7, 7 \ldots$; in der Reihe $s, p, d \ldots$ der Manganterme dagegen wird gleichzeitig $N = 1, 3, 5, 7, 9, 9 \ldots$. Da hier nämlich j_0 um 1 erhöht ist, tritt die Permanenz der Multiplizitäten erst um einen Schritt später ein als bei den Termen S, P, $D \ldots$ desselben Elementes, und die definitive permanente Niveauzahl N ist, entsprechend der vorher allgemein formulierten Regel, um zwei Einheiten größer, als bei den Termen S, P, $D \ldots$

Wir fassen zusammen: An das einreihige Schema der Erdalkalienterme S, P, $D \ldots$ mit $j_0 = 0$ schließt sich unmittelbar an das dreireihige Schema A der Alkalienterme s, p, $d \ldots$ mit $j_0 = 1$ und als nächste Verallgemeinerung für $j_0 = 2$ das schließlich fünfreihige Schema K der Chromterme S, P, $D \ldots$. Möglicherweise bilden die Manganterme S, P, $D \ldots$ das nächste Glied dieser Kette, wenn nämlich für diese $j_0 = 3$ und daher die permanente Niveauzahl $N = 7$ wird. An diese schließen sich dann endlich die Manganterme s, p, $d \ldots$ aus dem (entsprechend zu normierenden) Schema D an, für welche dann gleichzeitig $j_0 = 4$ und die permanente Niveauzahl $N = 9$ sein würde.

§ 9. Ergänzendes über Dublettsysteme bzw. Systeme von gerader Niveauzahl.

Eine Schwierigkeit ergibt sich scheinbar bei den Dublettsystemen. Die Alkalien haben im natürlichen Atomzustande (*s*-Bahn = Grundbahn) das Impulsmoment $j_0 = 1$, wie Stern und Gerlach bei dem den Alkalien analogen Ag nachgewiesen[1]) haben. Kommt zu dem Moment $j_0 = 1$ das Anregungsmoment j_1 hinzu, so hätten wir als Extremwerte des aus beiden sich zusammensetzenden Gesamtmomentes j im Sinne des vorigen Paragraphen zu erwarten $j_1 + 1$ und $j_1 - 1$, im ganzen also die *drei* Möglichkeiten

$$j = j_1 + 1,\ j_1,\ j_1 - 1.$$

Dies würde aber einem *Tripletterm* entsprechen, nicht einem Dubletterm.

Die Schwierigkeit löst sich, wenn man, geleitet durch die Halbzahligkeit des Rungeschen Nenners bei den Dublettermen (vgl. § 1 e) und durch das damit zusammenhängende Heisenbergsche magnetooptische Modell[2]), das ursprüngliche Moment j_0 der Grundbahn aufteilt zwischen dem Atomrumpf und dem Valenzelektron. Die beiden Bestandteile, aus denen sich das Gesamtmoment j bei hinzukommender Anregung j_1 ganzzahlig zusammensetzt, sind dann $j_1 + \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$, und seine Extremwerte werden:

$$j_1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = j_1 + 1 \quad \text{bez.} \quad j_1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = j_1.$$

Hier haben wir nun in der Tat *zwei aufeinander folgende Zahlen*; es gibt also kein dazwischen liegendes drittes ganzzahliges Niveau. Durch die azimutale Quantenzahl k ausgedrückt, lauten daher die inneren Quantenzahlen eines Dublettermes wegen der Beziehung $k = j_1 + 1$:

$$j = j_1 + 1 = k \quad \text{und} \quad j = j_1 = k - 1,$$

wie es nach den ursprünglichen Festsetzungen für die Alkalien in Ann. Bd. 63. S. 231 sein muß.

---

1) Die Beobachtung bezieht sich allerdings auf das *magnetische Moment*; ob man von diesem auf das *Impulsmoment* j_0 ohne weiteres schließen darf, wird von Bohr in Zweifel gezogen, vgl. den Schluß von § 10.

2) W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. 8. S. 273. 1922.

Verallgemeinern wir die vorstehende halbzahlige Rechnung auf einen Wert $j_0 > 1$ des Eigenmomentes, so erhalten wir als Extremwerte

$$j_0 - \tfrac{1}{2} + j_1 + \tfrac{1}{2} = j_0 + j_1,$$
$$|j_0 - \tfrac{1}{2} - (j_1 + \tfrac{1}{2})| = |j_0 - j_1 - 1|$$

und als Niveauzahl N, je nachdem $j_0 \gtrless j_1 + 1$ ist:

$$j_0 > j_1 + 1, \quad N = j_0 + j_1 - (j_0 - j_1 - 1) + 1 = 2(j_1 + 1),$$
$$j_0 = j_1 + 1, \quad N = j_0 + j_1 + 1 = 2(j_1 + 1) = 2j_0,$$
$$j_0 < j_1 + 1, \quad N = j_0 + j_1 - (j_1 + 1 - j_0) + 1 = 2j_0.$$

Die Niveauzahl N ist also hier stets *gerade* im Gegensatz zum vorigen Paragraphen, wo die Niveauzahl stets *ungerade* war. *Allgemein wächst jetzt die Niveauzahl bei steigender Anregung j_1 in der Reihe der geraden Zahlen 2, 4, 6 ... bis zu dem permanenten Werte $2j_0$ an. Dieser permanente Wert wird zum erstenmal erreicht, wenn $j_1 + 1 = j_0$ ist, in welchem Falle als unterer Extremwert der inneren Quantenzahl*

$$j = |j_0 - j_1 - 1| = 0$$

auftritt. Bei weiter wachsender Anregung j_1 erhöht sich der Wert dieses unteren Extremums je um eine Einheit.

Im einzelnen ergibt sich die folgende Übersicht der möglichen Fälle:

Schema I.

		$j_0 = 1$	2	3
s	$j_1 = 0$	$j = 1\,(0)$	2 1	3 2
p	1	2 1	3 2 1 0	4 3 2 1
d	2	3 2	4 3 2 1	5 4 3 2 1 0
b	3	4 3	5 4 3 2	6 5 4 3 2 1

Unter der Rubrik $j_0 = 1$ ist das Niveauschema der Alkalien nochmals dargestellt. Nach unserer Systematik sollte hier die Niveauzahl N in allen Termen, den s-Term eingeschlossen, gleich 2 sein. Tatsächlich ist der s-Term bei den Alkalien einfach und besitzt die innere Quantenzahl $j = 1$. Wir haben daher den Wert $j = 0$ eingeklammert, indem wir uns vorstellen, daß er durch die hier vorliegenden besonderen Verhältnisse (Eindringen der s-Bahn in den Atomrumpf nach Schrödinger-Bohr) unmöglich gemacht wird. Im Gegensatz zu den Erdalkalien wird also die Einfachheit des s-Termes bei den Alkalien nicht durch unser allgemeines Schema ge-

währleistet. Sonst aber wird das Niveauschema der Alkalien durch die vorstehende erste Spalte unserer Übersicht wiedergegeben. Was sodann die zweite und dritte Spalte betrifft, so stellen diese die folgerichtigen geradzahligen Verallgemeinerungen des Niveauschemas der Alkalien dar, in demselben Sinne, wie die Chrom- und Manganstrukturen das ungeradzahlige Schema der Erdalkalien verallgemeinern. Speziell bei der zweiten Spalte ($j_0 = 2$) drängt sich uns ein gewisser Zusammenhang mit dem *Neonspektrum* auf.

Die von Paschen[1]) analysierten Neonterme ordnen sich bekanntlich in zwei Gruppen, eine Gruppe, welche der Ritzschen Formel genügt, eine zweite, welche ihr erst genügt, nachdem man den konstanten Betrag $A = 782$ cm^{-1} hinzugefügt hat. Nach Grotrian[2]) ist dieser Wert A zu deuten als Differenz der Röntgengrenzen $L_2 - L_1$; ein Term der ersten Gruppe entsteht, wenn eines der vier 2_2-Elektronen der L-Schale angeregt wird und aus seiner ursprünglichen inneratomaren Kreisbahn in eine äußere Bahn versetzt wird; ein Term der zweiten Gruppe liegt vor, wenn eines der vier 2_1-Elektronen aus seiner natürlichen inneratomaren Ellipsenbahn entfernt und in eine äußere Bahn geworfen wird.

Wir stellen die Serienterme in der Paschenschen Bezeichnung zusammen und schreiben unter jeden die innere Quantenzahl, die ihm Landé[3]) beilegen mußte, um die auftretenden Kombinationen mit unserer Auswahlregel (I) beherrschen zu können.

	Erste Gruppe (L_1)	Zweite Gruppe (L_2)
s	s_5 s_4 2 1	s_2 s_3 1 0
p	p_9 p_8 p_6 p_{10} p_7 p_3 3 2 2 1 1 0	p_4 p_2 p_5 p_1 2 1 1 0
d	d_4' d_1' d_4 d_1'' d_2 d_1 d_5 d_3 4 3 3 2 2 1 1 0	s_1''' s_1'''' s_1'' s_1' 3 2 2 1

Man erkennt: Bei den s- und p-Termen der ersten Gruppe treten hier genau dieselben j-Werte auf, wie in der zweiten

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 60. S. 405. 1919 u. 63. S. 201. 1920.
2) W. Grotrian, Zeitschr. f. Phys. 8. S. 116. 1921.
3) A. Landé, Physik. Zeitschr. 22. S. 417. 1921.

Spalte unseres Schemas L, ebenso bei den d-Termen, nur daß hier bei d_0 der Wert $j = 0$ hinzukommt. Von den Termen der zweiten Gruppe möge nur bemerkt werden, daß bei ihnen, ebenso wie bei den Termen der ersten Gruppe, die Niveauzahl durchweg gerade ist. Diese allgemeine Verwandtschaft mit den Alkalien ist um so überraschender, als die Stellung im periodischen System und der Charakter der Zeemaneffekte das Neonspektrum sonst vielmehr in Analogie zu den Erdalkalien als zu den Alkalien setzen. Genaueres wird sich erst sagen lassen, wenn eine systematische Untersuchung der Neon-Zeemaneffekte vorliegen wird.

§ 10. Spektroskopische Bestimmung paramagnetischer Momente.

Von größtem Interesse ist die Frage nach dem Zusammenhang unseres Eigenimpulsmomentes j_0 mit dem paramagnetischen Momente des betreffenden Atoms. Daß ein solcher Zusammenhang besteht, wird schon dadurch angezeigt, daß die Elemente Cr und Mn, an deren Spektren wir das Vorhandensein eines Momentes $j_0 > 1$ sicher nachweisen konnten, als Nachbarn der Eisengruppe gerade zu den Elementen mit paramagnetischen Ionen gehören.

Bei Mn dürfen wir den S-Term (vgl. § 3) nach seinen Temperatureigenschaften als Grundzustand ansehen. In diesem hat das Atom, wie aus den D- und B-Termen geschlossen werden konnte, die innere Quantenzahl $j_0 \geqq 3$. Wir schließen also, daß *das neutrale Mn-Atom in seinem unangeregten Zustande mindestens 3 Bohrsche Magnetonen besitzen* muß. In dem Zustande s, der den Kayser-Rungeschen Serien zugrunde liegt (§ 2) und einen angeregten Zustand bedeutet, ist nach obigem die Magnetonenzahl sogar noch um 1 höher.

Andererseits schlossen wir bei den von uns studierten Chromtermen D, B auf $j_0 = 2$. Wir wissen nicht, ob der in diese Termreihe gehörende S-Term den Grundzustand des Cr-Atoms bedeutet. Wenn dem so ist, so wäre zu schließen, daß *das neutrale Chromatom zwei Bohrsche Magnetonen besitzt.*

In diesem Zusammenhange glauben wir auch, daß die besondere Komplikation des Eisenspektrums mit den paramagnetischen Eigenschaften des Eisens in seinen verschiedenen Ionisierungszuständen zusammenhängt. In der Tat bedingt das

Vorhandensein paramagnetischer Momente — auf dem Wege über die räumliche Quantelung —, daß die Niveauzahl der verschiedenen Eisenterme erhöht und dadurch die Linienzahl vervielfacht wird.

Wir wollen diese *spektroskopischen* Bestimmungen jetzt mit den direkten *magnetischen* Bestimmungen der Magnetonenzahlen vergleichen. Allerdings sind nur die Magnetonenzahlen der Ionen, nicht die der neutralen Atome Cr, Mn usw. bekannt. Man kann aber nach einer wichtigen Kurve von Kossel[1]) zurückschließen von einem Ionisierungszustand auf einen anderen und von einem Element auf ein Nachbarelement.

Die folgende Tabelle gibt die Aussagen der Kosselschen Kurve wieder. Wir verstehen unter Z die effektive Elektronenzahl des Elementes in dem betreffenden Ionisierungszustande, setzen also $Z = 26$ für Fe, $Z = 24$ für Fe^{++}, $Z = 23$ für Fe^{+++} usw. Unter Z schreiben wir die neutralen Elemente und diejenigen Ionen, denen die effektive Elektronenzahl Z gemeinsam ist. Die nächste Reihe zeigt das Ergebnis der magnetischen Messungen in Weißschen Einheiten nach einer Zusammenstellung von Cabrera.[2]) Der springende Punkt ist dabei die Gleichheit der Magnetonenzahl für Cr^{++} und Mn^{+++}, sowie für Mn^{++} und Fe^{+++}. In der letzten Reihe endlich stehen die durch 5 dividierten, auf Bohrsche Einheiten abgerundeten Magnetonenzahlen.

$Z =$	21	22	23	24	25	26	27	28
	Sc Cr^{+++}	Ti Cr^{++} Mn^{+++}	V Mn^{++} Fe^{+++}	Cr Fe^{++}	Mn Co^{++}	Fe Ni^{++}	Co Cu^{++}	Ni Cu^{+}
Magnetonenzahl	19	24	29	26	25	16	10	0
	4	5	6	5	5	3	2	0

Wenn es erlaubt ist, von den Ionen auf die neutralen Atome zurückzuschließen (Kossel vermeidet diesen Schluß als zu unsicher), so würden dem neutralen Mn und Cr je 5 Magnetonen zukommen. Die Zahl 5 steht mit unserem spektro-

1) W. Kossel, Ann. d. Phys. 49. S. 261. 1916.

2) B. Cabrera, Anales de la Sociedad espanola de Fisica y chimica 20. S. 92. 1922.

skopischen Ergebnis $j_0 \geqq 3$ bei Mn nicht im Widerspruch. Bei Cr wäre die Zahl 5 mit unserem Ergebnis $j_0 = 2$ nur dann verträglich, wenn der zu $j_0 = 2$ gehörende spektroskopische *S*-Zustand nicht der natürliche Atomzustand wäre.

Im übrigen erheben sich gegen unsere ganze Betrachtung alle die Bedenken, die heutzutage die Theorie des Magnetismus verdunkeln. Ist es erlaubt, die Langevinsche Formel, die bei der Berechnung der obigen Magnetonenzahlen benutzt wurde, auf die Ionen in Lösung anzuwenden, oder kommt hier, ebenso wie in Gasen, räumliche Quantelung ins Spiel? Der Umstand, daß die Magnetonenzahlen in Weißschen Einheiten keine Vielfachen von 5 sind, läßt dies vermuten. Ist das magnetisch gemessene Impulsmoment überhaupt mit dem mechanisch gemessenen Impulsmoment zu identifizieren? Bohr leugnet dies bekanntlich, wenn er sein Parheliummodell aufstellt; und die Versuche von Einstein-de Haas und ihrer Nachfolger machen es mindestens zweifelhaft. Es lag uns gerade daran, zu zeigen, daß die spektroskopischen Ergebnisse zu diesen heutzutage brennendsten Fragen des Magnetismus vielleicht einen Beitrag zu liefern vermögen.

(Eingegangen 20. August 1922.)

3. *Dielektrizitätskonstanten einiger wäßriger Lösungen und ihre Deutung nach der Dipoltheorie von Debye.*

Mit einem Anhang: Dielektrizitätskonstanten einiger biologisch und technologisch interessanter Stoffe);

von Reinhold Fürth.

§ 1.

Im Verlaufe einer Untersuchung über Dielektrizitätskonstanten biologisch und technologisch interessanter Stoffe, die ich auf Veranlassung von Hrn. Rudolf Keller, Prag, unternommen hatte, ergab sich unter anderem eine Reihe von Gesetzmäßigkeiten betreffend die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von (kristalloiden und kolloiden) Lösungen von ihrer Konzentration. Da einerseits in der Literatur Ergebnisse dieser Art bis jetzt nur spärlich vorliegen und anderseits sich aus den Resultaten einige Hinweise auf die Konstitution der untersuchten Dielektrika, insbesondere im Hinblick auf die Dipoltheorie von Debye, entnehmen lassen, sollen dieselben im folgenden nach einer kurzen Beschreibung der Versuchsanordnung und -methodik wiedergegeben werden. Es wird dann versucht, eine qualitative Erklärung der beobachteten Erscheinungen an Hand der Debyeschen Theorie zu geben.

Die mitgeteilten Ergebnisse sind nur als vorläufige Orientierung anzusehen; die Untersuchung soll in nächster Zeit sowohl was die Auswahl der Stoffe anlangt als auch die Abhängigkeit ihrer Dielektrizitätskonstenten von Temperatur und Wellenlänge, wesentlich ausgedehnt und eine genauere theoretische Fundierung versucht werden.

Die weiteren Resultate, die sich nicht auf Lösungen beziehen, aber mit derselben Versuchsanordnung erhalten wurden, werden im Anhange mitgeteilt. Die Auswahl dieser Stoffe ist von Hrn. Keller getroffen worden, wobei vornehmlich biologische Gesichtspunkte leitend waren. Die Ergebnisse scheinen biologisch nicht ohne Interesse zu sein; auf ihre Dis-

kussion muß ich als Nichtfachmann jedoch verzichten und verweise auf die diesbezüglichen Publikationen von Hrn. Keller.[1])

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Keller für seine wertvolle Unterstützung und Frl. cand. med. N. Weigner für ihre Mithilfe bei den Versuchen meinen besten Dank auszusprechen.

§ 2.

Da bei fast allen untersuchten Substanzen die Leitfähigkeit relativ groß war, konnte zur Messung der Dielektrizitätskonstanten nur eine mit sehr schnellen Schwingungen arbeitende Methode in Betracht kommen. Eine Reihe fehlgeschlagener Versuche ergab schließlich, daß als einzig brauchbare Methode nur die von Drude übrig blieb und zwar, da immer nur verhältnismäßig sehr geringe Mengen von Substanz zur Verfügung standen, die sogenannte 2. Drudesche Methode[2]), bei der die Kapazität eines mit der Substanz gefüllten kleinen Kondensators durch Resonanzbestimmung an einem Lecherschen Drahtsystem gemessen wird.

Der verwendete Apparat war dem Drudeschen im wesentlichen nachgebildet: Die Wellenenergie wurde von einem kleinen Teslatransformator geliefert, der primär von einem Funkeninduktor gespeist wurde. Der letztere wurde mit Gleichstrom erregt, der durch einen rotierenden Unterbrecher mit Quecksilberkontakt in variierbarem Tempo unterbrochen wurde. Der Blondlotsche Erreger war etwas größer dimensioniert als der Drudesche, aber sonst ebenso gebaut; er lag samt dem ihn konzentrisch umgebenden Koppelungskreis in Petroleum. Die Distanz der Kugeln, sowie der Zuführungsdrähte zu denselben konnte mikrometrisch fein reguliert werden. Das Paralleldrahtsystem bestand aus zwei Stahlröhrchen von 2,5 mm Dicke und 48 cm Länge im Abstande von 2 cm, die durch eingeschobene Kupferdrähte posaunenartig verlängert werden konnten. Die Enden dieser Verlängerungsdrähte führten wie bei Drude zu dem Meßkondensator, ihre Stellung konnte mit einem Zeiger an einer in mm geteilten Skala abgelesen werden. Der erste Knoten wurde, wie üblich, durch eine über

1) R. Keller, Biochem. Zeitschr. **115**. S. 134. 1921; Kolloid. Zeitschr. **29**. S. 194. 1921.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. **61**. S. 466. 1897.

die Röhrchen gelegte geerdete Drahtbrücke festgelegt. Die Resonanz wurde an dem maximalen Aufleuchten einer über das Drahtsystem an der Stelle des ersten Bauches gelegten Heliumröhre erkannt.

Die Wellenlänge blieb bei allen Messungen bis auf kleine Schwankungen konstant und betrug in Luft ca. 76 cm.

Die Meßkondensatoren hatten die Form der Fig. 1 (natürliche Größe, die Elektroden bestanden aus Stahldrähten von 0,7 mm Stärke, die durch den Hartgummiverschluß des Röhrchens hindurchtraten und mit ihren Enden in zwei kleine Quecksilbernäpfchen eintauchten, die mit den Enden der verschiebbaren Kupferdrähte in Verbindung standen. Es kamen je nach der untersuchten Substanz Kondensatoren mit verschiedenem Abstand der Elektroden und daher verschiedener Kapazität in Verwendung. Diese Form der Kondensatorgefäße hatte den Vorteil, bei sehr kleinem Volumen ein sehr rasches Wechseln der Substanzen zu ermöglichen, selbst wenn sich dieselben im zähflüssigen Zustande befanden, ohne eine Verschiebung oder Verbiegung der Elektroden befürchten zu müssen.

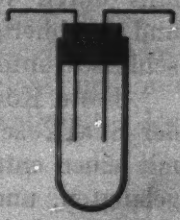


Fig. 1.

§ 3.

Die Eichung des Apparates erfolgte stets durch Füllung des Kondensators mit einer Anzahl von Flüssigkeiten bekannter Dielektrizitätskonstanten und zwar stets vor und nach Anstellung einer Meßreihe für eine größere Anzahl von Punkten, da es sich herausstellte, daß durch geringfügige Verschiebungen an der Funkenstrecke des Erregers und an der Stellung der Brücke oder Röhre, sowie durch Änderung der Stromstärke im Primärstrom und seiner Wechselzahl, die Eichung sich nicht unwesentlich veränderte, was auf Änderung der Wellenlänge und der Knoten zurückzuführen ist.

Als Eichflüssigkeiten dienten, für hohe Dielektrizitätskonstanten Mischungen von Wasser und Äthylalkohol, nach den Messungen von Nernst und Tereschin und für niedere Dielektrizitätskonstanten Mischungen von Benzol und Äthylalkohol nach Coolidge[1]), welche Mischungen fast genau die

1) W. Nernst, Ztschr. f. phys. Chem. **14**. S. 622. 1894; Tereschin, Ann. d. Phys. **36**. S. 801. 1889; W. D. Coolidge, Ann. d. Phys. **69**. S. 150. 1899.

Silbersteinsche Mischregel[1]) (nach Volumprozenten der Komponenten) befolgen.

Bei der Messung von Flüssigkeiten wurde der Kondensator völlig mit der Substanz gefüllt; handelte es sich dabei um gelatinöse Körper, die bei großen Konzentrationen außerordentlich zäh sind, so wurden sie in heißem Zustand in den Kondensator gefüllt, in dem man sie erstarren ließ.

Substanzen von schmieriger Struktur ließen sich ebenfalls durch völliges Anfüllen des Fläschchens mit derselben und nachheriges Einpressen der Elektroden und des Verschlusses untersuchen.

Feste Körper wurden möglichst fein pulverisiert und nach der Starkeschen Methode so untersucht, daß sie gleichzeitig mit einer entsprechenden Eichflüssigkeit in den Kondensator gelangten, und die letztere so lange verändert wurde, bis die Kapazität bei dieser Füllung die gleiche war, wie bei Füllung mit der Eichflüssigkeit allein.

Da nach Drude die Leitfähigkeit der Substanz ebenfalls einen Einfluß auf die Resonanzstellung hat, muß diese im allgemeinen berücksichtigt werden. Eigens zu diesem Zwecke angestellte Versuche mit verdünnter Salzsäure bis zu $^1/_{20}$ normaler Konzentration ergaben, daß bis zu dieser Konzentration die Resonanzstellung von der Leitfähigkeit praktisch unabhängig ist. Da alle untersuchten Substanzen eine wesentlich kleinere Leitfähigkeit besaßen, braucht man sich um diese also nicht zu kümmern. Dafür spricht übrigens das bei allen Versuchen fast unverändert gute Leuchten der Heliumröhre, was nach Drude ein Anzeichen von sehr schwacher Absorption der elektrischen Wellen ist.

Jede Messung wurde infolge des ziemlich großen Fehlers beim Einstellen auf maximales Leuchten der Röhre sehr oft, in der Regel 40 mal gemacht und daraus das Mittel genommen. Ebenso oft erfolgte bei jedem Versuche die Eichung an etwa 10 Punkten.

Die Temperatur betrug bei allen Messungen etwa 20° C.

§ 4.

Ich gebe nun zunächst die Resultate der Beobachtungen an wäßrigen Lösungen. Die Konzentration ist dabei durch-

1) L. Silberstein, Ann. d. Phys. 56. S. 661. 1895.

wegs in Gewichtsprozenten der gelösten Substanz bezogen auf das Gewicht der Lösung ausgedrückt.

Bei der Meßreihe Nr. 1 gebe ich das Protokoll in extenso wieder, bei den folgenden Meßreihen sind nur die Schlußresultate angegeben. Es bedeutet dabei l die auf dem Maßstab des Apparates abgelesene Länge, gemessen von einem willkürlichen Anfangspunkt.

Nr. 1. Dextrose (Traubenzucker).

(Es wurden zwei Meßreihen mit verschiedenen Kondensatoren und etwas verschiedener Wellenlänge angestellt. Jedesmal wurde mit Alkohol-Wassermischungen geeicht und aus den Eichkurven die Dielektrizitätskonstanten bestimmt. Die l sind Mittel aus je 20 Messungen.)

Meßreihe I.

Eichung			Messung		
Vol. % Alkohol	l	ε	Gew. % Dextrose	l	ε
0	9,71	80,5	9,1	11,13	68
	9,59		16,6	12,28	57
20	11,04	68,5	23,1	12,63	52,5
40	12,17	57,7	28,6	13,03	48
60	13,47	46,5	33,3	13,96	38,5
80	14,21	35,5			
100	15,02	26,0			
Benzol	17,25	2,3			

Meßreihe II.

Eichung			Messung		
Vol. % Alkohol	l	ε	Gew. % Zucker	l	ε
0	9,22	80,5	9,1	10,47	71,5
	8,77		16,6	11,58	62,0
20	10,92	68,5	23,1	12,90	47,0
40	11,96	57,7	28,6	13,44	38,5
60	12,77	46,5	33,3	13,47	38,0
80	13,79	35,5			
100	14,32	26,0			
Benzol	17,79	2,3			
leer	19,56	1,0			

Dazu noch eine spätere Messung mit Eichung von Nr. 10 an Dextroselösung mit 44,4 Proz. Dextrose.

Mittelwerte.

Gew. % Dextrose	ε
0,0	80,5
9,1	70,0
16,6	59,5
23,1	49,5
28,6	44,0
33,3	38,0
44,4	26,0

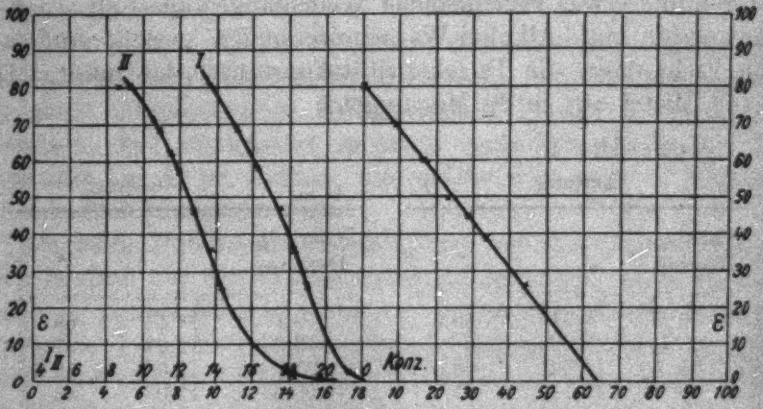


Fig. 2.

Nr. 2. Dextrose (Traubenzucker) fest.

$$\varepsilon = 2{,}2 \pm 0{,}2$$

Nr. 3. Lävulose (Kahlbaum, aus Inulin).

Gew. % Lävulose	ε
0,0	80,5
9,1	71,5
16,6	64,5
23,1	54
28,6	45
33,3	41
37,5	34,5

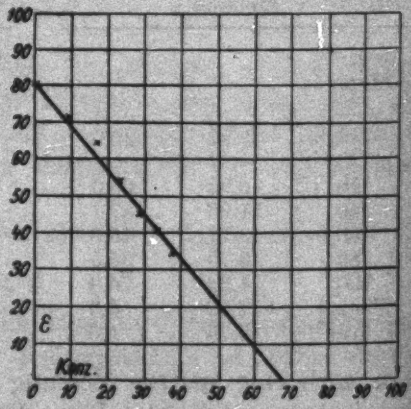


Fig. 3.

Nr. 4. Lävulose (das gleiche Präparat wie bei Nr. 3) fest.

$$\varepsilon = 2{,}2 \pm 0{,}2$$

Nr. 5. Rohrzucker.

Gew. % Zucker	ε
0,0	80,5
10	79,5
20	74
30	67
40	60
50	49
60	39

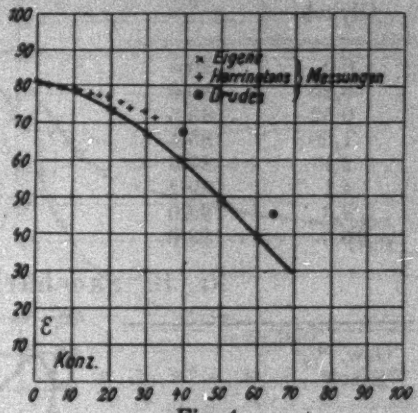


Fig. 4.

Zum Vergleich sind in die Fig. 4 die Messungen von Harrington[1]), sowie die zwei Werte von Drude[2]) eingetragen, die sämtlich oberhalb unserer Kurve liegen. Die Ursache dieser Unstimmigkeit erscheint fraglich.

Nr. 6. Rohrzucker fest.

$$\varepsilon = 4{,}9 \pm 0{,}2$$

Nr. 7. Carbamid (Harnstoff).

Gew. % Carbamid	ε
0,0	80,5
0,99	80,3
1,96	80,0
2,91	82,2
3,84	83,1
4,76	85,0
9,1	85,7
16,6	87,5
23,1	88,6
28,6	88,8
33,3	90,5
37,5	90,9
44,8 (ges.)	91,0

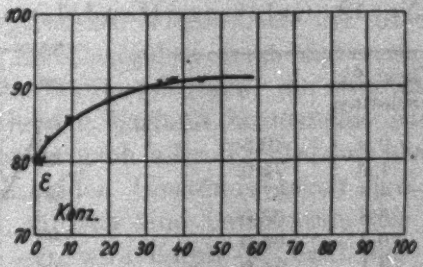


Fig. 5.

1) E. A. Harrington, Phys. Rev. 8. S. 581. 1916.
2) P. Drude, Ztschr. f. phys. Chem. 23. S. 267. 1897.

Nr. 8. Carbamid fest. $\varepsilon = 8{,}5 \pm 0{,}2$.

Nr. 9. Glykokoll (Merck).

Gew. % Glykok.	ε
0,0	80,5
0,26	80,5
0,52	83,5
1,00	85,4
2,1	87,3
4,1	89,2
8,3	92,0
16,6	93,0

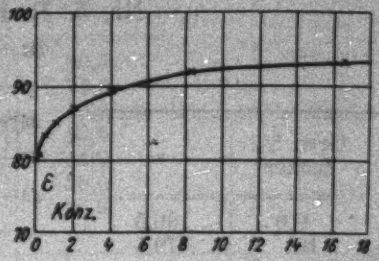


Fig. 6.

Nr. 10. Saccharin (krist.)

Gew. % Sacch.	ε
0,0	80,5
0,05	84
0,10	84
0,25	89,5
0,50	86,2
0,75	81,0
1,0	77,2
1,5	74,8
2,0	72,5
5,0	66
10,0	57,5
20,0	47,5
30,0	38,5

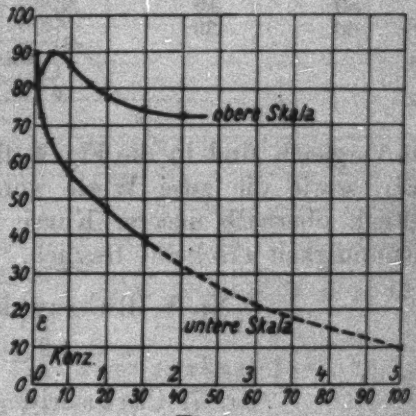


Fig. 7.

Nr. 11. Saccharin (krist.) fest. $\varepsilon = 9{,}5 \pm 0{,}5$.

Nr. 12. Gelatine (Handelsware Qualité superfine).

Gew. % Gelatine	ε
0,0	80,5
1,9	74,0
4,8	67,5
5,8	66,0
6,7	66,0
9,1	61,0
9,1	65,0
13,0	58,0
16,6	53,0
16,6	51,5
30,0	48,0
50,0	44,0
100,0	5,6 (siehe Nr. 13)

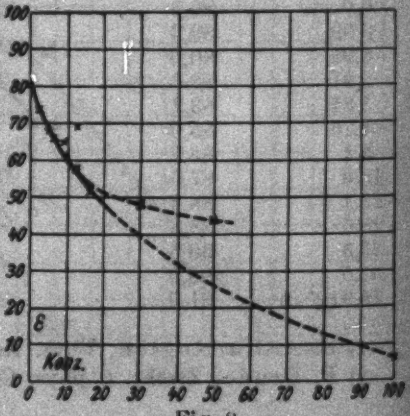


Fig. 8.

Nr. 13. Gelatine (dasselbe Präparat wie Nr. 12) fest.

$$\varepsilon = 5{,}6 \pm 0{,}2$$

Nr. 14. Albumin (Kahlbaum, aus Ei).

Gew. % Albumin	ε
0,0	80,5
0,24	76
0,47	69,5
0,94	67,5
0,87	58,5
3,75	52,2
7,5	45,0
15,0	32,8

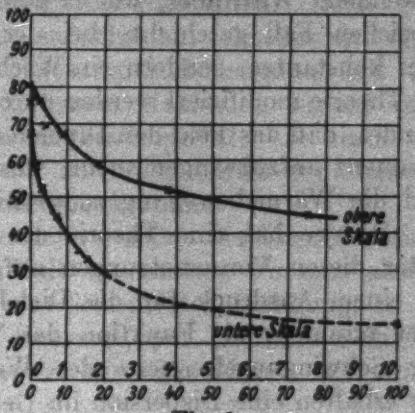


Fig. 9.

Nr. 15. Albumin (dasselbe Präparat wie Nr. 14) fest.

$$\varepsilon = 16{,}3 \pm 0{,}2$$

§ 5.

Die Debyesche Theorie der Dielektrika[1]) beruht bekanntlich auf der Annahme, daß sich in den Molekülen der dielektrischen Substanzen feste Dipole vorfinden. Bringt man ein solches Dielektrikum in ein homogenes Feld, so richten sich die Dipole unter dem Einfluß der Feldkräfte, die zum Teil aus der Feldstärke des äußeren Feldes, zum Teil aus den von den Dipolen selbst hervorgerufenen Feldkräften des inneren Feldes bestehen. Diesem Richtbestreben setzt sich nun die Wärmebewegung der Dipolmoleküle entgegen, die den wahrscheinlichsten Zustand, d. h. den Zustand herzustellen sucht, bei dem die Achsen der Dipole nach allen Richtungen gleichmäßig verteilt sind. Diese beiden Umstände geben nun ein statistisches Gleichgewicht, nämlich eine Polarisation des Dielektrikums, das bestimmt sein wird durch die Zahl und das Moment der Dipole, sowie durch die Intensität der Wärmebewegung und die Stärke des äußeren Feldes. Da für nicht zu starke Felder eine der Feldstärke proportionale Polarisation

1) P. Debye, Phys. Ztschr. 13. S. 97. 1912.

herauskommt, ergibt sich ein definierter Wert der Dielektrizitätskonstanten.

Diese Theorie läßt sich nun zunächst bloß auf die „statische" Dielektrizitätskonstante, bei konstantem äußerem Felde anwenden. Wird aber, wie es gewöhnlich und auch in diesem speziellen Fall geschieht, bei der Bestimmung dieser Größe kein konstantes, sondern ein Wechselfeld angewendet, so muß die Theorie modifiziert werden durch Berücksichtigung des Umstandes, daß das Feld den Dipolen eine Schwingung bestimmter Frequenz aufzuzwingen sucht, was die inneren Reibungskräfte und die Wärmebewegung zu verhindern streben.

Debye hat eine Theorie der Dielektrika im Wechselfeld unter diesen Voraussetzungen aufgestellt[1]) und kommt dabei zu einem Ausdruck für die Dielektrizitätskonstante, der sich aber nunmehr als Funktion der Viskosität des Mediums und der Schwingungsfrequenz des Wechselfeldes darstellt, d. h. wir erhalten eine Dispersion im Gebiete der langen elektrischen Wellen, wie sie für viele Körper ja tatsächlich beobachtet wird.

Was die Abhängigkeit von der Frequenz anlangt, ergibt die Theorie im wesentlichen, wie am Beispiel des Wassers näher ausgeführt wird, eine Abnahme der Dielektrizitätskonstanten mit wachsender Frequenz (also anomale Dispersion), im Gebiete der langen Wellen, was, wie man leicht sieht, aus der oben angenommenen Beeinflussung durch die Zähigkeit hervorgerufen wird, da bei immer größer werdender Frequenz die Dipole den Feldschwingungen immer schwerer zu folgen vermögen und daher ihre Amplitude immer mehr abnimmt, und damit die Polarisation.

Hier kommt es uns aber nicht wie bei Debye auf die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von der Frequenz an, sondern von der Konzentration bei wäßrigen Lösungen, und da können wir nun, zunächst rein qualitativ, sofort folgende Schlüsse aus der Theorie ziehen.

Verfolgen wir einmal den Vorgang der Bewegung der Dipole bei allmählicher Vergrößerung der Konzentration der Lösung. Nehmen wir zunächst an, daß das Dipolmoment der gelösten Substanz, bezogen auf die Gewichtseinheit derselben, größer sei als für das Lösungsmittel. Es wird dann eine Erhöhung der Konzentration zunächst eine Erhöhung der Dielektrizitäts-

1) P. Debye, Verh. d. D. Phys. Ges. 15. S. 777. 1913.

konstanten der Lösung bewirken müssen. Nun wächst aber im allgemeinen auch die Zähigkeit der Lösung mit wachsender Konzentration, und zwar um so stärker (nach Arrhenius[1]) exponentiell), je größer die Konzentration ist. Dies bewirkt eine Verkleinerung der Dielektrizitätskonstanten. Beide Umstände zusammen werden also zunächst ein schnelles und dann langsames Ansteigen der Dielektrizitätskonstanten mit der Konzentration ergeben, bis zu einem Maximum, worauf dann ein immer steiler werdendes Sinken einsetzt. Je nach der Stärke der Dipolmomente und nach der Größe der Reibung wird nun die Lage des Maximums wechseln.

Fällt das Maximum ins negative Gebiet der Konzentration, oder auf die Konzentration Null, so erhalten wir eine absteigende Kurve (Typus I), fällt es jenseits der Sättigung, so erhalten wir eine aufsteigende Kurve (Typus II), fällt es ins erreichbare Gebiet, dann erhalten wir eine Kurve mit einem Maximum (Typus III).

Ist das Dipolmoment der gelösten Substanz kleiner als das des Lösungsmittels, so wird die Kurve unter allen Umständen abfallen (Typus I).

Wir sehen nun in der Tat alle drei Typen an den von uns untersuchten Substanzen realisiert, und zwar Type I an den Zuckerarten, Type II an Glykokoll und Carbamid, Type III an Saccharin.

Wir sehen ferner, daß beim Rohrzucker, dessen Molekül sich ja aus je einem Molekül Dextrose und Lävulose zusammensetzt, und der daher wahrscheinlich ein höheres Dipolmoment besitzt, als seine Komponenten, der obigen Entwicklung entsprechend, der Abfall der Dielektrizitätskonstanten mit wachsender Konzentration langsamer erfolgt als für seine Bestandteile.

Wird die Zähigkeit sehr groß, so können wir Debyes[2]) Formel (18) nach Potenzen von ε entwickeln und erhalten für genügend lange Wellen und große Viskosität annähernd die Formel

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_\infty^2 + \frac{a}{\varrho^2},$$

1) S. Arrhenius, Ztschr. f. phys. Chem. 1. S. 285. 1897
2) P. Debye, l. c. S. 791.

worin ε_∞ die Dielektrizitätskonstante für langsame Schwingungen und ϱ die Reibungskraft bedeutet. Das ist eine Abhängigkeit des ε von der Viskosität, von der Gestalt der Fig. 10.

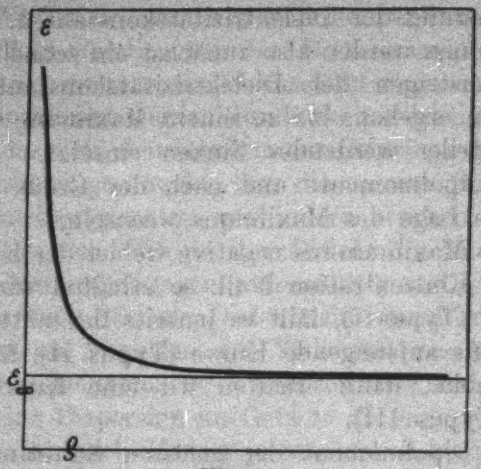


Fig. 10.

Das stimmt nun aber sehr gut überein mit unseren Resultaten an kolloiden Stoffen nach Art der Gelatine- und Albuminlösungen, die ja bekanntlich eine sehr starke Erhöhung der Zähigkeit mit wachsender Konzentration aufweisen. Da sich weiter bei diesen Substanzen die Zähigkeit sehr stark mit der Temperatur ändert, ist zu erwarten, daß man hier eine sehr abnormale Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten erhalten wird. Versuche in dieser Richtung sind bis jetzt noch nicht angestellt worden, sind aber in Vorbereitung.

Wir bemerken ferner, daß im allgemeinen bei kristalloiden Lösungen die Dielektrizitätskonstanten der festen Substanz eine singuläre Stellung einnimmt, und daß die Dielektrizitätskonstanten der Lösung keineswegs gegen die Dielektrizitätskonstanten der festen Körper hinzielt, während bei den kolloiden Substanzen scheinbar ein kontinuierlicher Übergang von der Lösung zur festen Substanz existiert. Auch das steht mit den obigen Überlegungen in gutem Einklang. Denn bei kristallisierenden Substanzen ist der Zustand des festen Kristalls mit dem der Lösung gar nicht zu vergleichen, da im festen Körper die Dipole in regelmäßigen Gittern angeordnet sind, und daher Kräfte ganz anderer Art aufeinander ausüben, als

in der Lösung, wo sie ungeordnet sind, während bei einem kolloiden Körper alle möglichen Übergänge zwischen fest und flüssig existieren und das Gel ganz allmählich in das Sol übergeht. Damit hängt jedenfalls auch die Tatsache der beschränkten Löslichkeit der kristalloiden Stoffe zusammen.

Man hat für die Dielektrizitätskonstanten von Mischungen und Lösungen eine Reihe von Mischformeln aufgestellt[1]), die sich bei manchen Substanzen recht gut, bei manchen schlecht oder gar nicht bewährt haben. Alle diese Formeln gehen von der Voraussetzung aus, daß die gemischten oder gelösten Körper eine definierte „eigene Dielektrizitätskonstante" haben und daß sie dielektrisch sich gegenseitig nicht beeinflussen. Das wird nun aber nach unserer obigen Auffassung jedenfalls bloß vereinzelt der Fall sein, im allgemeinen müssen wir uns vorstellen, daß die Dipole der beiden Substanzen sich gegenseitig bei ihren Bewegungen beeinflussen und daher der Verlauf der Abhängigkeit ein wesentlich anderer sein wird, als nach jener primitiven Annahme. Man muß daher bei Abweichungen von der Mischregel keineswegs, wie mitunter angenommen wurde, an eine gegenseitige chemische Beeinflussung der gelösten Substanzen denken.

Verfehlt scheint es insbesondere nach dem Obigen, aus der gemessenen Dielektrizitätskonstante einer Lösung und des Lösungsmittels nach einer der Mischformeln die „Dielektrizitätskonstante der gelösten Substanz" auszurechnen.[2]) In der Tat erhält man so Werte, die von der Dielektrizitätskonstante der festen Substanz völlig verschieden sind, im allgemeinen abnorm hohe, und zwar nach den verschiedenen Mischregeln verschiedene Werte, die noch dazu gar nicht konstant sind, sondern sich mit der Konzentration ändern. Nach unseren oben entwickelten Anschauungen hat es gar keinen Sinn, von der Dielektrizitätskonstante der gelösten Substanz im Zustande der Lösung zu sprechen, da die Dielektrizitätskonstante der Lösung durch eine ganze Anzahl von Umständen bestimmt wird, die einer Wechselwirkung der Moleküle der beiden Komponenten zuzuschreiben sind. Ich hoffe, in nächster Zeit eine genauere Theorie der Dielektrizitätskonstanten

1) U.a. J.C. Philip, Ztschr. f. phys. Chem. 18. S. 18. 1897; L. Silberstein, l. c

2) H. Walden, Bull. Petersburg, 1912. S. 305, 1055.

von Lösungen auf Grund der hier entwickelten Anschauungen geben zu können.

Schließlich scheint auch das Verhalten von Elektrolyten mit diesen Voraussetzungen in gutem Einklang zu sein.[1]) Drude hat gefunden, daß Salzlösungen geringer Konzentration die Dielektrizitätskonstante des Wassers nicht merklich beeinflussen, bei starken Konzentrationen dieselbe dagegen erhöhen. Damit im Einklang stehen die bereits erwähnten eigenen Messungen an verdünnten Lösungen von Salzsäure, die bis zu Konzentrationen von ca. $^1/_{20}$ normal die Dielektrizitätskonstante des Wassers nicht wesentlich beeinflußte. Auch Nernst hat mit seiner Methode an verschiedenen Elektrolyten bei schwachen Konzentrationen nur unwesentliche Erhöhungen der Dielektrizitätskonstanten des Wassers erhalten. Hiergegen zeigen die Messungen von Smale nach der Elektrometermethode eine auffallend starke Erhöhung der Dielektrizitätskonstanten schon bei sehr kleinen Konzentrationen, während de Forest Palmer nach einer ähnlichen Methode ebenfalls bis zu recht großen Konzentrationen an verschiedenen Elektrolytlösungen keinen Unterschied gegenüber der Dielektrizitätskonstante des reinen Wassers findet. Die Ursache dieser Divergenz erscheint zweifelhaft. Jedenfalls ist den Methoden mit sehr raschen Schwingungen (Drude) das größere Gewicht beizulegen.

Nun ist bei schwachen Konzentrationen der größte Teil der Elektrolytmoleküle dissoziiert. Nach den heutigen Ansichten über den Bau der Atome und Ionen müssen wir uns nun vorstellen, daß ein Elektrolytion im allgemeinen eine sehr symmetrische Gestalt besitzt und daher ein sehr kleines Dipolmoment aufweist. Es wird also durch diese Ionen die Dielektrizitätskonstante des Wassers nur sehr wenig beeinflußt werden.

Bei steigender Konzentration geht nun aber die Dissoziation immer mehr zurück und es bilden sich immer mehr undissozierte Moleküle, die aus Ionen mit entgegengesetzten Ladungen bestehen, also wahrscheinlich starke Dipole sind. Es muß also bei höheren Konzentrationen die Dielektrizitäts-

1) P. Drude, l. c.; W. Nernst, Ann. d. Phys. **60.** S. 612. 1897; F. J. Smale, Ann. d. Phys. **60.** S. 625. 1897; A. de Forest-Palmer Ir., Phys. Rev. **14.** S. 38. 1902.

konstante ansteigen. Dafür sprechen auch die Beobachtungen von Walden[1]), der nach der Drudeschen Methode gefunden hat, daß in schwach dissoziierenden Lösungsmitteln Elektrolyte beträchtliche Erhöhung der Dielektrizitätskonstante bewirken.

Er bemerkt ferner, daß von den untersuchten Haloidsalzen die binären weit weniger wirksam waren als die ternären, was sich unseren Anschauungen zwanglos einordnet, da aller Wahrscheinlichkeit nach das Dipolmoment von CaJ_2 beispielsweise wesentlich kleiner sein wird, als das von NaJ, weil in ersterem zwei symmetrisch gebundene negative Ladungen enthalten sind, im letzteren dagegen nur eine.

Auch diese Gesetzmäßigkeiten sollen in der Folge näher untersucht werden.

Anhang.

Dielektrizitätskonstanten einiger biologisch und technologisch interessanter Stoffe.[2])

A. Kolloide Farbstoffe in fester Form.

Nr. 16. Nachtblau
$\varepsilon = 4{,}4 \pm 0{,}2$

Nr. 17. Kongorot
$\varepsilon = 20{,}0 \pm 0{,}3$

Nr. 18. Methylenblau
$\varepsilon = 18{,}1 \pm 0{,}2$

Nr. 19. Druckerschwärze (Werkdruckfarbe)
$\varepsilon = 14{,}5 \pm 0{,}2$

B. Papiersorten.

Nr. 20. Papier ungeleimt
$\varepsilon = 3{,}4 \pm 0{,}2$

Nr. 21. Papier geleimt
$\varepsilon = 4{,}2 \pm 0{,}2$

C. Einige biologisch wichtige Substanzen.

Nr. 22. Stärke
$\varepsilon = 11{,}6 \pm 0{,}2$

---

1) H. Walden, l. c.

2) Die nähere Diskussion dieser Ergebnisse wird von H. R. Keller demnächst an anderer Stelle gegeben werden.

Nr. 23. Dextrin (Kahlbaum)

$\varepsilon = 8{,}0 \pm 0{,}2$

Nr. 24. Casein (techn. Kahlbaum)

$\varepsilon = 8{,}0 \pm 0{,}2$

Nr. 24. Hämoglobin (Kahlbaum)

$\varepsilon = 14{,}2 \pm 0{,}2$

Nr. 26. Cholesterin (Braun)

$\varepsilon = 5{,}4 \pm 0{,}2$

Nr. 27. Lecithin (Kahlbaum, aus Eigelb)

$\varepsilon = 13{,}0 \pm 0{,}5$

Nr. 28. Lecithin (das gleiche Präparat) in Wasser emulgiert

Gew. % Lecithin	ε
0,075	77,5
0,15	74

Nr. 29. Pepsin in Wasser gelöst

Gew. % Pepsin	ε
1	78,5
2	76,0

Nr. 30. Trypsin in Wasser gelöst

Gew. % Trypsin	ε
0,25	81,5
0,5	84
0,0	87,0

D. Blut und Serum.

Nr. 31. Menschliches Blut (vor dem Gerinnen)

$\varepsilon = 85{,}5 \pm 0{,}5$

Nr. 32. Menschliches Blutserum
(nach Zentrifugieren von Nr. 31)

$\varepsilon = 85{,}5 \pm 0{,}5$

Nr. 33. Menschlicher Blutkuchen

(der beim Zentrifugieren von Nr. 31 gebliebene feste Bodensatz nach vollständigem Trocknen und Pulverisieren)

$$\varepsilon = 84{,}0 \pm 1{,}0$$

Nr. 34. Vergleich von menschlichem Blut und Serum.

Blut von einem anderen Individuum wurde auf dieselbe Weise behandelt wie Nr. 31 bis 33 und ergab identische Dielektrizitätskonstante, woraus folgt, daß auch für dieses Individuum Blut, Serum und Blutkuchen die gleiche Dielektrizitätskonstante haben.

Nr. 35. Pferdeserum

$$\varepsilon = 85{,}0 \pm 0{,}5$$

Nr. 36. Diphterieheilserum.

Ergab bei Vergleichung mit Nr. 35 identische Dielektrizitätskonstanten innerhalb der Fehlergrenzen.

Nr. 37. Meerschweinchenserum

$$\varepsilon = 85{,}2 \pm 0{,}5$$

Nr. 38. Ringersche Lösung und Nr. 39. Tyrodesche Lösung.

Zwei Lösungen, die die gleiche Ionenkonzentration haben wie normales Blut, zeigten innerhalb der Fehlergrenzen keinen Unterschied ihrer Dielektrizitätskonstanten gegen Wasser, woraus hervorgeht, daß bei den vorstehenden Messungen der Elektrolytgehalt keine Rolle spielen kann.

Aus Nr. 31 bis 37 geht hervor, daß Blut, Serum und Blutkuchen bei Mensch und anderen Säugetieren die gleiche Dielektrizitätskonstante 85,5 haben.

Nr. 40. Inaktivierte Sera (Mensch).

Eine Partie des Serums blieb ungeändert (a), eine zweite wurde eine halbe Stunde lang auf 50° C erhitzt (b), eine dritte eine halbe Stunde lang geschüttelt (c).

$$\text{a} \cdot \cdot \cdot \quad \varepsilon = 85{,}5 \pm 1{,}0$$
$$\text{b} \cdot \cdot \cdot \quad \varepsilon = 83{,}3 \pm 1{,}0$$
$$\text{c} \cdot \cdot \cdot \quad \varepsilon = 81{,}9 \pm 1{,}0$$

Nr. 41. Inaktivierte Sera (Meerschweinchen).

Das Serum von Nr. 37 wurde in gleicher Weise behandelt wie bei Nr. 40.

a . . . $\varepsilon = 85{,}2 \pm 0{,}5$
b . . . $\varepsilon = 82{,}8 \pm 0{,}5$
c . . . $\varepsilon = 82{,}8 \pm 0{,}5$

Also übereinstimmend mit Nr. 40.

Nr. 42. Fraktionen des menschlichen Serums.

Das Serum wurde in üblicher Weise mit Ammoniumsulfat in die „Albuminfraktion" und die „Globulinfraktion" gespalten.

Normal . . . . . $\varepsilon = 85{,}5 \pm 1{,}0$
Albuminfraktion . . $\varepsilon = 82{,}4 \pm 1{,}0$
Globulinfraktion . . $\varepsilon = 85{,}2 \pm 1{,}0$

E. Tierische und pflanzliche Gewebssubstanzen und Sekrete.

Nr. 43. Menschlicher Harn

$\varepsilon = 82{,}8 \pm 0{,}2$

Nr. 44. Menschliche Milch

$\varepsilon = 75 \pm 2{,}0$

Nr. 45. Kuhmilch und -Sahne

Milch . . . . . $\varepsilon = 66 \pm 2{,}0$
Sahne . . . . . $\varepsilon = 63 \pm 2{,}0$

Nr. 46. Eiweiß und Eigelb (Hühnerei)

Eiweiß . . . . . $\varepsilon = 68{,}0 \pm 1{,}0$
Eigelb . . . . . $\varepsilon = 60{,}0 \pm 2{,}0$

Nr. 47. Menschlicher Speichel

$\varepsilon = 83{,}5 \pm 1{,}0$

Nr. 48. Froschmuskelsubstanz

$\varepsilon = 83 \pm 2{,}0$

Nr. 49. Gehirnsubstanz (Mensch)

Graue Substanz . . $\varepsilon = 85{,}0 \pm 1{,}0$
Weiße Substanz . . $\varepsilon = 90{,}0 \pm 2{,}0$

Nr. 50. Nervus opticus (vom Rind)

$\varepsilon = 89 \pm 1{,}0$

Nr. 51. Gewebssubstanz grüner Blätter

$\varepsilon = 83 \pm 2{,}0$

Prag, Phys. Institut der deutschen Universität.

(Eingegangen 22. August 1922.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 0

Fabrik für physikalische, chemische und technische Apparate

Gegründet 1890 — Gegründet 1890

Pfeiffer's

Hoch-Vakuum-Pumpen
für Wissenschaft und Technik

für Saugleistungen bis 30 cbm stündlich und Vakua bis $^1/_{1000000}$ mm Hg

Neuheit! **Quecksilber-Dampfstrahlpumpe** *Neuheit!*
nach System Pfeiffer (D. R. P. angem.) ganz aus Stahl.

Rotierende Kapsel-Öl-Luftpumpe D. R. P.
mit Elektromotor direkt gekuppelt.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4—1000 mm Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke

Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

1923. № 2.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 70.

1. *Über die Beständigkeit der Phosphoreszenzzentren I;* (1) *von Hans Kuppenheim.*

Hr. Lenard hat, nachdem er auf den grundsätzlichen Unterschied zwischen den Dauerzentren und den Momentanzentren der Phosphore (2) hingewiesen hatte, auf Grund der eingehenden Untersuchung des Abklingungsverlaufs wohlbestimmter Phosphoreszenzbanden die Vorstellung eingeführt, daß die Dauerzentren jeder Bande nicht einheitlicher Natur sind, sondern daß es *d*-Zentren verschieden großer Dauer gibt, die verschieden an- und abklingen, und denen auch verschiedene Größen zuzuschreiben sind (3). Diese Vorstellung hat sich bei der Erklärung der gesamten Phosphoreszenzerscheinungen fruchtbar gezeigt und zu einem Bild (4) von dem Aufbau, den Eigenschaften und der Wirkungsweise der Leucht- (vorzugsweise der *d*-)Zentren geführt, das — mögen auch Einzelheiten darin später durch andere ersetzt werden — der gegenwärtigen Kenntnis voll entspricht. Die Aufgabe der vorliegenden Untersuchung ist es, erstens bisher Bekanntes über den Einfluß der Temperatur auf die *d*-Zentren verschiedener Größe (5) zu vervollständigen und so vor allem die Frage nach der Beziehung zwischen Temperatur einerseits, Größe und Dauer der *d*-Zentren andererseits zu beantworten, sodann das Temperaturverhalten der *m*-Zentren einer zahlenmäßigen Untersuchung zu unterwerfen, zweitens die Wirkung phosphoreszenzvernichtenden Drucks auf die *d*-Zentren verschiedener Größe und auf die *m*-Zentren zu erforschen.

Anmerkung. Im folgenden wird ein Teil der Ergebnisse einer Arbeit des Hrn. C. A. Hoffmann mitgeteilt, die, im Heidelberger Radiologischen Institut ausgeführt, dort aber nicht als Dissertation verwendet worden und unseres Wissens nach bis jetzt auch nicht veröffentlicht worden ist. Die Unterlagen sind mir zu diesem Zwecke von der Institutsdirektion zur Verfügung gestellt worden.

Temperaturbeständigkeit der *d*-Zentren.

Bekanntlich läßt sich auf Grund der eingangs erwähnten Vorstellung unter Zugrundelegung des exponentiellen Abklingens jeder einzelnen Zentrensorte (6) der Abklingungsverlauf mathematisch in folgender Form (7) darstellen:

$$L = \iota \int_0^\infty z(\delta)\, e^{-\frac{t}{\delta}}\, d\delta .$$

Hierbei bedeuten: L die Lichtsumme zur Zeit t, $z(\delta)\,d\delta$ die Zahl der zur Zeit $t=0$ erregten Zentren von Dauern zwischen δ und $\delta + d\delta$, ι eine Konstante (8). Hiernach läßt sich ein durch Versuch ermittelter Abklingungsverlauf nach Zerlegung des Integrals in eine Summe von Gliedern von der Form

$$z(\delta)\, e^{-\frac{t}{\delta}}\, d\delta$$

darstellen; weiter lassen sich aber hieraus die $z(\delta)$ berechnen, die, in Abhängigkeit von der Dauer δ dargestellt, die Verteilung der Zentren auf die verschiedenen Dauern — im folgenden stets kurz *Zentrenverteilung* genannt — ergeben.

Über die ursprüngliche, d. h. bei der Bereitung des Phosphors aus dem Zusammenwirken der Herstellungsbedingungen (Metallgehalt, Glühtemperatur und Glühdauer) entstehende Zentrenverteilung ist bereits genügend Gesichertes bekannt (9). Dagegen lassen sich aus dem — bis jetzt noch nicht ausgeführten — Vergleich von Zentrenverteilungen, die aus bei verschiedenen Temperaturen ermittelten Abklingungskurven berechnet sind, neue verfeinerte Einblicke in die Beziehungen zwischen der Wärmebewegung im Phosphor und den Eigenschaften der *d*-Zentren gewinnen (10). Insbesondere wird sich eine Entscheidung darüber treffen lassen, ob mit der bekannten durch Temperatursteigerung verursachten Dauerverkürzung aller *d*-Zentren auch eine Größenänderung, vielleicht ein Zerfall von Leuchtzentren verbunden ist (11).

Hr. C. A. Hoffmann hat die bereits früher angekündigten (12) Beobachtungen und Berechnungen unternommen, um die Zentrenverteilungen bei verschiedenen Banden und bei verschiedenen Temperaturen zu ermitteln. Hierzu führte er nach der lichtelektrischen Lichtsummenmeßweise (13) langfristige Abklingungsmessungen aus, bei Zimmertemperatur nach dem

üblichen Verfahren, bei höheren Temperaturen mittels eines lichtdichten Thermostaten mit selbstregelnder Gasheizung (Temperaturschwankung $\pm 1°$ C). Der Phosphor befand sich in einem Metalltrog (14) und wurde mit dem Licht einer

Tabelle 1.

CaBi α 1,0-normal.

Abklingen bei Zimmertemperatur			Abklingen bei 50° C.		
Zeit nach Schluß der Erregung	Lichtsumme beobachtet	Lichtsumme berechnet	Zeit nach Schluß der Erregung	Lichtsumme beobachtet	Lichtsumme berechnet
0		4216,5 Skt.	0		8849,4 Skt.
10 Sek.	4040 Skt.		1 Min.		7141,1 „
30 „		3842.9 „	2 „	6292 Skt.	6292,0 „
1 Min.		3608.0 „	5 „		5261,7 „
2 „		3294,8 „	10 „		4458,2 „
5 „		2921,3 „	20 „		3720,7 „
9 „	2805 „		20,5 „	3164 „	
10 „		2627,8 „	30 „		3288,4 „
20 „		2352,6 „	40 „		3017,6 „
21 „	2398 „		50 „		2801,7 „
30 „		2189,2 „	55 „	2702 „	
40 „		2085,4 „	60 „		2643,0 „
50 „		1998,9 „	78 „	2445 „	
55 „	1970 „		80 „		2399,9 „
60 „		1937,3 „	99 „	2328 „	
70 „		1885,7 „	120 „		2101,1 „
80 „		1838,1 „	150 „	2071 „	
110 „		1742,5 „	180 „		1867,1 „
120 „		1709,9 „	210 „	1800 „	
130 „		1690,9 „	240 „		1723,6 „
170 „		1617,7 „	280 „		1643,4 „
180 „		1603,7 „	300 „		1614,0 „
190 „		1587.0 „	301 „	1609 „	
210 „		1564,3 „	360 „		1525,7 „
290 „		1487,7 „	420 „		1458,7 „
300 „		1472,4 „	480 „		1400,3 „
310 „		1462,1 „	540 „		1363,2 „
313 „	1471 „		558,5 „	1293 „	
6 Std.		1425.9 „	600 „		1322.6 „
7 „		1389,3 „	889 „	1210 „	
8 „		1354,9 „	900 „		1176.9 „
9 „		1332,3 „	1200 „		1081.4 „
10 „		1306,1 „	1289,5 „	1072 „	
10,5 „		1294,4 „	1500 „		1022,7 „
12 „		1262,5 „	1800 „		982,8 „
12.5 „		1250,5 „	1802 „	984 „	
14 „		1227,9 „	2100 „		944,0 „
16 „		1199,7 „	2400 „		917,5 „
16,65 „	1130 „		2640 „		894,3 „
18 „		1172,8 „	2880 „	841 „	877,4 „

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Ca Bi α 1,0-normal.

Abklingen bei Zimmertemperatur			Abklingen bei Zimmertemperatur		
Zeit nach Schluß der Erregung	Lichtsumme beobachtet	Lichtsumme berechnet	Zeit nach Schluß der Erregung	Lichtsumme beobachtet	Lichtsumme berechnet
20 Std.		1147,8 Skt.	340 Std.		521.1 Skt.
22 „		1127,6 „	440 „		481,5 „
24 „		1106,4 „	660 „		423,8 „
25 „		1096,0 „	818,4 „	364 Skt.	
30 „		1061,6 „	900 „		380,2 „
36 „		1017,1 „	1200 „		348,7 „
48 „		954,6 „	1440 „	308 „	
60 „		901,6 „	1500 „		322,3 „
64 „	877 Skt.		1800 „		301,5 „
72 „		854,8 „	2100 „		287,2 „
96 „		781,6 „	2400 „		272,4 „
105,88 „	722 „		2512,8 „	260 „	
120 „		729,3 „	2800 „		256,8 „
160 „		667,3 „	3200 „		243,0 „
238,32 „	578 „		3592,8 „	230 „	
240 „		581.7 „	3600 „		230,4 „

Hg-Lampe 3 Minuten lang erregt. Zum Anschluß verschiedener (auch früherer) Messungen bei verschiedenen Temperaturen aneinander befand sich der Phosphor auf einem horizontalen elektrisch heizbaren Platinblech, das besonders geeicht war. Die Berechnung der den Abklingungsverlauf darstellenden Summe von Exponentialfunktionen wurde so ausgeführt, daß die Abklingungskurve — von den längsten Zeiten nach Schluß der Erregung zu immer kürzeren fortschreitend — durch eine mit ihr identische Exponentialkurve von der Form $z(\delta)\,d\,\delta\,e^{-\frac{t}{\delta}}$ ersetzt wurde. Sobald der Verlauf dieser Kurve von dem vorgegebenen abwich, wurde durch Hinzufügung einer weiteren Exponentialfunktion mit anderem δ und $z(\delta)\,d\,\delta$ die Anpassung an das Versuchsergebnis wieder hergestellt. Mit dieser Addition von Exponentialfunktionen wurde so lange fortgefahren, bis die durch Versuch ermittelte Abklingungskurve vollständig dargestellt war. In Tab. 1 sind zwei von Hrn. Hoffmann berechnete — für das Folgende in Betracht kommende — Abklingungskurven (15) wiedergegeben. Die hierzu errechneten Formeln und die Zentrenverteilungen werden weiter unten in verbesserter und vervollständigter Form mitgeteilt werden.

Aus den so ermittelten $z(\delta)\,d\delta$ wurden die Zentrenzahlen $z(\delta)$ nach folgendem leicht zu übersehendem Plan errechnet:

Dauer δ	Mittel der Dauern δ = Grenzen der Dauern einer Gruppe	Differenz der Mittel = $d\delta$ = Bereich der Dauern ($d\delta$ in Stunden) einer Gruppe	Zahl der Zentren $z(\delta)\,d\delta$, deren Dauern zwischen den betreffenden Grenzen, d. h. in dem betreffenden Bereich liegen	Zahl der Zentren $\frac{z(\delta)\,d\delta}{d\delta}$, deren Dauer $= \delta \pm {}^1/_2$ Std. ist

Zum Anschluß der Berechnungen aneinander führte Hr. Hoffmann Lichtsummenmessungen derselben Phosphorprobe zu einer bestimmten Zeit nach Schluß der Erregung aus und rechnete mit Hilfe eines so erhaltenen Umrechnungsfaktors die Zentrenzahlen $z(\delta)$ um. Bei allen diesen Berechnungen wurden nur die Zentren berücksichtigt, deren Dauern 1 Minute und größer waren; die Zentren kürzerer Dauer, die nach schon Bekanntem (16) beim normalhaltigen CaBi-Phosphor schon bei Zimmertemperatur in sehr großer Überzahl vorhanden sind, wurden vollständig außer acht gelassen. Die Lichtsumme zur Zeit $t = 0$ nach Schluß der Erregung (volle Lichtsumme), die sich darstellt durch das Integral

$$\int_0^\infty z(\delta)\,d\delta,$$

ergibt sich dann auf Grund der Berechnungen als Summe aller $z(\delta)\,d\delta$; hierfür erhält Hr. Hoffmann für CaBi α normal die Werte:

Zimmertemperatur (20°)	50°	100°	155° C
1029,73	733,99	398,73	177,18

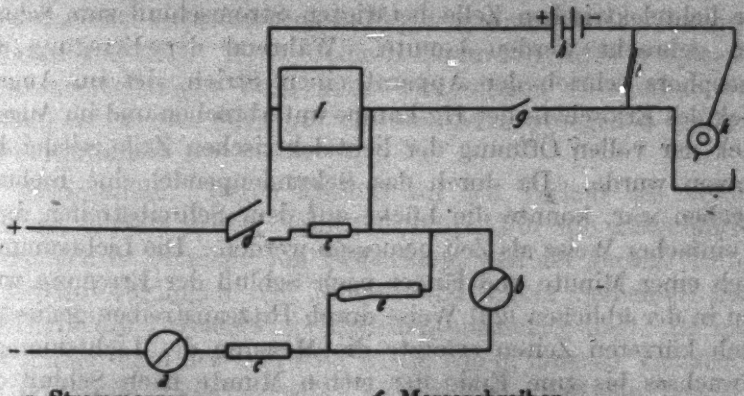
Die nicht durchgeführte, allerdings schwierige Berücksichtigung der Zentren kürzester Dauer, die bei Temperatursteigerung noch viel mehr zur Gesamtzentrenzahl, also auch zur vollen Lichtsumme beitragen, als bei tiefen Temperaturen, nimmt den vorstehenden Zahlen und den aus ihnen von Hrn. Hoffmann errechneten Folgerungen die unmittelbare Verwertbarkeit zu endgültigen Schlüssen. Ohne Kenntnis des Verhaltens der Zentren kürzester Dauer wird man über die Gesamtzentrenzahl im Phosphor nichts Sicheres aussagen können. Ein Gesetz

über die Abhängigkeit der Zentrenzahl einer bestimmten Dauer von der Temperatur, wie es Hr. Hoffmann versucht hat aufzustellen, wird erst dann einwandfrei sein können, wenn dargelegt ist, daß, bzw. inwieweit die Temperaturänderung tatsächlich nur die Dauer der Zentren ändert, auf die Gesamtzahl dagegen ohne Einfluß ist. Dies kann aber auf Grund der bisherigen Kenntnis nicht entschieden werden. Das starke Überhandnehmen der Zentren kurzer Dauer bei höherer Temperatur, das das beschleunigte Abklingen zur Folge hat, kann sowohl durch Verkürzung der Dauern aller Zentren, als auch durch Zerfall der Zentren langer Dauer, d. h. also durch Abnahme der Gesamtzentrenzahl oder schließlich durch das Zusammenwirken beider Vorgänge bedingt sein. Die nächste — durch Versuche zu lösende — Aufgabe ist daher, das Verhalten der Gesamtzentrenzahl gegenüber Temperaturänderung festzustellen. Der einfachste Weg hierzu, die Messung der Lichtsumme zur Zeit $t = 0$ nach Schluß der Erregung, kann nicht beschritten werden, weil hierbei das Mitwirken der m-Zentren, die nicht ausgeschaltet werden können, große Schwierigkeiten bereiten würde. Es müssen also auf Grund besonderer Abklingungsmessungen in sehr kurzen meßbaren Zeiten nach Schluß der Erregung die Zentren kurzer und kürzester Dauern untersucht und ihre Zahlen den schon ermittelten der Zentren längerer Dauer hinzugefügt werden derart, daß man in den Stand gesetzt wird, ohne wesentliche Unsicherheit bis zur Dauer 0 zu extrapolieren.

Erwähnt sei hier ein Versuch von Hrn. A. Pospielow (17), den Verlauf der Abklingung durch eine Summe von Exponentialfunktionen darzustellen, der aber viel zu unvollkommen durchgeführt ist, um irgendwie verwertbar zu sein. Es sind die damals schon bekannten und gut gesicherten Vorstellungen über die Phosphoreszenzzentren unberücksichtigt geblieben, und es sind nur käufliche Phosphore von ganz unsicherem Metallgehalt (18) benützt worden.

Verwendete Phosphore. Es wurde die α-Bande des CaBiNa-Schwefelphosphors untersucht, einmal, um die Hoffmannschen Untersuchungen und Berechnungen mit verwertbar zu machen, sodann, weil über diesen Phosphor auch sonst schon umfangreichste Kenntnisse vorhanden sind. Die Herstellung geschah nach der Anweisung von „1904" S. 659. Um die Druckzerstörung durch Zerreiben der geglühten Masse nach Entnahme

aus dem Tiegel zu vermeiden und um ein möglichst gleichmäßiges Pulver zu erhalten, wurde in allen Fällen von der Hinzugabe des Flußspatzusatzes (19) abgesehen. Bei der Bereitung des 0,01 fach normalen Phosphors wurden — von Hrn. A. Scheifele im hiesigen Institut — elektrolytisch gereinigte Ausgangsstoffe verwendet, um die bei so kleinem Metallgehalt besonders störenden Beimengungen fremder Metalle, insbesondere Cu, auf ein Mindestmaß herabzudrücken.



a Strommesser
b Spannungsmesser
c Widerstände
d Zweipoliger Schalthebel
e Hg-Lampe
f Morseschreiber
g Einpoliger Schalthebel
h Zweizelliger Sammler
i Kontakt am Momentverschluß
k Sekundenpendel

Fig. 1. Versuchsanordnung.

Versuchsanordnung. Die Lichtsummenmessung erfolgte nach dem lichtelektrischen Verfahren (20). Von dem auf einem elektrisch heizbaren Platinblech aufgesiebten Phosphor wurde mit einem oberseitig berußten Glimmerblatt eine — bei allen Versuchen gleich große — kreisrunde Fläche ausgeblendet. Auf diese fiel, senkrecht von oben gespiegelt, das von einer Quarzquecksilberlampe stammende erregende Licht, das so mittels eines Kronglaskondensors gesammelt wurde, daß das Bild des Leuchtrohres in natürlicher Größe die ausgeblendete Phosphorfläche gerade bedeckte. Das Bandenlicht des Phosphors wurde mit einem um 45° geneigten Spiegel in die lichtelektrische Zelle eingeworfen. Das Heizblech war nach dem von Hrn. Lenard angegebenen Verfahren geeicht (21). Für Lichtsummenmessungen bei tiefen Temperaturen wurde die bereits früher beschriebene Vorrichtung gebraucht (22).

Die Messung der zwischen Schluß der Erregung und Beginn der Lichtsummenmessung verstrichenen Zeit geschah bei längeren Zeiten ($> {}^1/_2$ Minute) mittels Taktwerk oder Uhr, bei kürzeren Zeiten wurde die aus Fig. 1 ersichtliche Schaltung angewendet. In einer Abzweigung des die Hg-Lampe speisenden Stromkreises lag der Morseschreiber, der in einem zweiten Stromkreis durch ein durch eine Quecksilberkuppe schlagendes Sekundenpendel und durch einen vom Verschluß der lichtelektrischen Zelle betätigten Stromschluß zum Schreiben gebracht werden konnte. Während der Erregung des Phosphors schrieb der Apparat einen Strich, der im Augenblick des Erlöschens der Hg-Lampe unterbrochen und im Augenblick der vollen Öffnung der lichtelektrischen Zelle wieder begonnen wurde. Da durch das Sekundenpendel eine Eichung gegeben war, konnte die Lücke auf dem Schreibstreifen dann in einfacher Weise als Zeit gemessen werden. Die Lichtsummen nach einer Minute und länger nach Schluß der Erregung wurden in der üblichen (23) Weise durch Hitzeaustreiben gemessen, nach kürzeren Zeiten erfolgte die Messung des Lichtsummenzuwachses bis zum Ende der ersten Minute nach Schluß der Erregung. Bei den Messungen bei tiefer Temperatur wurde in diesem Fall durch das doppelwandige Quarzgefäß und die Kühlflüssigkeit hindurch gemessen, während nach längeren Zeiten diese entfernt wurden. Zum einwandfreien Anschluß dieser Messungen aneinander wurde durch besondere Versuche der Einfluß der Kühlflüssigkeit und des Quarzgefäßes ermittelt und in Rechnung gestellt. Die Messungen nach kurzen Zeiten geschahen nach folgendem Plan: 1 Minute, 0,5 Min., ungefähr 10 Sekunden, ungefähr 5 Sek, ungefähr 2 Sek., ungefähr 1 Sek., kürzer als 1 Sek. nach Schluß der Erregung. Zum Anschluß an vorgegebene Abklingungsmessungen wurden Messungen nach längerer Zeit als 1 Minute nach Schluß der Erregung nach Bedarf ausgeführt.

Volle Erregung. Wie man weiß (24), sind die Zentren kurzer und kürzester Dauer nicht leicht alle gleichzeitig und voll erregbar. Die volle Erregung mußte aber unbedingt erreicht werden. Es müssen also so viele Lichtquanten auf den Phosphor geschleudert werden, daß für jedes während der Erregung abgeklungene Zentrum kürzester Dauer sofort ein neues Lichtquant zur Wiedererregung zur Verfügung war. Die prak-

tische Erreichung dieses Zustandes zeigte sich daran, daß bei Steigerung der erregenden Lichtintensität auch die nach kürzester Zeit nach Schluß der Erregung gemessene Lichtsumme keine Vergrößerung mehr aufwies. Hierfür besonders ausgeführte Messungen bestimmten die oben beschriebene besondere Art der Erregung.

Tilgung. Der auf anderen Wegen ermittelte Einfluß der Tilgung ist beim Folgenden nicht berücksichtigt worden, weil kein einfacher experimenteller Weg zur tilgungsfreien Erregung bekannt war (25). Wenn deshalb die im folgenden errechneten Zentrenverteilungen wohl keine endgültigen Ergebnisse darstellen, so ist dies doch auf die aus ihnen gezogenen Schlüsse ohne Einfluß.

Schichtdicke. Deren Einfluß auf den Verlauf des Abklingens ist bereits früher ermittelt (26). Für die ausgeführten Messungen ist er nicht von Bedeutung, weil der geringe Unterschied im Abklingen sehr dünner und dicker Schichten noch innerhalb des Bereiches der Beobachtungsfehler liegt. Es muß dies immer dann der Fall sein, wenn, wie in unseren Versuchen, die erregende Lichtintensität so groß ist, daß die benutzte Schicht auch in ihren untersten bei der Ausstrahlung noch mitwirkenden Teilen noch voll erregt wird. Daß dies bei den benutzten dünn aufgesiebten Schichten der Fall ist, haben wir nachgewiesen.

Bandentrennung (27). Bei CaBi-Phosphor lassen sich die α- und β-Bande nicht durch besondere Erregung trennen, da die d_1-Gipfel beider Banden sehr nahe zusammenfallen (28). Deshalb wurde die β-Bande ($\lambda_{\text{Gipfel}} = 520\ \mu\mu$) durch ein der lichtelektrischen Zelle vorgesetztes Gelatinefilter, das nur Wellen $< 500\ \mu\mu$ durchließ, von dieser ferngehalten. Die rote Kältebande γ kam wegen der geringen Empfindlichkeit der Zelle für diesen Wellenlängenbereich und wegen der Nichtanwendung der zu ihrem Erscheinen notwendigen tiefen Temperaturen nicht in Frage. Wie β und γ ist auch die ultraviolette ν-Bande (29) Nebenbande (30); ob sie bei den untersuchten Phosphoren überhaupt ausgebildet war, ist nicht untersucht worden, doch ist sie in doppelter Weise ausgeschaltet. Einmal muß ihr Erregungsgipfel nach der bei allen Phosphoren gültig gefundenen Stokesschen Regel noch bei kürzeren Wellen als ihr Bandengipfel ($\lambda = 380\ \mu\mu$) liegen. Bei der oben beschriebenen Art

der Erregung kann die Bande also nicht erregt werden. Zum andern ist sie aber auch noch durch das der Zelle vorgesetzte Gelatinefilter (31) von dieser ferngehalten.

Spektrale Verschiebung der CaBi-*a*-*Bande.* Die mit Temperatursteigerung verbundene spektrale Verschiebung der *a*-Bande nach längeren Wellen ist bereits gut bekannt (32); wie dieser Einfluß auf eine nach längeren Wellen unempfindlicher werdende *K*-Zelle vermindert wird, ist ebenfalls schon mitgeteilt (33). Hiernach wurde — mit vorsichtigem Erhitzen — bei den ausgeführten Messungen verfahren. Außerdem wurden mit einer *Rb*-Zelle, deren Empfindlichkeitsgipfel bekanntlich gerade in dem in Frage kommenden Wellenlängenbezirk liegt, Kontrollmessungen ausgeführt, deren Ausfall bei der Betrachtung der gesamten Ergebnisse erörtert werden wird.

Ergebnisse der Messungen. Bei jedem Phosphor wurden die Abklingungen bei verschiedenen Temperaturen durch Vergleichsmessungen (1 Minute nach Schluß der Erregung) aneinander angeschlossen und auf die Einheit 100 (Lichtsumme

Tabelle 2.

CaBi *a* 1,0-normal bei Zimmertemperatur.

Zeit nach Schluß der Erregung	Lichtsumme I Frühere Beobachtung	Lichtsumme II Eigene Beobachtung	I/II	Lichtsumme III Hrn. Hoffmanns Berechng.	Lichtsumme IV Eigene Berechng.	III/IV
0,2 Sek.		133,5 Skt.			133,5	
0,5 „		131,3 „			131,3	
1 „		128,8 „			128,8	
2 „		125,7 „			125,7	
5 „		121,0 „			121,0	
40 „	4040 Skt.	117,0 „	34,4		117,1	
0,5 Min.		108,1 „		3842,9	108,1	35,6
1 „		100 „		3608,0	100.2	35,8
2 „		91,3 „		3294,8	91,9	35,8
5 „		81,0 „		2921,3	81,4	35,8
9 „	2805 „	74.5	37,7	2627,8 a)	74,6	
21 „	2398 „	65,0 „	36,9	2352,6 b)	64,9	
55 „	1970 „	52,3	37,7	1998,9 c)	—	
313 „	1471 „	39,0 „	37,7	1462,1 d)	—	

a) Lichtsumme für $t = 10$ Min.
b) „ „ $t = 20$ „
c) „ „ $t = 50$ „
d) „ „ $t = 310$ „

Tabelle 3.

CaBi α 1,0-normal bei 50° C.

Zeit nach Schluß der Erregung	Lichtsumme I Frühere Beobachtung	Lichtsumme II Eigene Beobachtung	I/II	Lichtsumme III Hrn. Hoffmanns Berechng.	Lichtsumme IV Eigene Berechnung	III/IV
0,2 Sek.		118,3 Skt.			118,7	
0,5 „		111,1 „			110,4	
1 „		104,0 „			104,1	
2 „		98,4 „			98,6	
5 „		91,3 „			91,3	
10 „		85,4 „			85,4	
0,5 Min.		73.6 „			73,3	
1 „		64,1 „		7141,1	64,6	110,6
2 „	6292 Skt.	56,5 „	111,2	6292,0	56,6	111,2
5 „		47,3 „		5261,7	47.2	111,5
10 „		40,0 „		4458,2	40,1	111,2
20 „				3720,7	33,3	111,7
20,5 „	3164 „	33,0 „	96,0			
55 „	2702 „	24,2 „	111,5	2801,7 a)		
78 „	2445 „			2399,9 b)		
99 „	2328 „			2101,1 c)		

a) Lichtsumme für $t = 50$ Min.
b) „ „ $t = 80$ „
c) „ „ $t = 120$ „

Tabelle 4.

CaBi α 1,0-normal bei 155° C.

Zeit nach Schluß der Erregung	Lichtsumme I Abkling. 1912 S. 17, Taf. VI	Lichtsumme II Eigene Beobachtung	III Eigene Berechnung	I/II
0,2 Sek.		79.9 Skt.	79,9	
0,5 „		71.1 „	71,1	
1 „		65.5 „	65,5	
2 „		59.5 „	59,5	
5 „		51.5 „	51,7	
10 „		45.0 „	45,9	
0,5 Min.	149 Skt.	35.9 „	35,3	4,15
1 „		29.0 „	29,0	
2 „		24.7 „	23,7	
5 „	88 „	18.5 „	18,6	4,76
10 „	78 „	16.4 „	16,5	4,76
50 „	49 „	10.5 „	10,3	4,67
96 „	34 „		7,3	
180 „	18 „		4,1	

bei Zimmertemperatur 1 Minute nach Schluß der Erregung) bezogen. Sodann wurde der Abklingungsverlauf innerhalb der ersten Minute ermittelt und der Anschluß an die gegebenen Messungen durch besondere Versuche nach längeren Zeiten sichergestellt. Daß er bei der Beobachtung und bei der Berechnung vollkommen erreicht ist, zeigen die Tab. 2, 3 und 4.

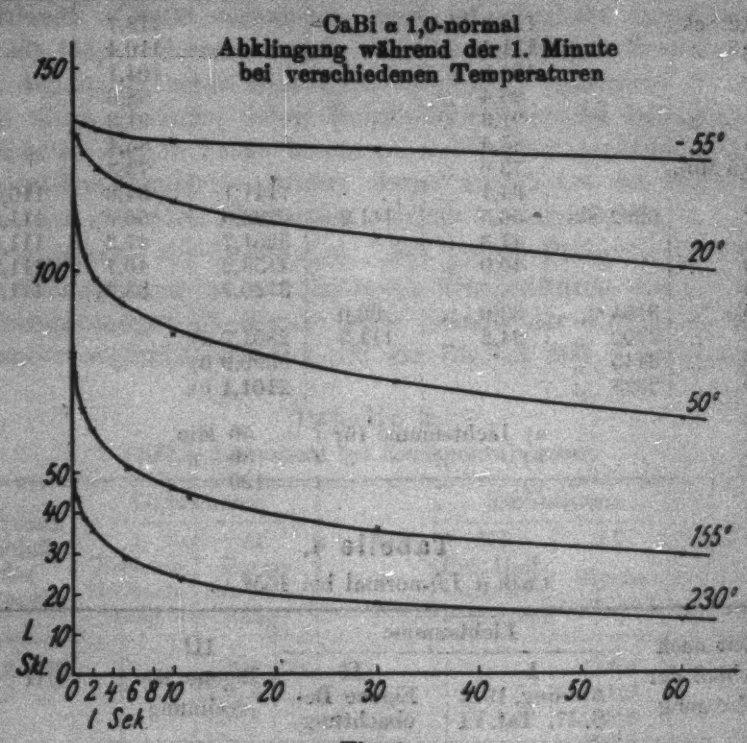


Fig. 2.

a) CaBi *α* 1,0 *normal* (*Fig. 2*). Hierfür lagen vor: bei Zimmertemperatur die Messung Hrn. Lenards (34), bei 50° C die Messung Hrn. C. A. Hoffmanns (Tab. 1), bei 155° C die Messung Hrn. Haussers (35). Neu ermittelt wurden die Abklingungen während der ersten Minute bei — 55° C, die sich gut in die bereits früher mitgeteilten Lichtsummenmessungen bei tiefen Temperaturen (36) einfügt, und bei + 230° C. Wie man sieht, streben die Kurven bei den 3 tieferen Temperaturen einem gemeinsamen Wert, der vollen Lichtsumme zur Zeit $t = 0$ zu.

b) CaBi *α* 0,1-*normal* (*Fig. 3*). Da für diesen Phosphor keine verwertbaren Messungen vorlagen, wurden sämtliche Abklingungskurven neu ermittelt. Mit der einzigen vorliegenden Beobachtung (37) herrscht keine vollständige Übereinstimmung, wie aus dem nachstehenden Vergleich hervorgeht.

Zeit nach Schluß der Erregung	Beobachtete Lichtsumme		Verhältniszahl
	früher	jetzt	
25 Sek.	96 Skt.	102,6 Skt.	0,935
10 „	100 „	112,5 „	0,889
1 „	104,9 „	121,5 „	0,862
0,1 „	106,0 „	123,2 „	0,859

Ca Bi *α* 0,1-normal
Abklingung während der 1. Minute bei verschiedenen Temperaturen

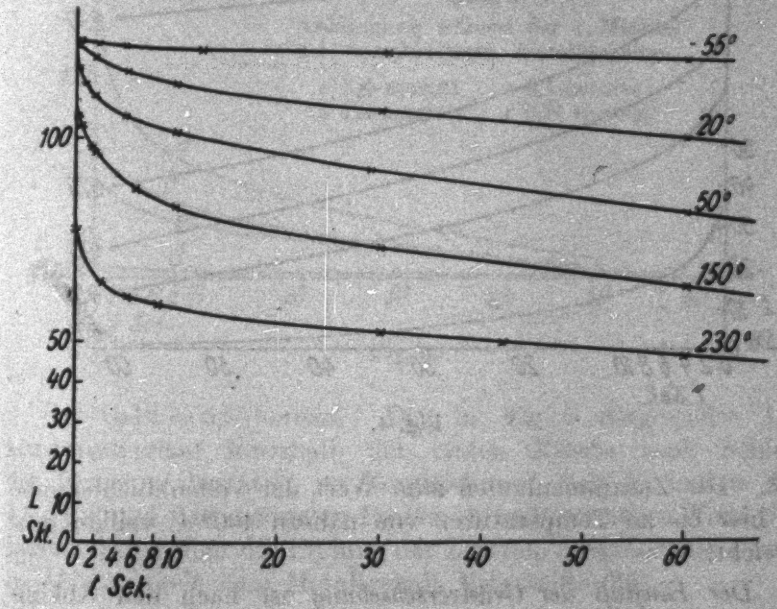


Fig. 3.

Der Abfall der Verhältniszahlen zeigt, daß die nicht leichte Erregung aller Zentren kürzester Dauer wohl nicht vollkommen erreicht war; im übrigen ist diese Unstimmigkeit ohne jeden Einfluß auf die aus dem früheren Ergebnis gezogenen Schlüsse. Das Zusammenstreben der Abklingungskurven auf den Wert

der vollen Lichtsumme tritt hier schon viel deutlicher hervor, als beim normalmetallhaltigen Phosphor.

c) CaBi α 0,01 *normal* (*Fig. 4*). Bei diesem Metallgehalt sind die Dauern aller Zentren bei Zimmertemperatur schon so groß, daß in der ersten Minute fast nichts von der Lichtsumme verloren geht (88). Es konnte daher auf die Ermittelung der Abklingung bei — 55° C verzichtet werden, weil die Genauigkeit der Lichtsummenmessung keinen Unterschied im Abfall der Kurve gegenüber den bei Zimmertemperatur erwarten

CaBi α 0,01-normal
Abklingung während der 1. Minute bei verschiedenen Temperaturen

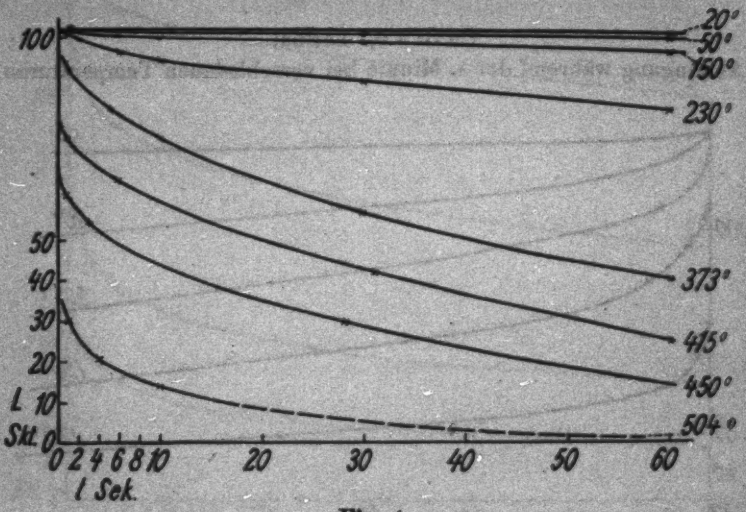


Fig. 4.

ließ. Das Zusammenlaufen zum Wert der vollen Lichtsumme ist hier bis zu Temperaturen von nahezu 400° C vollkommen erreicht.

Der Einfluß der Grünverschiebung ist nach den Abklingungsmessungen mit der *Rb*-Zelle aus der gegenseitigen Lage der mit beiden Zellen ermittelten Abklingungszellen zu entnehmen. Er wird bei der Erörterung des Endergebnisses in Rechnung gestellt werden. Da wegen der geringen Lichtsumme die Abklingung des 0,01-normalen Phosphors nicht leicht gemessen werden konnte, wurde in diesem Falle von der Gegenprobe mit der *Rb*-Zelle abgesehen. Diese Unterlassung scheint

auch durch folgendes gerechtfertigt. Erhitzt man auf einem Heizblech gleichzeitig verschiedene gemeinsam erregte Proben von CaBi-Phosphoren verschiedenen Metallgehalts, so sieht man, daß die Farbenänderungen von Tiefblau über Hellblau zu Grünblau und Blaugrün nicht gleichzeitig bei einer bestimmten Temperatur auftreten, sondern um so mehr zeitlich und auch an Stärke zurückbleiben, je geringer der Metallgehalt ist. So leuchtet z. B. bei 155° der normale CaBi-Phosphor in lichtblauer, der 0,1-normale Phosphor dagegen in tiefblauer Farbe. Beim 0,01-normalen Phosphor war eine Grünverschiebung überhaupt nicht mehr festzustellen. Sie ist also wohl so vom Metallgehalt abhängig, daß sie mit abnehmendem Metallgehalt immer geringer wird und zum Erscheinen immer höherer Temperatur bedarf.

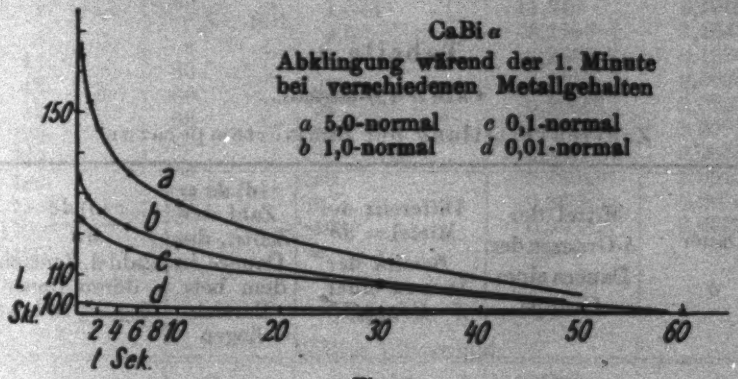


Fig. 5.

d) CaBi *α* 5,0-*normal.* Der in Fig. 5 dargestellte Abklingungsverlauf innerhalb der ersten Minute nach Schluß der Erregung bestätigt im Vergleich mit dem Verhalten der 1,0, 0,1 und 0,01-normalen Proben in vollkommener Weise das bereits früher über die Bildung der Zentren verschiedener Dauer in Abhängigkeit vom Metallgehalt Mitgeteilte (89).

Auswertung der Abklingungsmessungen; Ermittelung der Zentrenverteilung. Das hierzu angewandte Verfahren ist bereits eingangs beschrieben; die von Hrn. C. A. Hoffmann ausgeführten Berechnungen für CaBi *α* 1,0-normal bei Zimmertemperatur und bei 50° wurden aufeinander bezogen, wobei hier, wie in allen anderen Vergleichsfällen, als Einheit die Lichtsumme der 1,0-normalen Probe nach einer Minute nach Schluß

der Erregung = 100 gesetzt wurden. Da die Berechnungen, wie aus Tab. 1 ersichtlich, den Verlauf der Abklingung innerhalb kurzer Zeiten nach Schluß der Erregung nur angenähert darstellten, wurden sie gerade nach dieser Richtung überprüft und durch weitere Hinzufügung von Exponentialgliedern (für die Zentren kürzester Dauer) ergänzt, so daß nun der gesamte bekannte Abklingungsverlauf in einwandfreier Weise auch rechnerisch dargestellt war; in keinem Falle überschritten die Abweichungen 1 v. H. Für den bei 155° C abklingenden CaBi-Phosphor normalen Metallgehaltes wurde die Berechnung vollständig neu durchgeführt (Tab. 7), da die von Hrn. C. A. Hoffmann ausgeführte Rechnung den durch Versuch ermittelten Verlauf nur sehr unvollkommen wiedergab (Abweichungen bis zu 21 v. H.). Die Berechnungen der Zentrenzahlen sind

Tabelle 5.

CaBi α 1,0-normal.

Zentrenverteilung bei Zimmertemperatur.

Dauer δ	Mittel der δ-Grenzen der Dauern einer Gruppe	Differenz der Mittel = $d\delta$ *Bereich* der Dauern einer Gruppe	$z(\delta)\,d\delta$ = Zahl der Zentr., der. Dauern in dem betr. Bereich liegen	$\frac{z(\delta)\,d\delta}{d\delta}$ = Zahl d. Zentren, deren Dauer $\delta \pm 1/2$ Std. ist
0,4 Sek.	0,2 Sek.	0,000276 Std.	2,725	9872,1
2 „	1,2 „	0,002429 „	8,834	3637,3
18 „	10 „	0,008004 „	7,513	836,61
1 Min.	39 „	0,038916 „	19,551	502,41
5 „	3 Min.	0,158 „	17,496	110,74
20 „	12,5 „	0,459 „	15,227	33,173
1 Std.	40 „	1,833 „	12,840	7,0049
4 „	2,5 Std.	5,5 „	9,904	1,8007
12 „	8 „	22 „	6,477	0,29714
48 „	30 „	30 „	5,431	0,18105
72 „	60 „	36 „	5,243	0,14576
120 „	96 „	84 „	4,461	0,053109
240 „	180 „	180 „	3,427	0,019039
480 „	360 „	240 „	3,079	0,012829
720 „	600 „	360 „	2,035	0,0056539
1200 „	960 „	840 „	1,363	0,0016232
2400 „	1800 „	1800 „	0,934	0,0005196
4800 „	3600 „	3600 „	0,482	0,00013399
9600 „	7200 „	∞	8,565	—
	∞			

Tabelle 6.

CaBi α 1,0 normal.

Zentrenverteilung bei 50° C.

Dauer δ	Mittel der δ-Grenzen d. Dauern einer Gruppe	Differenz der Mittel $= d\delta$ *Bereich* der Dauern einer Gruppe	$z(\delta)\,d\delta =$ Zahl der Zentr., der. Dauern in dem betr. Bereich liegen	$\frac{z(\delta)\,d\delta}{d\delta} =$ Zahl d. Zentren, deren Dauer $\delta \pm 1/2$ Std. ist
0,33 Sek.	0,166 Sek.	0,000276 Std.	18,868	68362
2 „	1,161 „	0,002438 „	14,039	5758,6
18 „	10 „	0,008004 „	16,496	2061,0
1 Min.	39 „	0,038916 „	18,437	473,76
5 „	3 Min.	0,158 „	15,703	99,388
20 „	12,5 „	0,459 „	13,302	29,02
1 Std.	40 „	1,833 „	11,348	6,1909
4 „	2,5 Std.	5,5 „	6,2385	1,1343
12 „	8 „	22 „	4,3562	0,19801
48 „	30 „	30 „	2,0053	0,066844
72 „	60 „	36 „	0,92367	0,025658
120 „	96 „	84 „	0,76837	0,0091474
240 „	180 „	180 „	0,63159	0,0035089
480 „	360 „	240 „	0,46049	0,0019187
720 „	600 „	360 „	0,36893	0,0010248
1200 „	960 „	840 „	0,33392	0,00039752
2400 „	1800 „	∞	4,534	—
	∞			

Tabelle 7.

CaBi α 1,0 normal.

Zentrenverteilung bei 155° C.

0,18 Sek.	0,09 Sek.	0,000207 Std.	20,471	98893
1,5 „	0,84 „	0,0019072 „	17,9	9385,4
14 „	7,75 „	0,012213 „	19,228	1574,4
1,5 Min.	52 „	0,16367 „	18,860	114,965
20 „	10,75 Min.	1,23236 „	6,0075	4,8738
150 „	85 „	∞	13,720	—
	∞			

in den Tabb. 5, 6 und 7 ausgeführt und zu einem Teil in Fig. 6 veranschaulicht, wobei wegen des großen Bereichs der Dauer δ und der Zentrenzahlen $z(\delta)$ in den einzelnen hier nicht abgebildeten Teildarstellungen der Maßstab der Abszisse um je eine Zehnerpotenz zunimmt, während gleichzeitig der Ordinatenmaßstab um je eine Zehnerpotenz abnimmt, so daß das Flächenmaß ungeändert bleibt. Die auf anderem Wege be-

reits erschlossene Tatsache (40), daß die Zentren sehr kurzer Dauer stark in der Überzahl sind, ist augenscheinlich voll bestätigt, ebenso wie die Erklärung des rascheren Abfalls der Lichtsumme bei höheren Temperaturen durch die außerordentlich starke Zunahme der Zentren kurzer und kürzester Dauer.

Die Frage nach dem *Verhalten der Gesamtzahl der Zentren bei Temperaturänderung* wird nun beantwortet durch die Ermittelung des Integrals

$$\int_0^\infty z\,(\delta)\,d\,\delta$$

für die verschiedenen Temperaturen, was mittels Flächenmessung (41) geschah. Hierzu mußte aber der Verlauf der Zentrenverteilungskurven von $\delta = 0$ bis $\delta = \infty$ sichergestellt sein, wozu an

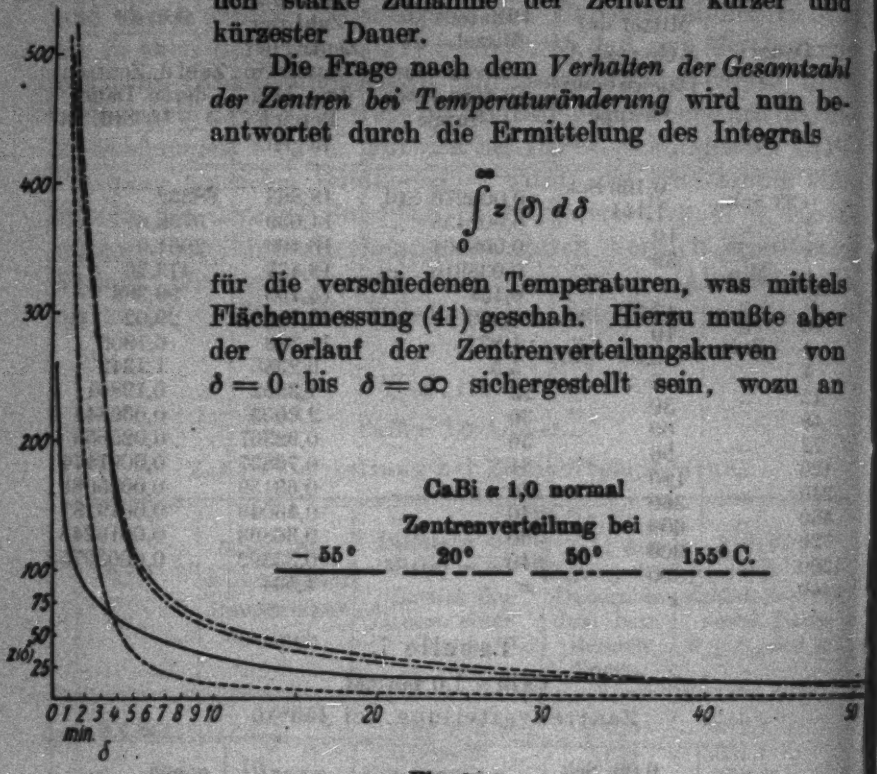


Fig. 6.

beiden Enden Extrapolationen genügend einwandfrei zu Hilfe genommen werden konnten. Dies geschah so, daß für bestimmte Dauern δ die Quotienten

$$\frac{z\,(\delta)_{50°}}{z\,(\delta)_{20°}} \quad \text{und} \quad \frac{z\,(\delta)_{155°}}{z\,(\delta)_{20°}}$$

gebildet wurden und in der Abhängigkeit von δ dargestellt wurden. Die Quotientenkurven nähern sich für wachsendes δ asymptotisch der Abszissenachse, was auch der Natur der Sache nach der Fall sein muß. Sie wurden nun sowohl nach dem Verlauf der letzten Tangente als auch nach einer Hyperbel und

ihrem vorhergehenden Verlauf als Exponentialkurve entsprechend verlängert und dann für diese drei Fälle der Verlauf der $z(\delta)$-Kurven ermittelt. Die Werte der so erhaltenen Flächenzusätze betrugen für die Zentrenverteilung bei 50°

im ersten Fall 1,2
im dritten Fall 1,45 } in dem verwendeten Maßstab.

Im Vergleich zur Gesamtfläche beträgt dieser Zuwachs noch nicht $^1/_2$ v. H. Für die Zentrenverteilung bei 155° fanden sich auf dieselbe Weise für die Zuwächse die Werte

6,2 im ersten Fall (1,7 v. H. der Gesamtfläche) und
9,1 im zweiten Fall (2,6 v. H. der Gesamtfläche)

Die hyperbolische Extrapolation ergab für die $z(\delta)$-Kurven eine so weitgehende Übereinstimmung mit der exponentiellen Extrapolation, daß dieser letzteren der Vorzug gegeben wurde, was wohl der Natur der Sache am besten entspricht. Aus der

Tabelle 8.

Extrapolation der Zentrenverteilungskurven von CaBi α 1,0 normal und Ermittelung des Integrals $\int_0^\infty z(\delta)\,d\delta$.

Temperatur		20° C	50° C	155° C
ohne Extrapolation	Integrationsgrenzen	$0{,}5 \cdot 10^{-3}$ Min. bis ∞	$0{,}5 \cdot 10^{-3}$ bis $7{,}10^{4}$ Min.	$0{,}5 \cdot 10^{-3}$ Min. bis $2{,}10^{1}$ Min.
	Wert d. Integrals	600,3	532,1	353,4
Extrapolation gegen $\delta = \infty$	Integrationsgrenzen		$0{,}5 \cdot 10^{-3}$ Min. bis ∞	$0{,}5 \cdot 10^{-3}$ Min. bis ∞
	Wert d. Integr. Fall I		533,3	359,6
	Wert d. Integr. Fall III		533,5	362,3
Extrapolation gegen $\delta = 0$	Integrationsgrenzen	0 bis ∞	0 bis ∞	0 bis ∞
	Endgültiger Wert des Integrals	608,4	574,3	435,2

Tab. 8 ersieht man, daß die so erhaltenen Gesamtflächen, ermittelt aus den beiden Extrapolationsverfahren, sich weniger als 1 v. H. voneinander unterscheiden. Hiermit darf man die obere Integrationsgrenze ∞ als erreicht ansehen; denn eine weitere Fortsetzung der $z(\delta)$-Kurven würde den Wert des

Integrals nur mehr so wenig ändern, daß diese Änderung noch weit innerhalb der Fehlergrenzen bleibt, die durch die Genauigkeit der Lichtsummenmessung, auf der ja die Ermittelung der Zentrenverteilung ruht, gegeben sind. Für die Extrapolation gegen $\delta = 0$ hin ist kein Anhalt gegeben. Deshalb wurde in einfachster Weise nach der letzten Tangente der $z(\delta)$-Kurven extrapoliert, was sicher einen zu geringen Flächenbetrag ergibt. Zur endgültigen Ermittelung der Gesamtzentrenzahl wurde deshalb der schon erwähnte Weg über die Lichtsummen zur Zeit $t = 0$ eingeschlagen, die ja unmittelbar ein Maß für die Gesamtzahl der beim Dauerleuchten beteiligten Zentren darstellen. Die Abklingungskurven (Figg. 2, 3 und 4) lassen sich nämlich z. T. leicht und einwandfrei gegen $t = 0$ hin extrapolieren. Dies gilt einmal für das Abklingen bei tiefen Temperaturen, zum andern für Phosphore mit geringem Metallgehalt, denn hierbei geht in beiden Fällen wegen des Fehlens der Zentren kurzer Dauer nur ein sehr geringer Bruchteil der Gesamtlichtsumme in der ersten Zeit nach Schluß der Erregung verloren. Auf das Zusammenstreben der Abklingungskurven beim 0,01 normalen Phosphor (Fig. 4) zur vollen Lichtsumme bei $t = 0$ ist bereits hingewiesen. Das bedeutet, daß bei diesem Phosphor die Gesamtzentrenzahl bis zu einer Temperatur von ungefähr 360° C unverändert bleibt, während bei 0,1 normalem Phosphor (Fig. 3) schon bei ungefähr 125° C und beim 1,0 normalen Phosphor (Fig. 2) sogar noch bei tieferer Temperatur eine Abnahme der Gesamtzentrenzahl einsetzt.

Tabelle 9.

Temperatur	Gemessene Lichtsummen*)		Verhältnis**)
	mit *K*-Zelle	mit *Rb*-Zelle	
-50° C	64,1 Skt.	71,5 Skt.	1 : 1,11
155	29,0 „	32,0 „	1 : 1,10

*) 1 Min. nach Schluß der Erregung.
**) Für alle Zeiten nach Schluß der Erregung.

Korrektion wegen Grünverschiebung. Wie die Tab. 9 zeigt, stehen die Lichtsummenmessungen mit der *K*- und der *Rb*-Zelle bei einer bestimmten Temperatur für alle Zeiten nach Schluß der Erregung in einem festen Verhältnis zueinander.

In eben diesem Verhältnis werden also auch die errechneten Werte der $z(\delta)\,d\,\delta$ und der $z(\delta)$, sowie die durch die Flächenmessung ermittelten Integrale für 50° C und 155° C zu vergrößern sein. Das Verhältnis der Gesamtzentrenzahl würde sich also von 100 : 94,5 : 71,5 (*K*-Zelle) auf 100 : 104,9 : 78,7 (*Rb*-Zelle) ändern. Dieselbe Änderung würde auch bei den aus der vollen Lichtsumme ermittelten Gesamtzentrenzahlen eintreten müssen, wenn die *Rb*-Zelle die Bandenverschiebung vollkommen auszugleichen imstande wäre. Dies ist jedoch auch nicht der Fall, da die Empfindlichkeit der *Rb*-Zelle in dem fraglichen Wellenlängengebiet ansteigt (42), während die der *K*-Zelle im selben Gebiet abfällt. Wir haben deshalb —

Tabelle 10.

Gesamtzentrenzahl und Temperatur.

Temperatur ° C	Gesamtzentrenzahl, ermittelt aus der Zentrenverteilung			Gesamtzentrenzahl, ermittelt aus der vollen Lichtsumme			Verhältniszahl der Mittelwerte
	ohne Berücksicht. der Bandenversch.	mit Berücksicht. der Bandenversch.	Mittelwert	ohne Berücksicht. der Bandenversch.	mit Berücksicht. der Bandenversch.	Mittelwert	
20°	100	100	100	135,6	135,6	135,6	1,356
50	94,5	104,9	99,7	128,9	142,1	135,5	1,359
155	71,5	78,7	75,1	93,2	102,5	97,9	1,334

besonders bei den geringen Unterschieden — wohl keinen erheblichen Fehler begangen, wenn wir (in Tabelle 10) die Mittelwerte als geltend eingesetzt haben. Die Richtigkeit der gemachten Annahmen wird durch die gute Übereinstimmung der Ergebnisse bestätigt. Die geringe Verschiedenheit der Verhältniszahlen vom Wert 1,356 erklärt sich dann aus der nicht mit voller Sicherheit getroffenen Extrapolation der Zentrenverteilung bei 155° C.

Eine übersichtliche Darstellung des Verhaltens der drei Phosphore verschiedenen Metallgehaltes zeigt Fig. 7. Hierbei ist das von Hrn. Lenard früher (43) über den Zusammenhang zwischen Metallgehalt und Lichtsumme Ermittelte sinngemäß verwertet. Man sieht, daß die Abnahme der vollen Lichtsumme, also auch der Gesamtzentrenzahl bei um so tieferen Temperaturen einsetzt, je größer der Metallgehalt ist. Da aber nach

Bekanntem (44) mit steigendem Metallgehalt die Zahl der im Phosphor gebildeten Zentren kurzer Dauer im Vergleich zu der langer Dauer sehr stark zunimmt, ziehen wir aus Obigem den Schluß, daß die Zentren kurzer Dauer bei Temperatursteigerung zuerst zum Zerfall gebracht werden.

Die gesamten Vorgänge im Phosphor bei Temperatursteigerung sind also — unter Zusammenfassung alles früher

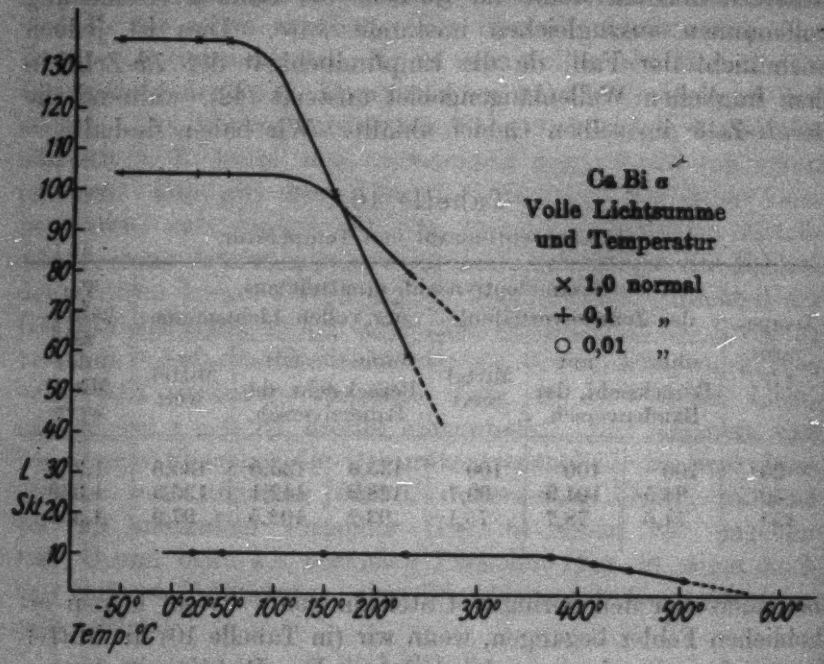


Fig. 7.

Bekannten und jetzt neu Gefundenen — folgende: bei der Bereitung werden im Phosphor von normalem Metallgehalt große Zentren (von langer Dauer) und alle Übergänge bis zu kleinen Zentren (von kurzer Dauer), letztere sehr stark in der Überzahl, gebildet. Die großen, langdauernden Zentren haben eine große Energieisolation, möglicherweise indem sie durch große Zwischenräume, die den Wärmeübergang sehr erschweren, von den übrigen Bestandteilen des Phosphors geschieden sind (45). Den kleinen Zentren kommt diese Energieisolation in weit geringerem Maße zu. Geringe Temperatursteigerung des Phosphors ist dann von nachstehenden Folgen begleitet:

a) Nach Maßgabe der verschiedenen Wärmeausdehnungen (46) im Phosphor schrumpfen die Hohlräume um die Zentren, die Energieisolation sinkt also bei allen Zentren.

b) Die vermehrte Wärmebewegung erfaßt die Zentren und zwar die großen in geringerem Maße als die kleinen. Folge: zeitliche Häufung der Abtrennung der aufgespeicherten Elektronen, d. h. gesteigerte Abklingungsgeschwindigkeit. Die Zentren langer Dauer verwandeln sich also in Zentren kürzerer Dauer. Für den Temperaturanstieg von — 55° C über 20° C zu 50° C verkürzten sich bei CaBi α 1,0 normal die Dauern im Verhältnis 40 : 1 : 0,05; wir haben diese Berechnung dadurch bestätigt, daß wir die so errechneten Zentrenzahlen $z(\delta)$ in guter Übereinstimmung mit den in Tab. 6 ermittelten $z(\delta)$ gefunden haben. Auf Grund dieser zahlenmäßigen Fassung der Dauerverkürzung ließ sich dann auch die Zentrenverteilung für — 55° C berechnen (Tab. 11), ohne daß der vollständige Abklingungsverlauf bekannt war.

Bei weiterer Temperatursteigerung werden nun die kleinen Zentren vollständig von der gesteigerten Wärmebewegung erfaßt, deren große Amplituden den Zusammenhang der Atome des Zentrums unmöglich machen; dies aber bedeutet den Zerfall der kleinen Zentren. Die großen Zentren — ursprünglich von langer Dauer — werden in noch erhöhtem Maße von der Wärmebewegung zum Abklingen gebracht (47), ohne aber noch zu zerfallen.

Wird die Temperatursteigerung fortgesetzt, so wird schließlich die Wärmebewegung auch die großen Zentren zum Zerfall bringen; damit ist die obere Grenztemperatur der betreffenden Bande erreicht (48).

Diese Darstellung macht unsere Versuchsergebnisse in befriedigender Weise verständlich. In 0,01 normalem Phosphor sind nur große Zentren (bei Zimmertemperatur von langer und längster Dauer) vorhanden; um sie zum Zerfall zu bringen, ist nicht nur eine Beseitigung der sie möglicherweise umgebenden energieisolierenden Hohlräume nötig, sondern auch der Größe der Zentren entsprechende große Amplituden der Wärmebewegung, die, wie Fig. 7 zeigt, erst bei Temperaturen von über 360° C erreicht sind. Die kleinen Zentren, die beim 0,1 normalen Phosphor vorhanden sind, erliegen schon weniger großen Wärmeschwingungen; schon Temperaturen über 125° C bringen sie zum Zerfall. Die noch kleineren Zentren (bei Zim-

Tabelle 11.

CaBi α 1,0 normal.

Zentrenverteilung bei $-55°$ C.

Dauer δ	Mittel der δ-Grenzen d. Dauern einer Gruppe	Differenz der Mittel $= d\delta$ *Bereich* der Dauern einer Gruppe	$z(\delta)\,d\delta =$ Zahl der Zentr., der. Dauern in dem betr. Bereich liegen	$\frac{z(\delta)\,d\delta}{d\delta} =$ Zahl der Zentren, deren Dauer $\delta \pm {}^1/_2$ Std. ist
16 Sek.	8 Sek.	0,0111 Std.	2,725	245,26
80 „	48 „	0,097667 „	8,834	90,452
720 „	400 „	0,272167	7,513	27,604
40 Min.	23 Min.	1,6167 „	19,551	12,093
200 „	120 „	6,33.. „	17,496	2,7627
800 „	500 „	14,33.. „	15,227	1,0624
40 Std.	1600 „	73,33.. „	12,840	0,17509
160 „	100 Std.	220 „	9,904	0,045018
480 „	320 „	880 „	6,477	0,0073602
1920 „	1200 „	1200 „	5,431	0,0045259
2880 „	2400 „	1440 „	5,243	0,003641
4800 „	3840 „	3360 „	4,461	0,0013277
9600 „	7200 „	7200 „	3,427	0,00047597
19200 „	14400 „	9600 „	3,079	0,00032073
28800 „	24000 „	14400 „	2,035	0,00014132
48000 „	38400 „	33600 „	1,363	0,000032222
96000 „	72000 „	72000 „	0,934	0,000012973
192000 „	144000 „	144000 „	0,482	0,0000033472
384000 „	288000 „	∞	8,565	—
	∞			

mertemperatur von kürzester Dauer), die bei der 1,0 normalen Probe ausgebildet sind, sind schon durch die noch geringeren Wärmeschwingungen zum Zerfall zu bringen.

Das im vorliegenden für die CaBi-α-Bande Durchgeführte wird ohne Zweifel auch auf andere Phosphoreszenzbanden anwendbar sein, und es ist auch schon nach Hrn. Hoffmanns Messungen sehr wahrscheinlich, daß unsere Schlüsse für alle Banden der Erdalkaliphosphore, auch wohl des Zinksulfids gelten, wenn auch die Berücksichtigung der Zentren kürzester Dauer noch fehlt. Besonders bei CaMn α sieht man aus den Zahlen des Hrn. Hoffmann, daß der starke Abfall der vollen Lichtsumme, also der Gesamtzentrenzahl, mit der Temperatur zwar durch jene Berücksichtigung noch gemildert, aber sicherlich nicht ganz aufgehoben werden kann.

Diese ganzen, eben beschriebenen, im Phosphor vor sich

gehenden Veränderungen verlaufen bei abnehmender Temperatur in umgekehrter Richtung, so daß die ursprünglich vorhandene Zentrenverteilung sich wieder herstellt, wofür durch unsere Versuche der Nachweis erbracht ist, indem die Abklingung bei Rückkehr zu den tieferen Temperaturen nach Erhitzung stets wieder in gleicher Weise ablief, wenn nur hierbei die obere Grenztemperatur der betreffenden Bande nicht überschritten worden war. Der Zerfall der Zentren muß also in ganz anderer Weise vor sich gehen, als wie man ihre Zerstörung durch Druck sich wohl vorzustellen hat, wo ein Zerreißen der Atomringe oder -ketten (49) angenommen wird; vielmehr werden infolge der gesteigerten Wärmebewegung die Amplituden der Wärmeschwingungen der einzelnen Atome so groß werden, daß der Zusammenhalt des ganzen Zentrums verloren geht, ohne daß aber die Bestandteile der Zentren weit voneinander getrennt werden. Daß dabei aus den *d*-Zentren nicht etwa *m*-Zentren werden, zeigen wir im folgenden Abschnitt. Bei der Rückbildung der *d*-Zentren werden diese sich aus ihren früheren Bestandteilen wieder so zusammenlagern, daß die ursprüngliche Zentrenverteilung und die ursprüngliche Lichtsumme sich wieder herstellen (50). Hat dagegen die Erhitzung die obere Grenztemperatur überschritten, so wird auf den Zentrenzerfall noch eine Wanderung der Atome — durch Diffusion wie bei der Bereitung des Phosphors — folgen. Die nachfolgende Abkühlung bringt dann nicht eine Wiederherstellung der vorher vorhandenen Zentren, sondern eine Neubildung von Zentren aus den — inzwischen aber vollständig durcheinandergebrachten — Bestandteilen der früheren Zentren. Die Zentrenverteilung und — wenn Metall verloren gegangen ist — auch die gesamte Lichtsumme des so entstandenen Phosphors können dann natürlich andere sein, als die ursprünglichen (51). Immerhin zeigt aber die gute Wiederherstellbarkeit von Phosphoren, die auch in der Größenverteilung der Zentren mindestens nahe gleich beschaffen sind, daß der Spielraum der Gruppierungsmöglichkeiten der vorhandenen Atome bei gleichen Temperaturverhältnissen — wie sie beim Abkühlen nach der Bereitung vorkommen — nicht groß ist.

Temperaturverhalten der Momentanzentren.

Die bisher vorliegenden Untersuchungen über diesen Gegenstand sind im wesentlichen rein qualitativer Natur und sagen

aus, daß der Momentanprozeß den Einflüssen der Temperatur in weit geringerem Maße unterliegt, als der Dauerprozeß, der für eine bestimmte Bande an bestimmte Temperaturgrenzen gebunden ist (52). Die einzigen quantitativ durchgeführten Beobachtungen über das *m*-Leuchten erstrecken sich auf die Abhängigkeit der *m*-Intensität vom Metallgehalt (53) (lichtelektrische Meßweise) und von der erregenden Intensität (54) (photometrische Methode). Die folgenden, den Einfluß der Temperatur auf das *m*-Leuchten behandelnden Versuche wurden nach der lichtelektrischen Meßweise durchgeführt.

Versuchsanordnung. Der Phosphor befand sich, genau wie bereits oben beschrieben, wagrecht vor der Lichteinlaßöffnung der Zelle auf dem elektrisch heizbaren Platinblech. Als Lichtquelle zur Erregung diente ein Kohlebogen, dessen Intensität durch Ablesen von Stromstärke und Spannung, sowie durch Nachrichten gut konstant erhalten werden konnte. Der Wellenlängenbereich des erregenden Lichtes war der des „Filterultravioletts" (55). Der günstigste Verdünnungsgrad der benützten Filterflüssigkeiten wurde mittels Lichtbildern ermittelt, auf Grund deren eine wässerige Lösung von Nitrosodimethylanilin (0,025 g in 100 g Wasser) in einem Trog aus Violett-Ultraviolett-Gläsern und eine wässerige Lösung von Kupfersulfat in gewöhnlichem Glastrog (zum Fernhalten von Rot und Ultrarot) verwendet wurden. Der durchgelassene Wellenlängenbereich ging von 340 bis 360 $\mu\mu$ und umfaßte gerade die erste ultraviolette Cyanbande ($\lambda = 359\,\mu\mu$) des Kohlebogens. Da die Messung der Intensität des *m*-Leuchtens während der Eregung vor sich geht, muß auch noch für das Fernbleiben des vom Phosphor zerstreut zurückgeworfenen ultravioletten Lichts gesorgt sein. Dies geschah durch das bereits oben beschriebene Blaugelatinefilter, das in Glasplatten eingebettet war und, wie besonders festgestellt, die Hg-Linie 365 $\mu\mu$ nicht mehr durchließ. Dies wurde außerdem dadurch nachgeprüft, daß an Stelle des Phosphors auf das Heizblech gepulverte Kreide aufgestreut wurde und während der Bestrahlung bei geöffneter Zelle der Gang des Elektrometers beobachtet wurde; dieser war vollkommen gleich dem bei geschlossener Zelle. Die Intensitätsmessung ging dann einfach in der Weise vor sich, daß während der Erregung die lichtelektrische Zelle mit dem Schlag einer Sekundenuhr geöffnet

und nach einer gemessenen Zeit wieder geschlossen wurde. Die Elimination des *d*-Leuchtens, das auch an der gemessenen Intensität Anteil hat, geschah mit sinngemäßer Anwendung der von Hrn. Lenard angestellten Untersuchungen (56).

Ergebnisse der Messungen. Es wurde das *m*-Leuchten der *a*-Bande eines 5,0 normalen CaBi-Phosphors (57) gemessen. Tab. 12 zeigt, daß in dem beobachteten Temperaturbereich die Helligkeit des *m*-Leuchtens vollständig konstant bleibt.

Tabelle 12.

m-Leuchten und Temperatur bei CaBi *a* 5,0 normal.

Temperatur °C	Intensität (Skalenteile/30 Sek.) I. Versuchsreihe	II. Versuchsreihe	Verhältniszahl
Zimmertemp.	27,5	39,5	1,43
100°	26,9		
200	27,6	40,0	1,45
300	28,0	39,3	1,40
400	27,6		
415		39,4	
530		39,2	

Folgerungen. Aus diesem Versuchsergebnis ergibt sich eine einwandfreie Bestätigung der von Hrn. Lenard schon früh (58) aus der Untersuchung der Erregungsverteilungen gezogenen Schlüsse. Danach sind also die *m*-Zentren in ihrem Temperaturverhalten völlig verschieden von den *d*-Zentren; sie sind außerordentlich temperaturbeständig. Schon die Untersuchungen von Hrn. Lenard haben dies angezeigt (59); unsere Messungen zeigen aber nun sogar genaue Konstanz des Leuchtens aller *m*-Zentren der untersuchten Bande bis zu den höchsten in Betracht kommenden Temperaturen hinauf. Es kann demnach das Leuchten der *m*-Zentren mit dem im oberen Momentanzustand momentan scheinenden, weil sehr kurz dauernd und schwach gewordenen Leuchten der *d*-Zentren auch gar nichts zu tun haben. Verschwinden muß das *m*-Leuchten ziemlich plötzlich bei der oberen Grenztemperatur, die alles Leuchten der Banden verschwinden läßt. Der obere Momentanzustand der größten Zentren der *a d*-Bande beim CaBi-Phosphor beginnt, wie aus Fig. 7 ersichtlich, etwas unterhalb 400° C, der der kleinsten *d*-Zentren schon unterhalb 100° C, während die obere Grenztemperatur der *a m*-Zentren, wie

Tab. 12 zeigt, über 530° C liegen muß. Daß der obere Momentanzustand für kleine Zentren tiefer liegt als für große, hat Hr. Lenard bereits indirekt aus Ausleuchtungs- und Tilgungsbeobachtungen (60) geschlossen. Die direkte Bestätigung dessen ist sehr wertvoll, da dadurch auch die dortigen auf ganz andere ziemlich verwickelte Vorgänge bezüglichen Schlüsse bestätigt werden. Man kann demnach als obere Grenztemperatur der gesamten CaBi α-Phosphoreszenz etwa 600° C angeben, da bei dieser Temperatur (beginnende Rotglut) alles Leuchten (m- und d-Bande) in der Tat aufhört, was auch betreffs des d-Leuchtens in guter Übereinstimmung mit Fig. 7 ist (61). Die oberen Momentanzustände der d-Zentren verschiedener Größe einer Bande stellen also die Zerfallstemperaturen der betreffenden Zentren dar und bilden den Übergang zur oberen Grenztemperatur, die die Temperatur des vollständigen Zerfalls aller Zentren einer Bande bedeutet. Schließlich bringt unser Versuchsergebnis, das konstante m-Leuchten, noch den Nachweis dafür, daß im oberen Momentanzustand der d-Bande die d-Zentren wirklich zersetzt und nicht in m-Zentren umgewandelt werden.

Zusammenfassung.

Das Abklingen der Phosphoreszenzbanden wird — nach der lichtelektrischen Lichtsummenmeßweise mit besonderen Zusätzen zur Zeitmessung — bis zu sehr kurzen Zeiten nach Schluß der Erregung zahlenmäßig verfolgt.

Die Abhängigkeit des Abklingens von der Temperatur wird — unter Beobachtung aller Vorsichtsmaßregeln — zur Vervollständigung von bereits von Hrn. Hoffmann ermittelten Kenntnissen eingehend untersucht.

Aus den so in größter Reinheit erhaltenen Abklingungsverlaufen werden für CaBi α 1,0 normal die Zentrenverteilungen bei verschiedenen Temperaturen berechnet. Hieraus und aus den besonders ermittelten Abklingungsverlaufen unternormaler Phosphore werden folgende Schlüsse auf das Temperaturverhalten der d-Zentren gezogen.

Die bekannte, durch Temperatursteigerung verursachte Dauerverkürzung aller Zentren wird bestätigt, in einem Falle

zahlenmäßig gefaßt und zur Berechnung der Zentrenverteilung nutzbar gemacht. Mit ihr gleichlaufend geht jedoch eine Zerstörung (Verminderung der Anzahl) der Zentren derart vor sich, daß sie bei Temperatursteigerung, mit den kleinen beginnend, zerfallen; die großen Zentren folgen dann bei weiterem Temperaturanstieg in diesem Zerfall. Die Rückbildung der *d*-Zentren erfolgt nur dann in ihrer ursprünglichen Beschaffenheit und Verteilung, wenn die obere Grenztemperatur nicht überschritten war.

Die besonderen Zustände der Banden, oberer Momentanzustand und obere Grenztemperatur, werden für die einzelnen Zentrensorten in verfeinerter Form definiert, wobei frühere auf anderen Wegen erschlossene Tatsachen aufs beste bestätigt werden.

Die Hitzebeständigkeit der Momentanzentren wird in einem großen Temperaturbereich durch quantitative Versuche bestätigt.

Anmerkungen.

1. Teil I des Auszuges der erweiterten Heidelberger Dissertation vom 11. November 1921.

Literaturnachweis: Ein Verzeichnis der Arbeiten, auf die im folgenden Bezug genommen werden wird, findet sich in: P. Lenard, Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht, Teil I. Eußnote. 1. Sitz.-Ber. d. Heidelb. Ak. d. Wiss. Math.-naturw. Kl. 1917, 5. Abh. Außerdem werden (mit den eingeklammerten Bezeichnungen) folgende Arbeiten erwähnt werden: P. Lenard und V. Klatt, Über die Vernichtung der Phosphoreszenz durch Druck. Ann. d. Phys. 12. S. 439. 1903 („1903"). P. Lenard, Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht, Teil I, II, III, IV. Heidelb. Ak. d. Wiss. 5. und 7. Abhandlung 1917, 8. und 11. Abh. 1918 („Ausl. u. Tilg. I, II, III, IV"). W. E. Pauli, Über ultraviolette und ultrarote Phosphoreszenz. Ann. d. Phys. 34. S. 739. 1911 („Pauli"). I. Hirsch, Über die Bildungsgesetze der Phosphoreszenzzentren bei den Erdalkaliphosphoren. Heidelberger Diss. 1912. („Hirsch"). P. Borissow, Die Energieverteilung in den Emissionsspektren der CaBi und SrBi-Phosphore. Ann. d. Phys. 42. S. 1321. 1913 („Borissow"). W. Hausser, Photometrische Bestimmungen an Phosphoreszenzbanden. Heidelb. Diss. 1913 („Hausser").

2. Lichtemission 1909, S. 11.

3. Abklingen 1912.

4. Eine zusammenfassende Darstellung des Mechanismus der Vorgänge in und um die Zentren findet sich in der Einleitung zu Ausl. und

Tilg. I. Die Eigenschaften der Zentren sind auf Grund der verfeinerten Vorstellungen in Ausl. und Tilg. IV ausführlich dargelegt.

5. Es ist hier absichtlich von Dauerzentren verschiedener Größe gesprochen aus dem Ausl. und Tilg. I., S. 24, angegebenen Grund.

6. Abklingen 1912, S. 50.

7. Abklingen 1912, S. 51.

8. Lichtabs. 1914, S. 26, Fußnote 1.

9. Abklingen 1912, S. 35 ff. Hirsch, S. 39 ff.

10. Über den Zusammenhang zwischen der Wärmebewegung, dem Abklingen und den Eigenschaften der *d*-Zentren siehe Ausl. und Tilg. I, S. 8 ff. und IV, S. 17 ff. Daß der Vorgang der Abklingung durch die Wärmebewegung ausgelöst wird, wurde schon früh erkannt; Abklingen 1912, S. 41.

11. Ausl. und Tilg. I, S. 24. Zuerst aufgeworfen und als experimenteller Beantwortung zugänglich gezeigt ist die Frage in Abklingen 1912, S. 54.

12. Abklingen 1912, S. 51.

13. Lichtsummen 1912, S. 4 ff.

14. Lichtsummen 1912, S. 5.

15. Außer diesen beiden Abklingungskurven hat Hr. Hoffmann durch Versuche ermittelt die Abklingungsverläufe von: CaMn α normal bei Zimmertemperatur, 30° C, 50° C, 70° C, ZnMn α, ZnCu α, ZnCu γ, SrZn α, diese vier bei Zimmertemp.; für diese vorstehenden und die folgenden schon früher ermittelten Abklingungskurven sind von Hrn. Hoffmann die Zentrenverteilungen berechnet: CaBi α normal, bei Zimmertemp. (Abklingen 1912, Tab. II); bei 155° C (ebenda, Tab. VI); CaBi α 0,023 normal (ebenda, Tab. III); SrBi α normal (ebenda, Tab. VII); SrCu β normal (ebenda, Tab. VIII); ZnCu α (ebenda, Tab. IX); CaCu β normal (Lichtabs. 1914, Tab. III), diese fünf bei Zimmertemp.

16. Abklingen 1912, S. 35.

17. A. Pospielow, Zur lichtelektrischen Photometrie der Phosphoreszenzerscheinungen. Ann. d. Phys. 45. S. 1039. 1914.

18. Auf den Einfluß des Metallgehalts auf den Intensitätsabfall gerade während der frühesten Zeiten des Nachleuchtens ist von Hrn. Lenard schon 1912 hingewiesen worden (Abklingen S. 30 f.). Die Verwendung nicht selbst hergestellter Phosphore genau bekannten Metallgehalts kann deshalb nur als Rückschritt bezeichnet werden. Daher rührt auch z. B. die Beobachtung Hrn. Pospielows (a. a. O., S. 1047), Abkühlung des CaBi-Phosphors auf die Temperatur der flüssigen Luft ändere den Abklingungsverlauf fast gar nicht. Derartige Beobachtungen an nicht wohldefinierten Körpern sind nur geeignet, bereits gesicherte und wohl begründete Kenntnisse wieder zu verwischen.

19. Über die Wirksamkeit dieses Zusatzes ist bereits 1904, Taf. I e und S. 648 berichtet. Daß keine anderen Einflüsse auf den Phosphor statthaben, als solche auf die Schmelzbarkeit der Masse und die Härte des fertigen Phosphors, wurde durch Vergleich von mit und ohne CaF_2 hergestellten Phosphoren bestätigt.

20. Lichtsummen 1912, S. 4 ff.

21. Ausl. und Tilg. II, S. 10 ff.
22. Absol. Messung, 1913, S. 15 ff.
23. Lichtsummen 1912, S. 7 ff.; Abklingen 1912, S. 9.
24. Abklingen 1912, S. 32, 44.
25. Ausl. und Tilg. II, S. 20 ff. und III, S. 9 ff. Inzwischen hat Hr. E. Rupp festgestellt, daß tilgungsfreie Erregung wenigstens der großen Zentren durch Kathodenstrahlen möglich ist (Heidelb. Diss. 1922).
26. Lichtsummen 1912, S. 32; Abklingen 1912, S. 50 f.
27. Ausführliches über Bandentrennung, sowie α- und β-Zentren siehe Ausl. u. Tilg. III, S. 23 ff.
28. Ausl. u. Tilg. III, S. 31.
29. Pauli, S. 750.
30. Einführung des Begriffs der Nebenbanden, Ausl. u. Tilg. III, S. 24.
31. Abklingen 1912, S. 25, Taf. X, Zeile 3.
32. Quantitativ außer bei CaBi α, nur noch bei SrBi α untersucht (Borissow); festgestellt ist sie sonst noch bei SrCu β (Lichtsummen 1912, S. 11), BaBi α (ebenda, S. 13) und in sehr geringem Maße bei ZnCu α (ebenda, S. 14 und Abklingen 1912, S. 24).
33. Lichtsummen 1912, S. 11; Abklingen 1912, S. 23.
34. Abklingen 1912, S. 14, Taf. II und Fig. 2.
35. Abklingen 1912, S. 17, Taf. VI.
36. Absol. Messung 1913, S. 17, Taf. IV.
37. Abklingen 1912, S. 16, Taf. IV.
38. Absol. Messung 1913, S. 18.
39. Abklingen 1912, S. 32 f.
40. Abklingen 1912, S. 35.
41. Mit einem Amslerschen Kompensationsplanimeter, das mir Hr. Prof. F. Pfeiffer aus dem hiesigen mathematischen Institut zur Verfügung stellte, wofür ich ihm aufrichtig dankbar bin.
42. Pohl und Pringsheim, Verh. d. D. phys. Ges. 12. S. 357. 1913.
43. Lichtsummen 1912, S. 28.
44. Abklingen 1912, S. 33 f.
45. Über diese auf Grund besonderer Beobachtung von Hrn. Lenard geäußerte Vermutung, sowie über die Energieisolation überhaupt und deren Zusammenhänge mit der Zentrendauer und der Temperatur siehe Ausl. u. Tilg. IV, S. 20 ff.
46. Ausl. u. Tilg. IV, S. 20 ff.
47. Bereits Abklingen 1912, S. 43 vorausgesagt.
48. Vergleiche hierzu auch Ausl. u. Tilg. I, S. 24, Fußnote 49.
49. E. und G. Festschr. S. 683.
50. Vergleiche hierzu das über Rückbildung druckzerstörter Zentren Mitgeteilte, E. und G. Festschr. S. 669, 670, 686.
51. Solche Veränderungen sind in der Tat beobachtet.
52. Lichtemission 1909, S. 22. Hirsch, S. 40.
53. Abklingen 1912, S. 37 ff.
54. Hausser, S. 24 ff.
55. 1904, S. 244.

56. Abklingen 1912, S. 40.

57. Der hohe Metallgehalt findet seine Begründung in der von Hrn. Lenard angestellten Untersuchung, Abklingen 1912, S. 37 ff.; siehe auch Hirsch, S. 41.

58. Lichtemission 1909, S. 11, 22.

59. Lichtemission 1909, S. 22, 27.

60. Ausl. u. Tilg. II, S. 23, Fußnote 131.

61. Die 1904 von den Hrn. Lenard und Klatt benützte Beobachtungsweise konnte die Zentren längster Dauer nicht mit berücksichtigen und hat daher die obere Grenztemperatur der CaBi-Phosphoreszenz tiefer, bei 500° C angezeigt; 1904, Tab. III e, S. 436.

(Eingegangen 20. August 1922.)

2. *Über die Beständigkeit der Phosphoreszenzzentren. II* (1); von *Hans Kuppenheim.*

Beständigkeit gegen Druckzerstörung.

Die bis jetzt vorliegenden Untersuchungen (2) über diese Erscheinungsgruppe der Phosphoreszenz behandeln außer der Tatsache der Zerstörungsfähigkeit und der Wiederherstellung des unzerstörten Zustandes nur die mit der Zerstörung verbundenen Erscheinungen, wie Druckfärbung und Entfärbung, sowie die verschiedene lichtelektrische Wirksamkeit zerstörter und unzerstörter Phosphore (3). Über etwaige Verschiedenheit der Wirkung des Drucks auf die beiden Zentrenarten, Dauer- und Momentanzentren, sowie auf Zentren verschiedener Dauer, liegen nur wenige Beobachtungen vor, die einmal nicht zahlenmäßig gefaßt und zum anderen auch nicht in allen Punkten in Übereinstimmung miteinander zu bringen sind. Ebenso verhält es sich mit der Frage, welcher Art überhaupt die Zerstörung der Zentren sei. Herr Lenard schließt aus der Tatsache der Druckzerstörung und aus einer Reihe anderer Eigenschaften der Phosphore (4) auf einen sperrigen, besonders raumbeanspruchenden Aufbau der Zentrenmoleküle und erklärt die Druckzerstörung als Zerteilung (5) der Zentrenmoleküle durch Zerreißen der ring- oder kettenförmigen Anordnung ihrer Atome. Herr W. E. Pauli (6) dagegen nimmt an, daß der Druck die Atome im Zentrum einander näher bringe. Während Hr. Lenard Beobachtungen mitteilt (7), nach denen *Dauer- und Momentanprozeß* durch Druck zerstört wird und daraus den Schluß vom sperrigen Aufbau der *d*-Zentren auch auf die *m*-Zentren ausdehnt, beschreibt Hr. Pauli einen Versuch (8), aus dem hervorzugehen scheint, daß die *m*-Zentren der Zerstörung in viel geringerem Maß unterliegen, als die *d*-Zentren.

Die folgenden Versuche sollen nun einmal über den Vorgang der Druckzerstörung überhaupt größere Klarheit schaffen, sodann quantitativ feststellen, in welchem Maße die verschie-

denen Zentren, Dauerzentren verschiedener Größe und Dauer- und Momentanzentren der Zerstörung ausgesetzt sind.

Zerstörungsarten. Die Druckzerstörung geschah auf folgende Weisen:

a) Durch Zerreiben des Phosphors in der Reibschale.

b) Durch Behandeln des Phosphors mit der Feile. Um deren Wirkung möglichst zu erhöhen, muß der Phosphor so hart als möglich sein. Bei der Bereitung wurde deshalb der Flußspatzusatz (9) auf das Vierfache erhöht. Nachdem dann der Abklingungsverlauf dieses so erhaltenen steinharten Kuchens nach dem bereits beschriebenen Verfahren (10) ermittelt worden war, wurde der Phosphor mit der Feile bearbeitet und in gleicher Weise der Abklingungsverlauf des angefeilten Kuchens und des von der Feile abgefallenen druckzerstörten Pulvers gemessen. Diese Zerstörungsart ist allen andern, auch den nachstehend beschriebenen, überlegen, läßt sich jedoch nicht in meßbarer Abstufung durchführen.

c) Durch Zerdrücken des Phosphors in der hydraulischen Presse. Um dem Druck in möglichst gleichmäßiger Weise zu erliegen, mußte der Phosphor ein gleichmäßiges, möglichst weiches Pulver sein, was durch Weglassen des Flußspatzusatzes bei der Bereitung erreicht wurde. Der druckzerstörte Phosphor hatte die Gestalt einer flachen (ungefähr 0,13 cm dicken), runden (Durchmesser ungefähr 1,25 cm) Pille. Die Ermittlung der Größe des zerstörenden Druckes geschah durch Vergleich der zur Zerstörung am Hebel der Presse aufgewendeten Muskelkraft mit der zur Spannung eines an derselben Stelle angebrachten Dynamometers erforderlichen Kraft, was mit einiger Übung wohl gelang, nach einfacher Umrechnung auf Grund der Abmessungen der Presse und des Stempels. Die Einwirkung des Druckes dauerte 1 Minute lang.

d) Während bei den eben beschriebenen Zerstörungsarten die Wirkung des Druckes stets eine einseitige war, stellt die sogleich zu beschreibende Behandlungsart eine allseitige Wirkung des Drucks dar. Hierzu wurde das Phosphorpulver in Vaselineöl suspendiert; dessen Wirkungslosigkeit auf den Bestand des Phosphors wurde besonders untersucht. Ein Teil der Flüssigkeit wurde dann in einem zylindrischen Stahlblock von 2,6 cm Wandstärke mit eingeschliffenem und mittels Bleischeiben gut gedichtetem Stahlstempel in der hydraulischen

Presse dem gewünschten Druck 1 Minute lang ausgesetzt. Sodann wurde das dem Phosphor anhaftende Öl mit Benzol gründlich ausgewaschen, das gut getrocknete Phosphorpulver auf das Heizblech aufgesiebt und dessen Abklingung gemessen. Der nicht in der Presse behandelte Teil der Flüssigkeit wurde durch Waschen und Trocknen genau so behandelt, so daß der Abklingungsverlauf des nicht gedrückten Phosphors unmittelbar mit dem anderen vergleichbar war. Die Messung des aufgewendeten Drucks erfolgte wie unter c) beschrieben; zur Ermittlung der beim Eintreiben des Stempels auftretenden Reibung wurde mittels angehängter Gewichte die hierzu erforderliche Kraft gemessen, wobei das im Stahlblock befindliche Öl durch eine unterseitige Bohrung entweichen konnte.

Versuchsanordnung. Die Abklingung wurde genau in der schon beschriebenen Weise gemessen (11); hierbei wurden teils die Metalltröge (für pulverförmige Proben bei langfristigen Versuchen), teils das wagrecht vor der Zelle befindliche Heizblech (für die harten Kuchen, die Pillen und die pulverförmigen Proben bei kurzfristigen Versuchen) verwendet. Die Untersuchung des Momentanleuchtens erfolgte ebenfalls nach dem schon beschriebenen Verfahren (12); da hier jedoch ein SrCuNa-Phosphor zur Messung gelangte, wurde das vom Phosphor zurückgestrahlte Ultraviolett durch andere Filter als dort von der Zelle ferngehalten. Hierbei wurden zwei Wege eingeschlagen. Einmal befand sich vor der Zelle ein Glastrog mit wäßriger Chininsulfatlösung, deren Fluoreszenzlicht mittels auf das Heizblech aufgestreuter gepulverter Kreide besonders gemessen und in Abzug gebracht wurde. Das *m*-Licht des Phosphors selbst war längerwelliger als das Fluoreszenzlicht der Lösung; von ihm konnte das letztere also nicht erregt werden. Die zweite Art der Fernhaltung des Ultravioletts erfolgte durch eine nicht fluoreszierende Gelbgelatine, die dem Licht des Phosphors kein Hindernis war, das Ultraviolett dagegen vollkommen verschluckte, was besonders festgestellt wurde; in diesem Falle erübrigte sich also eine Elimination.

Verhalten der Dauerzentren. Versuchsergebnisse. Die in Tabelle 1 und Figur 1 dargestellten Abklingungsverläufe von CaBi *a* zeigen, daß das Verhältnis der Lichtsummen der unzerstörten und der druckzerstörten Proben zu allen Zeiten nach Schluß der Erregung einen festen Wert hat. In der

Tabelle 1.

CaBi α 1,0-normal.

Abklingung der unzerstörten und der druckzerstörten Probe.

Zeit nach Schluß der Erregung	Lichtsumme der unzerstörten Probe	Lichtsumme der zerstörten Probe	Verhältniszahl
1 Min.	100 Skt.	40,1 Skt.	0,401
5 „	84,5 „	33,5 „	0,397
30 „	61,4 „	25,6 „	0,399
1 Std.	51 „	20,5 „	0,402
3 „	38,1 „	15,4 „	0,404
12 „	31,3 „	12,5 „	0,399
24 „	28,8 „	11,5 „	0,399

CaBi α 1,0-normal.

Abklingung unzerstörter und druckzerstörter Proben während der ersten Minute

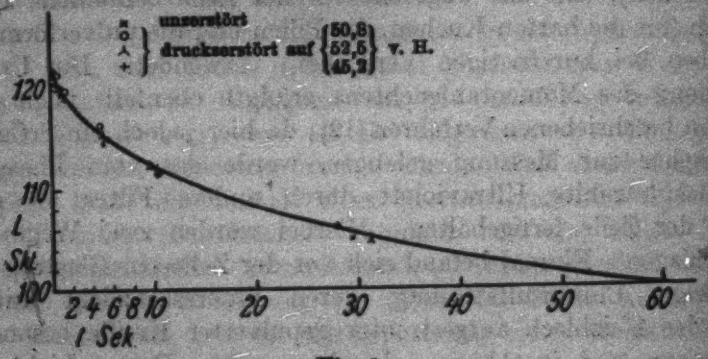


Fig. 1.

Figur ist der Vergleich so vorgenommen, daß die Lichtsummen nach 1 Minute nach Schluß der Erregung aneinander gleich und = 100 gesetzt sind; man erkennt, daß bis zu den kürzesten Zeiten nach Schluß der Erregung die Abklingung in genau derselben Weise abläuft. Ein solches Verhalten wiesen alle Phosphorproben auf, die nach den ersten drei der beschriebenen Zerstörungsarten behandelt worden waren. Die vierte Behandlungsweise hingegen zeigte, wie nicht nur der Augenschein lehrte, sondern Lichtsummenmessungen bestätigten, selbst bei bis zu 7500 Atm. gesteigerten Drucken keine Spur von Druckzerstörung.

Deutung. Das eben beschriebene Verhalten der druckzerstörten Phosphore bei der Abklingung führt zu dem Schluß, daß der zerstörende Druck die *d*-Zentren verschiedener Größe in vollkommen gleicher Weise erfaßt. Gegenüber der groben mechanischen Einwirkung von Druck- und Zerreißungskräften sind die Verschiedenheiten ihrer Größen nicht von Bedeutung (18). Die Wirkungslosigkeit des allseitigen Drucks auf die Zentren bestätigt die von Hrn. Lenard geäußerte Vorstellung von der Druckzerstörung (14), wonach ein Zerreißen der ring- oder kettenförmigen Anordnung der Atome im Zentrum als Folge der beim einseitigen Druck auftretenden scherenden Kräfte stattfindet. Die von Hrn. Pauli geäußerte Vermutung (15), der Druck bewirke eine Verkleinerung der Zentren, findet dagegen keinen Anhalt in unseren Beobachtungen; die Verwandlung von großen Zentren (langer Dauer) in kleine (kurze Dauer) hätte in unseren Versuchen sehr merklich werden müssen, wenn sie eingetreten wäre. Der Vermutung Hrn. Lenards vom Vorhandensein großer Hohlräume um die *d*-Zentren (16) widersprechen unsere Beobachtungen insofern nicht, als gerade solche Hohlräume wohl einem allseitigen, nicht aber einem einseitigen Druck gegenüber als sehr widerstandsfähig zu erwarten wären.

Verhalten der Momentanzentren. Vorversuche. Eine sichere Beantwortung der Frage, in welcher Weise die *m*-Zentren vom Druck erfaßt werden, ist nur auf Grund quantitativer Versuche — die bisher nicht vorliegen — möglich. Augentäuschungen — unausbleiblich bei geringen Helligkeitsunterschieden bei großer absoluter Helligkeit beispielsweise — können sonst leicht in die Irre führen. Wie wenig das Auge imstande ist, einwandfreie Versuchsergebnisse zu liefern, zeigt folgendes Beispiel. Ein stark momentan leuchtender SrCu-Phosphor wurde in einer Reibschale zerrieben und dem Licht eines mit einem V-U-V-Glas versehenen Eisenbogens ausgesetzt; gleichzeitig wurde auch der unzerstörte Phosphor durch denselben Bogen zum Leuchten angeregt. Bei der flächenhaften Ausbreitung des zerstörten Pulvers in der Reibschale war mit dem Auge ein Helligkeitsunterschied zwischen beiden Proben nicht festzustellen, im Gegensatz zur quantitativen Untersuchung nach der oben beschriebenen Weise, die nachfolgende Ergebnisse lieferte.

Tabelle 2.

SrCu α, Momentanleuchten.

	Intensität		Verhältniszahl
	Unzerstört	Zerstört	
I. Probe a) mit Chininsulfatfilter.			
m-Leuchten + Fluoreszenz des Filters . .	64,1 Skt./30 sec	34,7 Skt./30 sec	
Fluoreszenz d. Filters .	24,1 „	24,1 „	
m-Leuchten allein . . .	40,0 „	10,6 „	100 : 26,5
b) mit Gelbfilter.			
1. Versuchsreihe . . .	5,8 „	1,7 „	100 : 29,3
2. Versuchsreihe . . .	11,6 „	3,4 „	100 : 29,3
3. Versuchsreihe . . .	19,5 Skt./60 sec	5,8 Skt./60 sec	100 : 29,8
		Mittel	100 : 28,7
II. Probe mit Gelbfilter.			
1. Versuchsreihe . . .	7,5 Skt./30 sec	4,4 Skt./30 sec	100 : 58,7
2. Versuchsreihe . . .	14,9 „ /60 „	8,9 „ /60 „	100 : 59,7
		Mittel	100 : 59,1

Tabelle 3.

SrCu α-Dauerleuchten.

	Lichtsumme nach 30 Sek.		Verhältniszahl
	Unzerstört	Zerstört	
I. Probe.			
Kl. Oberfläche mit Gelbfilter	2,5 Skt.	0,7 Skt.	100 : 28
gr. Oberfläche mit Gelbfilter	4,3 „	1,3 „	100 : 30,2
gr. Oberfläche ohne Gelbfilter	9,6 „	2,9 „	100 : 30,2
		Mittel	100 : 29,4
II. Probe.			
Kl. Oberfläche ohne Gelbfilter	4,8 Skt.	2,9 Skt.	100 : 60,4

Versuchsergebnisse. Zur Untersuchung gelangte ein SrCuNa-Phosphor (17), der sehr starkes gelbgrünes *m*-Leuchten zeigte und in derselben Farbe nachleuchtete. Die Zerstörung geschah nach a) (I. Probe in den Tabellen 2 und 3) und nach c) (II. Probe in den Tabellen 2 und 3), hierbei mit einem Druck von

1500 Atm.; beide Proben zeigten die charakteristische rosa Druckfärbung. In Tab. 2 sind die Ergebnisse der Messungen dargestellt und in Tab. 3 die zum Vergleich ausgeführten Messungen des Dauerleuchtens. Aus den dort ersichtlichen Mittelwerten erkennt man, daß die Druckzerstörung die *m*-Zentren in genau demselben Maße erfaßt, wie die *d*-Zentren.

Folgerungen. Die Ergebnisse bestätigen die Annahme Hrn. Lenards, daß die *m*-Zentren ebenso wie die *d*-Zentren sperrig und stark raumbeanspruchend gebaut sind; für den für Hrn. Pauli nach Helligkeitsschätzungen mit dem Auge naheliegend gewesenen Schluß vom Bau der *m*-Zentren dagegen ist kein Beweis zu erbringen gewesen. Über die wahren Größen der *m*-Zentren können freilich — genau wie bei den *d*-Zentren — auf Grund der Druckzerstörungsversuche keine Aussagen gemacht werden (18).

Zusammenfassung.

Die Wirkung phosphoreszenzvernichtenden Drucks auf die verschiedenen Zentrenarten, *m*- und *d*-Zentren, und auf die *d*-Zentren verschiedener Größen ist eine völlig gleichartige; alle diese Zentren werden in gleichem zahlenmäßigen Verhältnis zerstört.

Verschiedene Arten der Druckzerstörung werden untersucht; daraus ergibt sich einmal eine Bestätigung der von Hrn. Lenard mitgeteilten Anschauung von der Art der Wirkung des Drucks auf die Zentrenmoleküle, zum andern eine gute Stütze für die Vermutung des Vorhandenseins der energieisolierenden Hohlräume in den Zentren.

Literatur.

1. Siehe Ann. d. Phys. 70. S. 81. 1923; dort auch das Literaturverzeichnis.
2. 1903; Hausser, S. 8 ff.; E.- und G.-Festschrift.
3. K. Göggel, Ann. d. Phys. 67. S. 310 ff. 1922.
4. Abklingen 1912, S. 33 ff.
5. E.- und G.-Festschrift S. 683.
6. W. E. Pauli, Ann. d. Phys. 40. S. 698. 1913.
7. E.- und G.-Festschrift, S. 669.
8. W. E. Pauli, a. a. O., S. 699.

9. 1904, S. 659, $CaFl_2$ 0,05 g; denselben Weg hatte schon Hr. Hausser eingeschlagen (Hausser, S. 10).
10. Teil I dieser Arbeit, S. 87.
11. Teil I dieser Arbeit, S. 88.
12. Teil I dieser Arbeit, S. 106.
13. Ausl. u. Tilg. IV, Taf. XI, S. 13.
14. E. u. G. Festschrift, S. 683.
15. W. E. Pauli, a. a. O., S. 698.
16. Ausl. u. Tilg. IV, S. 17.
17. Wie der von Hrn. Pauli untersuchte Phosphor, a. a. O., S. 699.
18. Die von Hrn. Lenard mitgeteilten Größen der *d*-Zentren (Ausl. u. Tilg. IV, Taf. XI) sind ebenfalls aus ganz anderen Untersuchungen und Überlegungen zahlenmäßig ermittelt.

(Eingegangen 20. August 1922.)

8. *Zur Theorie der Dispersion in einem System asymmetrischer Dipole;*

von Walter Gordon und Hartmut Kallmann.

Bekanntlich ist man durch eine Reihe physikalischer Erscheinungen, insbesondere durch die Gesetzmäßigkeiten der ultraroten Banden[1]), sowie durch den Temperaturanstieg der spezifischen Wärmen fester Körper über den Dulong-Petitschen Wert[2]), zu der Annahme geführt worden, daß es bei Gasen und festen Körpern Oszillatoren gibt, deren Bewegungsgleichung von der Form

$$\ddot{\xi} + n_0^2 \xi + \beta \xi^2 = 0 \tag{1}$$

ist. Der Einfluß des Gliedes $\beta \xi^2$ wird als klein angenommen. Es bewirkt, daß neben der Grundfrequenz (Anzahl der Schwingungen in 2π Sekunden) n_0 auch die „Obertöne" $2 n_0$, $3 n_0$ usw. auftreten. Die Quantentheorie ergibt auf Grund der Bohrschen Frequenzbedingung im Verein mit dem Analogieprinzip die diesen Obertönen entsprechenden Absorptionslinien, wie dies von Hettner[3]) bei den ultraroten Banden der Gase nachgewiesen worden ist.

Andererseits kann man auch unter Zugrundelegung der klassischen Theorie der Strahlung den Verlauf der Absorption und Dispersion in der Umgebung der Obertöne untersuchen. Nun ist aber Hr. Clemens Schäfer[4]) in einer sehr interessanten Arbeit zu dem überraschenden Resultat gekommen, daß sich nach der klassischen Theorie im Gegensatz zur Quantentheorie und Erfahrung überhaupt keine Anomalität in der Absorptions- und Dispersionskurve bei den Oberschwingungen ergibt.

Bestünde dieses Resultat zu Recht, so würde die bisher immer bestätigte Übereinstimmung zwischen Quantentheorie

1) G. Hettner, Ztschr. f. Phys. 1. S. 345. 1920; T. Heurlinger, Ztschr. f. Phys. 1. S. 82. 1920.

2) Born und Brody, Ztschr. f. Phys. 6. S. 132. 1921.

3) Hettner, l. c.

4) Cl. Schäfer, Ann. d. Phys. 67. S. 407. 1922.

und klassischer Theorie bei hohen Quantenzahlen zwar für die Emission, nicht aber für die Absorption zutreffen. Folgende Überlegung, die nur von der klassischen Theorie Gebrauch macht, zeigt aber, daß dieses Resultat im Widerspruch zur Thermodynamik steht. Stellen wir uns ein Gas von Oszillatoren der betrachteten Art im Wärmegleichgewicht mit schwarzer Strahlung vor, so würde dieses Gleichgewicht dadurch sofort gestört, daß eine selektive Emission der Frequenz $2n_0$ vorhanden ist, der keine selektive Absorption bei dieser Frequenz gegenübersteht. Um diesen Widerspruch aufzuklären, betrachten wir die emittierte und absorbierte Energie im thermodynamischen Gleichgewicht. Die von der Frequenz $2n_0$ während einer passend gewählten[1]) Zeit τ emittierte Energie ist von der Form

$$\beta^2 f(n_0) k^2 T^2 \tau . \tag{2}$$

Daher ist zu erwarten, daß die an der Stelle $2n_0$ selektiv absorbierte Energie ebenfalls von der Ordnung β^2 ist. Um den Betrag der von den Oszillatoren absorbierten Energie zu ermitteln, hat man zunächst diese Frage für alle Oszillatoren, die am Anfang der Zeit τ gleiche Energie und Phase besessen haben, zu beantworten. Stellt man das äußere Feld durch eine Fourier-Reihe dar, so hat die Bewegungsgleichung des Oszillators die Form

$$\ddot{\xi} + n_0^2 \xi + \beta \xi^3 = c \cos n t, \tag{3}$$

wobei nur ein Glied der Fourier-Reihe angeschrieben worden ist. Um diese Gleichung durch sukzessive Approximation zu lösen (die Lösung wird weiter unten ausgeführt), hat man von dem allgemeinen Integral für β gleich Null

$$\xi = A \cos (n_0 t + \vartheta) + \frac{c}{n_0^2 - n^2} \cos n t \tag{4}$$

auszugehen. Die Integrationskonstanten A und ϑ sind durch den Anfangszustand bestimmt. Man erkennt dann, daß diejenigen Terme, die zu einer selektiven Absorption an der Stelle $n = 2n_0$ führen, vom Anfangszustand nicht unabhängig sind, sondern den Faktor A^2 enthalten. Hr. Schäfer hat nun in seiner Dispersionsrechnung von vornherein $A = 0$ gesetzt.

1) Planck, Wärmestrahlung. 4. Aufl. S. 147.

Daher ist zu vermuten, daß man eine selektive Absorption und Dispersion für $2n_0$ erhält, wenn man diese Annahme nicht macht.

1.

Berechnung der Dispersion. Der Einfachheit halber sehen wir von der Absorption ab und beschränken uns auf die Untersuchung der Dispersion. Wir legen der Rechnung ein System von linear schwingenden Dipolen zugrunde. Auf dieses System lassen wir eine äußere in der z-Achse linear polarisierte ebene Welle einfallen, die am Ort des gerade betrachteten Dipols von der Form

$$p \cos n t$$

ist. Wir machen ferner die Annahme, daß nur eine Ladung (e, μ) des Dipols in Richtung der Dipolachse beweglich sei. Mit ξ bezeichnen wir die Abweichung der beweglichen Ladung von der Ruhelage und mit ψ den Winkel, den die Dipolachse mit der z-Achse bildet. Dann gilt die Gleichung (3), wobei

$$c = \frac{e}{\mu} p \cos \psi \tag{5}$$

ist. Diese nicht lineare Gleichung läßt sich nur durch die oben erwähnte sukzessive Approximation lösen. Als erste Näherung nehmen wir das Integral für $\beta = 0$

$$\xi_0 = A \cos (m t + \vartheta) + \frac{c}{n_0^2 - n^2} \cos n t. \tag{6}$$

Hierbei haben wir m an Stelle von n_0 gesetzt, um dem Umstand Rechnung zu tragen, daß (wie sich herausstellen wird) bei höheren Näherungen die Frequenz m nicht mehr mit n_0 zusammenfällt. Wir setzen (6) in Gleichung (3) in das Glied $\beta \xi^2$ ein. Auf diese Weise entsteht die Gleichung

$$\begin{aligned} &\ddot{\xi} + n_0^2 \xi + \beta \left\{ \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos 2 (m t + \vartheta) \right. \\ &\qquad + A b \cos \left((m + n) t + \vartheta \right) + A b \cos \left((m - n) t + \vartheta \right) \\ &\qquad \left. + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} \cos 2 n t \right\} = c \cos n t, \end{aligned} \tag{7}$$

wobei

$$b = \frac{c}{n_0^2 - n^2}. \tag{7a}$$

Die Lösung von (7) lautet, wenn wir zur Abkürzung die „Winkelvariabeln“

$$M = m\,t + \vartheta, \quad N = n\,t \tag{8}$$

einführen und nach Kombinationstönen ordnen:

$$\begin{cases} \xi_1 = A\cos M + b\cos N - \beta\Big\{\dfrac{A^2+b^2}{2n_0^2} \\ \quad + \dfrac{A\,b}{n_0^2-(m-n)^2}\cos(M-N) \\ \quad + \dfrac{A^2}{2(n_0^2-4m^2)}\cos 2M + \dfrac{A\,b}{n_0^2-(m+n)^2}\cos(M+N) \\ \quad + \dfrac{b^2}{2(n_0^2-4n^2)}\cos 2N\Big\}. \end{cases} \tag{9}$$

$$m = n_0. \tag{9a}$$

Nunmehr setzen wir (9) in $\beta\,\xi^2$ in (3) ein, wobei wir Glieder mit β^3 vernachlässigen. Dies ergibt die Gleichung

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + n_0^2\xi + \beta\Big\{\dfrac{A^2+b^2}{2} + A\,b\cos(M-N) + \dfrac{A^2}{2}\cos 2M \\ \qquad + A\,b\cos(M+N) + \dfrac{b^2}{2}\cos 2N\Big\} \\ \quad - \beta^2\Big\{\Big(\dfrac{A(A^2+b^2)}{n_0^2} + \dfrac{A^3}{2(n_0^2-4m^2)} + \dfrac{A\,b^2}{n_0^2-(m+n)^2} \\ \qquad + \dfrac{A\,b^2}{n_0^2-(m-n)^2}\Big)\cos M \\ \qquad + \Big(\dfrac{b(A^2+b^2)}{n_0^2} + \dfrac{b^3}{2(n_0^2-4n^2)} + \dfrac{A^2\,b}{n_0^2-(m+n)^2} \\ \qquad + \dfrac{A^2\,b}{n_0^2-(m-n)^2}\Big)\cos N \\ \qquad + A^2\,b\left(\dfrac{1}{n_0^2-(m-n)^2} + \dfrac{1}{2(n_0^2-4m^2)}\right)\cos(2M-N) \\ \qquad + A\,b^2\left(\dfrac{1}{n_0^2-(m-n)^2} + \dfrac{1}{2(n_0^2-4n^2)}\right)\cos(M-2N) \\ \qquad + \dfrac{A^3}{2(n_0^2-4m^2)}\cos 3M + \dfrac{b^3}{2(n_0^2-4n^2)}\cos 3N \\ \qquad + A^2\,b\left(\dfrac{1}{n_0^2-(m+n)^2} + \dfrac{1}{2(n_0^2-4m^2)}\right)\cos(2M+N) \\ \qquad + A\,b^2\left(\dfrac{1}{n_0^2-(m+n)^2} + \dfrac{1}{2(n_0^2-4n^2)}\right)\cos(M+2N)\Big\} \\ \qquad = c\cos n\,t. \end{cases} \tag{10}$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$
(11)\quad
\begin{cases}
\xi_2 = A\cos M + b\cos N - \beta\left\{\dfrac{A^2+b^2}{2n_0^2} + \dfrac{Ab}{n_0^2-(m-n)^2}\cos(M-N)\right. \\
\qquad + \dfrac{A^2}{2(n_0^2-4m^2)}\cos 2M + \dfrac{Ab}{n_0^2-(m+n)^2}\cos(M+N) \\
\qquad\qquad \left. + \dfrac{b^2}{2(n_0^2-4n^2)}\cos 2N\right\} \\
\quad + \beta^2\left\{\left(\dfrac{b(A^2+b^2)}{n_0^2} + \dfrac{A^2b}{n_0^2-(m+n)^2} + \dfrac{A^2b}{n_0^2-(m-n)^2}\right.\right. \\
\qquad\qquad \left.\left. + \dfrac{b^3}{2(n_0^2-4n^2)}\right)\dfrac{\cos N}{n_0^2-n^2} \right. \\
\quad + A^2b\left(\dfrac{1}{n_0^2-(m-n)^2} + \dfrac{1}{2(n_0^2-4m^2)}\right)\dfrac{\cos(2M-N)}{n_0^2-(2m-n)^2} \\
\quad + Ab^2\left(\dfrac{1}{n_0^2-(m-n)^2} + \dfrac{1}{2(n_0^2-4n^2)}\right)\dfrac{\cos(M-2N)}{n_0^2-(m-2n)^2} \\
\quad + \dfrac{A^2}{2(n_0^2-4m^2)}\cdot\dfrac{\cos 3M}{n_0^2-9m^2} + \dfrac{b^3}{2(n_0^2-4n^2)}\cdot\dfrac{\cos 3N}{n_0^2-9n^2} \\
\quad + A^2b\left(\dfrac{1}{n_0^2-(m+n)^2} + \dfrac{1}{2(n_0^2-4m^2)}\right)\dfrac{\cos(2M+N)}{n_0^2-(2m+n)^2} \\
\quad \left. + Ab^2\left(\dfrac{1}{n_0^2-(m+n)^2} + \dfrac{1}{2(n_0^2-4n^2)}\right)\dfrac{\cos(M+2N)}{n_0^2-(m+2n)^2}\right\},
\end{cases}
$$

vorausgesetzt, daß[1])

$$
(12)\qquad m^2 = n_0^2 - \beta^2\left\{\frac{5}{6}\frac{A^2}{n_0^2} + b^2\left(\frac{1}{n_0^2} + \frac{2}{4n_0^2-n^2}\right)\right\}.
$$

Wir sehen nun die durch das äußere Feld am Dipol hervorgebrachten Wirkungen als klein gegenüber den schon vorhandenen thermischen Schwingungen an, das heißt, wir berücksichtigen im folgenden nur die in b linearen Glieder. Diese Voraussetzung ist in der Dispersionstheorie üblich, sobald es sich um Gebilde mit thermischer Energie handelt.[2]) Um den Brechungsindex zu finden, haben wir das mittlere elektrische Moment der Volumeneinheit in Richtung der z-Achse f zu berechnen. Zu diesem Zwecke sind folgende Mittelungen auszuführen. Einmal haben wir über alle ϑ zu mitteln, die als gleich wahrscheinlich anzusehen sind. Ferner ist über alle Orientierungen des Dipols zur z-Achse zu mitteln. Hierbei kann man alle Lagen im Raume als gleich wahrscheinlich betrachten, da wir bei unserer obigen Rechnung vorausgesetzt haben, daß durch das äußere Feld die Richtungen der Dipolachsen nicht beeinflußt werden. Um diese Mittelung auszu-

1) Vgl. Lord Rayleigh, Theory of Sound. II. ed. I. S. 77 ff.
2) P. Debye, Münchner Berichte. S. 8. 1915.

führen, hat man ξ mit $\cos\psi$ und dem durch 4π dividierten Oberflächenelement der Einheitskugel $\frac{1}{2}\sin\psi\,d\psi$ zu multiplizieren und von 0 bis π zu integrieren. Endlich hat man noch über alle A-Werte zu mitteln. Nach Multiplikation mit Ne (N = Anzahl der Dipole in der Volumeneinheit) erhält man nach (5), (7a), (8) und (11)

$$(13)\qquad \left\{ f = \frac{Ne^2}{8\mu}\left(1 + \frac{\beta^2\,\overline{A^2}}{n_0^2 - n^2}\left(\frac{1}{n_0^2} + \frac{2}{4n_0^2 - n^2}\right)\right)\frac{p\cos n t}{n_0^2 - n^2}\right.$$

Dabei ist m in dem Koeffizienten von β^2 durch n_0 ersetzt worden, da wir alle höheren Potenzen von β als die zweite vernachlässigt haben. Wie man sieht, ist jetzt das mittlere Moment proportional zu der harmonisch schwingenden äußeren Feldstärke. Nach den Maxwellschen Gleichungen ist dieser Proportionalitätsfaktor $\frac{\nu^2 - 1}{4\pi}$, wobei ν den Brechungsindex bedeutet. Somit erhalten wir als Formel für ν

$$(14)\qquad \nu^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{8\mu(n_0^2 - n^2)}\left(1 + \frac{\beta^2\,\overline{A^2}}{n_0^2 - n^2}\left(\frac{1}{n_0^2} + \frac{2}{4n_0^2 - n^2}\right)\right).$$

2.

Diskussion. Aus der Formel (14) ersieht man, daß an der Stelle $n = 2n_0$ die erwartete Anomalität eintritt. Wegen der gemachten Vernachlässigungen besitzt zwar unsere Lösung der Gleichung (8) und mithin auch die Formel (14) für den Brechungsindex nur Gültigkeit außerhalb eines gewissen Bereiches um die Stelle $n = 2n_0$. Innerhalb dieses Bereiches würde wegen der vernachlässigten Dämpfung die Entfernung ξ der beweglichen Ladung von der Ruhelage so groß werden, daß infolge des einseitig wirkenden Gliedes $\beta\xi^2$ überhaupt keine Schwingungen mehr zustande kommen würden. Man müßte dann noch höhere Potenzen von ξ im Kraftgesetz berücksichtigen. Unsere Methode reicht aber trotzdem vollkommen aus, um das *Vorhandensein* einer Anomalität für $n = 2n_0$ festzustellen.

Die Formel (14) zeigt, daß die Wirkung der Frequenz $2n_0$ auf den Gang des Brechungsindex durch die Größe von $\overline{A^2}$ bestimmt wird. Um $\overline{A^2}$ annähernd zu ermitteln, fassen wir diejenigen Dipole ins Auge, die zur Zeit $t = t_1$ einen Zusammenstoß erlitten haben. Sei zu diesem Zeitpunkt für einen solchen Dipol ξ_0 und $\dot{\xi}_0$ der Wert von ξ bzw. $\dot{\xi}$, dann ist unter Vernachlässigung der Terme mit β

$$(15)\quad \begin{cases} A\cos\vartheta = -\frac{b}{2}\left(1+\frac{n}{n_0}\right)\cos(n-n_0)t_1 \\ \qquad -\frac{b}{2}\left(1-\frac{n}{n_0}\right)\cos(n+n_0)t_1 + \xi_0\cos n_0 t_1 \\ \qquad -\frac{\dot{\xi}_0}{n_0}\sin n_0 t_1, \\ A\sin\vartheta = -\frac{b}{2}\left(1+\frac{n}{n_0}\right)\sin(n-n_0)t_1 \\ \qquad +\frac{b}{2}\left(1-\frac{n}{n_0}\right)\sin(n+n_0)t_1 - \xi_0\sin n_0 t_1 \\ \qquad -\frac{\dot{\xi}_0}{n_0}\cos n_0 t_1. \end{cases}$$

Nehmen wir dann mit H. A. Lorentz[1]) an, daß die Mittelwerte von ξ_0 und $\dot{\xi}_0$ verschwinden, so erhält man für den Mittelwert von A^2 für die betrachteten Oszillatoren

$$(16)\quad \overline{A^2} = \frac{b^2}{2}\left(1+\frac{n^2}{n_0^2}\right) + \overline{\xi_0^2} + \frac{\overline{\dot{\xi}_0^2}}{n_0^2} + \frac{b^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{n_0^2}\right)\cos 2n t_1.$$

Setzen wir $t_1 = t - \delta$, wo δ die seit dem Zusammenstoß verflossene Zeit ist, so haben wir, um zu dem Mittelwert von A^2 bei konstant gerichteter Dipolachse zu gelangen, noch mit

$$\frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{\delta}{\tau}}\, d\delta$$

zu multiplizieren und von Null bis Unendlich zu integrieren. τ ist die mittlere Zeit zwischen zwei Zusammenstößen eines Dipols. Da wir aber die Absorption (Stoßdämpfung) vernachlässigen wollen, gehen wir zu dem Grenzfall $1/\tau$ gleich Null über.[2]) Dann wird

$$(17)\quad \overline{A^2} = \frac{\overline{b^2}}{2}\left(1+\frac{n^2}{n_0^2}\right) + \overline{\xi^2} + \frac{\overline{\dot{\xi}_0^2}}{n_0^2}.\ ^{3})$$

Bei unserer obigen Rechnung haben wir b^2 als klein gegenüber A^2 angesehen; somit wird

$$(18)\quad \overline{A^2} = \overline{\xi_0^2} + \frac{\overline{\dot{\xi}_0^2}}{n_0^2}.$$

Bezeichnen wir mit ε_0 die Energie des Oszillators nach dem Zusammenstoß, so ist bis auf Größen der Ordnung β^2

1) H. A. Lorentz, Theory of Electrons. S. 306—308.

2) Berechnet man in dieser Weise das mittlere elektrische Moment, so fallen in diesem Grenzfall alle Terme mit der Frequenz n fort, was sich oben schon durch Mittelung über alle ϑ ergeben hat.

3) $\overline{b^2}$ soll andeuten, daß auch noch über die bei den Zusammenstößen wechselnden Richtungen zu mitteln ist.

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{\mu}{2}\left(\overline{\xi_0^2} + n_0^2\,\overline{\xi_0^2}\right). \tag{19}$$

Bei schwachem äußerem Feld ist $\bar{\varepsilon}_0$ mit der thermischen Energie identisch. Stellt man sich auf den Boden der Quantentheorie und nimmt an, daß die Temperatur so niedrig sei (Nullpunktsenergie), daß alle Dipole sich im ersten Quantenzustand befinden, so wäre

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{h n_0}{2\pi} \tag{20}$$

und damit

$$\overline{A^2} = \frac{2\bar{\varepsilon}_0}{n_0^2 \mu} = \frac{h}{\pi \mu n_0}. \tag{21}$$

Nach der klassischen Statistik wäre

$$\bar{\varepsilon}_0 = kT, \tag{22}$$

also

$$\overline{A^2} = \frac{2kT}{n_0^2 \mu}. \tag{23}$$

Für den Fall, daß b^2 gegenüber A^2 nicht mehr zu vernachlässigen ist, das heißt, wenn die aus dem äußeren Feld stammende Energie des Dipols vergleichbar wird mit seiner thermischen Energie, gelten die Formeln (18), sowie (20) bis (23) nicht mehr, weil dann die Energie selbst wieder von b abhängig ist. In (11) würden die Glieder $A^2 b$ wegen (17) Terme mit höheren Potenzen von b ergeben. Aus demselben Ausdruck (11) erkennt man, daß bei Berücksichtigung dieser Potenzen neben der Grundfrequenz n des äußeren Feldes auch die Frequenzen $2n$, $3n \cdots$ und somit neue Wellen von diesen Frequenzen auftreten.[1]) Im Verein damit erscheint neben der Anomalität bei $n = 2n_0$, die auch jetzt bestehen bleibt, eine neue Anomalität bei $n = n_0/2$. Dabei ergibt sich, daß die entsprechenden Terme im Brechungsindex von der Intensität des äußeren Feldes abhängen. Es wäre interessant, experimentell zu untersuchen, ob eine Absorptionslinie $n_0/2$ bei genügend intensiver Bestrahlung auftritt.[2])

1) C. Schaefer, l. c.

2) In diesem Falle könnte man quantentheoretisch annehmen, daß bei starken äußeren Feldern entweder Übergänge zwischen Bahnen mit „halben" Quantenzahlen vorkommen oder die Bohrsche Frequenzbedingung verletzt ist.

(Eingegangen 1. September 1922.)

4. *Zur Quantentheorie des Wasserstoffmolekülions; von K. F. Niessen.*

Das Erscheinen der Arbeit des Hrn. W. Pauli jr: „Über das Modell des Wasserstoffmolekülions" in den Ann. d. Phys., Aug. 1922 (welches Heft erst Anfang Oktober in meine Hände gelangte) veranlaßt mich, hier einige Ergebnisse aus meiner Dissertation zu veröffentlichen, die, wie aus obigem Titel hervorgeht, über dasselbe Objekt handelt. Da die deutsche Übersetzung in dem Moment (9. Okt.), als die erwähnte Arbeit mich erreichte, zwar fertiggestellt, aber noch nicht gedruckt worden war, lege ich Wert darauf, hier die Ergebnisse festzulegen, zu denen ich selber gelangt bin. Diese umfassen nahezu alle diejenigen des Hrn. Pauli und ergänzen seine Arbeit gerade dort, wo er mehrere Fragen offen ließ. Sein Beweis für den minimalen Energiewert im Modell ($n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$) übertrifft den meinigen sehr an Eleganz.

Dagegen waren die mühsamen numerischen Berechnungen, mittels deren er zeigte, daß die Kerne bei einer stabilen Elektronenbewegung in der Mittelebene auseinandergehen, nicht nötig.

Est ist mir gelungen, dies durch bloße Überlegungen nachzuweisen.

Auch der Beweis für das Auseinandergehen der Kerne bei der „Planetenbewegung" des Elektrons (Fig. 4, S. 203, a. a. O.) läßt sich etwas durchsichtiger darstellen.

Für die Stabilität der Elektronenbahn und die des Kerngleichgewichtes bin ich zu denselben Bedingungen gelangt und ich konnte die letzteren auch auf die asymmetrischen Modelle übertragen.

Die „Gleichgewichtsbedingung"[1]) habe ich auf zwei verschiedene Weisen abgeleitet, das eine Mal mittels der Adia-

1) In der Dissertation wird man diese unter dem Namen „Stationäritätsbedingung" antreffen.

batenhypothese von Ehrenfest, das andere Mal direkt und habe beide Ergebnisse durch einige analytische Transformationen ineinander übergeführt. Bezüglich der numerischen Berechnung des Modells ($n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$) weicht mein Resultat um etwas ab von demjenigen des Hrn. Pauli.

Ich fand:

Energie $= -0{,}516$ Rh (R = Rydbergsche Konstante),
Kernabstand $= 5{,}53\ a_1$ (a_1 = kleinster Strahl des H-Atoms),
Exzentrizität des Ellipsoids $= 0{,}780$,

und schätzte den möglichen Fehler im Energiewert höchstens eine Einheit in der letzten Dezimale.

Dies ist, was die Übereinstimmung der Resultate des Hrn. Pauli und der meinigen anbelangt.

Ich habe mich aber weiter bemüht, alle Modelle, wo $n_1 + n_2 + n_3 \leqq 6$ ist (sowohl die symmetrischen wie die asymmetrischen) einer gleichen Berechnung zu unterwerfen und will jetzt hier die Ergebnisse mitteilen, um anderen diese „ungeheure" Arbeit zu ersparen.

Zunächst möge aber in bezug auf die asymmetrischen Modelle erwähnt werden, daß im Falle $n_2 = 0$ (wenn das Elektron sich also fortwährend auf einem der Blätter eines Hyperboloids bewegt) die Kerne immer auseinandergehen.[1]) Weiter ergab sich, daß unter den asymmetrischen Modellen mit $n_1 = 0$ (wo das Elektron sich also fortwährend auf einer und derselben Hälfte eines Ellipsoids befindet) *wohl* stationäre Bahnen möglich sind. Wenn $n_3/n_2 > 10$ gewählt wird, können bisweilen mehrere Gleichgewichtsbahnen mit denselben Quantenzahlen auftreten. Sie sind dann abwechselnd kernstabil und kernlabil. Es läßt sich aber zeigen, daß der Kernabstand hier größer als $80\,a_1$ sein wird, so daß ich von einer näheren Untersuchung dieser stabilen unsymmetrischen Modelle abgesehen habe. Möchte man dennoch diese Modelle kennen wollen, so ist es mir eine geringe Mühe, dieselben aus schon erhaltenen Kurven abzuleiten.

Was jetzt die allgemeinen asymmetrischen Modelle anbetrifft und zwar diejenigen mit $n_1 + n_2 + n_3 \leqq 6$, so bemerken

1) Demnach auch, wenn das Elektron einen asymmetrisch gelegenen Kreis um die Achse beschreibt.

wir, daß es darunter auch wieder stationäre Bahnen gibt, daß aber das Kerngleichgewicht für sie immer labil ist.

Aus dem Falle $n_1 = 0$ geht hervor, daß letzteres kein notwendiger Nebenumstand bei den asymmetrischen Modellen ist.

In den durchgerechneten symmetrischen Modellen (wieder mit $n_1 + n_2 + n_3 \leqq 6$) standen die Kerne immer stabil. Demnach werde ich nur allein von diesen Modellen die Energie und den Kernabstand mitteilen. Für ihre Gestalt sei auf die Dissertation verwiesen.

Tabelle 1

(für die symmetrischen Modelle).

n_1	n_2	n_3	Gesamtenergie	Kernabstand	n_1	n_2	n_3	Gesamtenergie	Kernabstand
0	1	1	− 0,516 Rh	5,53 a_1	1	1	1	− 0,125 Rh	10,6 a_1
0	2	1	− 0,304 Rh	11,5 a_1	1	1	2	− 0,064 Rh	21,4 a_1
0	3	1	− 0,198 Rh	19,5 a_1	1	1	3	− 0,041 Rh	34,5 a_1
0	4	1	− 0,138 Rh	29,4 a_1	1	1	4	− 0,030 Rh	49,6 a_1
0	5	1	− 0,102 Rh	41,0 a_1	1	2	1	− 0,110 Rh	19,8 a_1
0	1	2	− 0,176 Rh	13,4 a_1	1	2	2	− 0,062 Rh	33,0 a_1
0	2	2	− 0,129 Rh	22,1 a_1	1	2	3	− 0,041 Rh	49,1 a_1
0	3	2	− 0,098 Rh	33,1 a_1	1	3	1	− 0,087 Rh	29,8 a_1
0	4	2	− 0,076 Rh	46,0 a_1	1	3	2	− 0,052 Rh	46,0 a_1
0	1	3	− 0,087 Rh	24,9 a_1	1	4	1	− 0,064 Rh	40,8 a_1
0	2	3	− 0,071 Rh	36,1 a_1	2	1	1	unmöglich	
0	3	3	− 0,058 Rh	50,0 a_1	2	1	2	„	
0	1	4	− 0,051 Rh	39,6 a_1	2	1	3	„	
0	2	4	− 0,044 Rh	53,6 a_1	2	2	1	„	
0	1	5	− 0,034 Rh	57,2 a_1	2	2	2	− 0,031 Rh	42,4 a_1
					2	3	1	− 0,054 Rh	36,6 a_1
					3	1	1	unmöglich	
					3	1	2	„	
					3	2	1	„	
					4	1	1	„	

Den möglichen Fehler im Energiewert schätze ich wieder am höchsten auf eine Einheit in der letzten Dezimale.

Bevor wir aus den gefundenen Energien ein Spektrum ableiten können, müssen wir zuerst mittels des Bohrschen Korrespondenzprinzips untersuchen, welche Kombinationen von Quantensprüngen möglich sind.

Es ergibt sich:[1])

Tabelle 2

(für die symmetrischen Modelle).

Δn_3	Δn_2	Δn_1
0	ungerade (pos. oder neg.)	beliebig (pos. oder neg.)
+ 1	gerade „ „ „	„ „ „ „
− 1	gerade „ „ „	„ „ „ „

Diese Regeln sind beachtet worden bei der Berechnung folgender Frequenzen.

Nur wenn die Wellenzahl $\nu = \frac{1}{\lambda}$ (cm^{-1}) zwischen 10000 und 30000 fiel, wurde dieselbe in die Tabelle 3 untergebracht.

Tabelle 3.

Anfangszustand			Endzustand			$\nu = \frac{1}{\lambda}$	Anfangszustand			Endzustand			$\nu = \frac{1}{\lambda}$
n_1	n_2	n_3	n_1	n_2	n_3	(cm^{-1})	n_1	n_2	n_3	n_1	n_2	n_3	(cm^{-1})
0	3	2	0	3	1	10950	1	3	2	0	3	1	16000
0	4	2	0	1	2	10950	0	2	2	0	2	1	19200
0	3	1	0	2	1	11650	1	1	1	0	2	1	19650
2	2	2	0	4	1	11750	0	5	1	0	2	1	22150
1	2	2	0	1	2	12500	0	2	1	0	1	1	23250
0	3	3	0	1	2	12950	1	3	1	0	2	1	23800
2	3	1	0	1	2	13400	0	4	2	0	2	1	25000
1	1	2	0	3	1	14700	1	2	2	0	2	1	26550
1	4	1	0	3	1	14700	2	3	1	0	2	1	27450
1	1	3	0	1	2	14800	2	2	2	0	2	1	29950
2	2	2	0	1	2	15900							

Die Genauigkeit in der Wellenzahl schätze ich auf 200. Man kann der obigen Tabelle also genug Material entnehmen zur vorläufigen Prüfung der Quantentheorie des Wasserstoffmolekülions.

Es würde nämlich sehr schön sein, wenn sich nur in der Nähe der angedeuteten Stellen im Spektrum Linien zeigen ließen, die unter andren Umständen entstehen und sich gegen magnetische und elektrische Einflüsse vielleicht anders verhalten

1) Für die asymmetrischen Modelle bestehen dieselben Möglichkeiten wie beim Starkeffekt.

sollten als die übrigen, die dem Molekül selbst angehören können.[1])

Wegen des großen Trägheitsmomentes der Ionen sind die aus der Rotation stammenden Frequenzdifferenzen sehr klein. Die Kernschwingungen sind vermutlich harmonisch, da der Kernabstand sich in einigen dieser Modelle nur um relativ kleine Beträge adiabatisch ändern muß, um den Kernen die Aufnahme einiger Quanten zu gestatten.

Vorläufig lasse man sich aber begnügen mit der Prüfung derjenigen Frequenzen, welche Übergängen von Modellen mit ruhenden Kernen entsprechen. Um die Intensität dieser Linien nach dem Bohrschen Prinzip zu berechnen, braucht man weiter die Zerlegung der rechtwinkligen Koordinaten in Fourierreihen als Funktion der Winkelkoordinaten. Für die hieraus hervorgehende Wahrscheinlichkeit eines Überganges findet man in der Dissertation wohl die Formeln, aber noch nicht den numerischen Wert.

Weiter bemerken wir, daß die folgenden Spannungen nötig sein würden, um das Molekül in ein Ion und ein Elektron zu zerlegen (Gesamtenergie des Moleküls $-2{,}26$ Rh).

Tabelle 4.

Ion			Spannung in Volt	Ion			Spannung in Volt
n_1	n_2	n_3		n_1	n_2	n_3	
0	1	1	23,5	0	1	4	23,6
0	1	2	26,4	0	2	2	23,8
0	1	3	27,3	1	1	1	23,8
0	2	1	28,1				

Und um die Ionen in ihre drei Bestandteile zu zertrümmern:

Tabelle 5.

Ion			Spannung in Volt	Ion			Spannung in Volt
n_1	n_2	n_3		n_1	n_2	n_3	
0	1	1	7,0	0	1	4	1,9
0	1	2	4,1	0	2	2	1,7
0	1	3	2,7	1	1	1	1,7
0	2	1	2,4				

1) Es sind dies betreffende Untersuchungen im hiesigen Institut im Gange.

Wie aus der Tabelle 4 hervorgeht, gibt es für kleine Quantenzahlen keine Ionisierungsspannung von 30,5 Volt. Diese Spannung kann also nicht, wie Franck[1]) annahm, einem Ion zugeschrieben werden.

Über die Frage, ob das vielleicht durch Einführung andrer Bedingungen für das bei der Ionisation entstehenden Ion möglich ist, sehe man die Dissertation. Eine Spannung von 30,5 Volt würde einem Ion von der Energie Null entsprechen.

Es läßt sich aber leicht zeigen, daß ein Ion mit streng verschwindender Energie nie stationär sein kann. Doch wäre es möglich, daß es ein Ion mit nahezu verschwindender Energie und kleinen Quantenzahlen gäbe. Tabelle 4 besagt aber, daß dies nicht der Fall ist.

Vermutlich hat Franck seinen zuerst eingenommenen Standpunkt[2]) (daß das Molekül bei der Spannung von 30,5 Volt in all seine vier Bestandteile zertrümmert würde) zu bald verlassen.

Diese Arbeit wurde im Institut für theoretische Physik der Universität Utrecht unter der wertvollen Leitung des Hrn. Prof. Dr. L. S. Ornstein ausgeführt.

---

1) J. Franck, Physik. Zeitschr. 1921, S. 469.

2) J. Franck, P. Knipping u. Thea Krüger, Verh. a. D. Phys. Ges. 21. S. 728. 1919.

(Eingegangen 16. Oktober 1922.)

5. *Ein neuer Elektrophor;* *von Heinrich Wommelsdorf.*

Vor der Erfindung der Elektrisiermaschine war der von Volta (1770) angegebene[1]) bzw. bereits vorher von Wilke (1762) im Prinzip erfundene[2]) Elektrophor das wirkungsvollste Mittel zur Erzeugung statischer Elektrizität. Um möglichst große Mengen zu erzielen, wurde er in beträchtlichen Abmessungen hergestellt. Lichtenberg[3]) berichtet (1780) beispielsweise von einem Elektrophor, dessen Konduktor einen Durchmesser von 1,50 m hatte und mittelst eines Flaschenzuges auf- und niederbewegt wurde. Seit dem Jahre 1770, wo er durch Volta seine heute allgemein bekannte Form erhielt, blieb er unverändert.

Das Prinzip des neuen Elektrophors[4]) besteht darin, daß der Konduktor *a* (vgl. Fig. 1) statt auf eine zwischen zwei

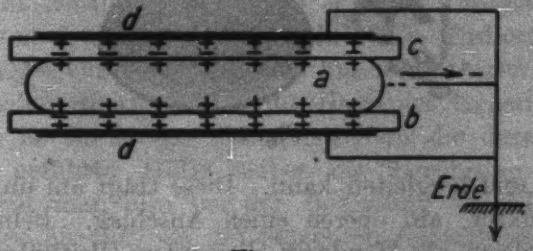


Fig. 1.

Isolierschichten *b* und *c* gebracht wird. Ein einfacher Versuch, wobei man nacheinander auf den Konduktor erst eine, dann beide Isolierschichten einwirken läßt, zeigt ohne weiteres, daß in letzterem Falle die erzielte Funkenlänge *ca* dreimal,

1) Volta, Collezione delle Opere 1. 108. 1816; Firenze u. d Journal de Physique de l'abbé Rozier, pour juillet 1776.

2) Wilke, Kon. Schwedische Akademie-Abhandlungen. 24. S. 213. 1762.

3) Lichtenberg, Journal de Physique. 15. S. 17. 1780.

4) Patentanmeldung vom 22. 2. 22.

die entstandene Spannung in Volt ca doppelt so groß ist als im ersteren. Das unproportionale Anwachsen der Funkenlänge und Spannung liegt natürlich daran, daß bekanntlich mit zunehmendem Entladepotential die Funkenlänge erheblich schneller wächst wie diese.

Dabei entspricht die freigewordene Elektrizitätsmenge einem Voltaschen Elektrophor mit einer entsprechend größeren Isolierschicht, ohne daß dabei der Konduktor des neuen Elektrophors entsprechend größer geworden ist.

Eine praktische Ausführungsform, wie sie von der Berliner Elektros-Gesellschaft, Berlin-Schöneberg, Mühlenstr. 10, für Lehr- und Lernzwecke in den Handel gebracht wird, zeigt Fig. 2. Die obere Isolierschicht ist auf einer Hülse befestigt, die ihrerseits auf einer hoch isolierenden Hartgummistange

Fig. 2.

leicht hin- und hergleiten kann. Diese trägt am unteren Ende den Konduktor, am oberen einen Anschlag. Beim Anheben an der zugleich als Handgriff dienenden Gleithülse wird von selber zunächst die obere Isolierschicht bis zum Anschlag am Ende der Hartgummistange und dann der Konduktor abgehoben.

Bei einem anderen Modell wurde ein isolierender Griff seitlich am Konduktor zwischen beiden Isolierschichten angebracht; doch erwies sich die in Fig. 2 abgebildete Ausführungsform als praktischer, da man sie bequem mit einer Hand bedienen kann.

Beide Isolierschichten b und c (vgl. Fig. 1) besitzen auf ihren Rückseiten eine leitende Armierung d (zumeist aus Stanniol, Blech oder dergl.), von denen die untere durch ihre Auflage auf den Tisch, die obere durch Vermittlung der oben ge-

nannten in Fig. 2 sichtbaren Gleithülse und die Hand des Experimentators geerdet ist. Eine bessere Erdung ist bei den auftretenden hohen Spannungen zumeist überflüssig.

Um den neuen Elektrophor zu betreiben, werden zunächst beide Isolierschichten gerieben und sodann — wie in Fig. 1 ersichtlich — aufeinandergelegt. Infolge der negativen Ladungen der beiden Schichten *b* und *c* werden die Elektronen (—) von *a* energisch fortgetrieben. Wird nunmehr der Konduktor mit dem Finger, einem Draht oder dergl. berührt, so fließen die Elektronen zur Erde ab. Hierauf werden die drei Teile *a*, *b* und *c* in der oben in Fig. 2 abgebildeten Weise voneinander getrennt. Der Konduktor *c* besitzt nunmehr eine freie positive Ladung, die in irgendeiner Weise, z. B. zum Laden von Leydener Flaschen oder zum Betrieb eines geeigneten Apparates ausgenutzt werden kann. Ein einmaliges Reiben der Isolierschichten genügt für eine zahlreiche Wiederholung dieses Influenzvorganges.

Um das jedesmalige Berühren des Konduktors mit dem Finger zu erübrigen, wurde ein Stanniolstreifen so auf die obere Isolierschicht *c* (Fig. 1) geklebt, daß er von der leitenden Rückseitenarmierung *d* ausgehend etwas um den Rand der Isolierschicht herumreicht, so daß er beim Aufeinanderstellen der Schichten den Konduktor berührt. Die Erdung geschieht dann durch die Vermittelung der in Fig. 2 sichtbaren, als Handgriff dienenden Gleithülse und die Hand des Experimentators. Auch kann an Stelle des Stanniolstreifens die durch die Isolierschicht geführte Hülse selber die Berührung bewirken. Hiernach hat man also bei der Bedienung des Elektrophors nichts weiter zu tun, als die Schichten fortwährend auf und ab zu bewegen.

In Fig. 2 bestehen die beiden Isolierschichten aus Hartgummi. Es wurden von mir auch Elektrophore (Voltasche und solche nach Fig. 1) gebaut, deren Isolierschichten so schlecht isolieren, daß sie nicht mehr durch Reiben elektrisch werden, z. B. aus einem Halbleiter wie Holz, Papier oder dergl. bestehen. Solche wurden durch Fremderregung der Schichten *d* sowohl mittels einer kleinen Influenzmaschine wie auch Hochspannungsbatterie betrieben. Man kommt dabei mit erstaunlich geringen Spannungen aus. Geht man mit diesen immer weiter, schließ-

1) E. Regener, Ztschr. f. techn. Phys. **3**. S. 220. 1922.

lich bis auf 220 Volt Netzspannung herunter, bei Verwendung eines genügend leitenden Halbleiters, so kommt man zu dem vor kurzem von Regener[1]) beschriebenen Spezialfall eines Voltaschen Elektrophors mit Isolierschicht aus Solenhofener lithographischem Stein. Durch den in analoger Weise hergerichteten neuen Elektrophor werden die Leistungen dieses noch beträchtlich erhöht. Hierüber werde ich in Kürze noch näher berichten.

In Fig. 2, die einem neuen Listenblatt der Berliner Elektros-Gesellschaft entstammt, wurde zur Veranschaulichung der Benutzung zugleich ein Schulapparat abgebildet, der aus einem drehbaren Ring besteht, der unter der bekannten anziehenden und abstoßenden Wirkung der Elektrizität in schnelle Umdrehung gerät. Der neue Elektrophor ist derartig kräftig, daß mit einem solchen von 15 cm Konduktordurchmesser auch andere größere Rotationsapparate wie elektrostatische Motore betrieben werden können. Er genügt außerdem vollauf zum Betrieb folgender im Unterricht bekannter elektrostatischer Apparate: Glockenspiel, Flugrad, Rauchkondensierung, Mörser, Blitztafel, Blitzröhre, Hauchbilder, Licht-, Zünd- und Sandapparat, Demonstration des Blitzableiters, Ladung von Leydener Flaschen, Isolierschemelversuche sowie für die meisten Arten Geißlerscher und Crookscher Röhren.

Er bildet mithin bei der jetzigen Teuerung einen willkommenen Ersatz einer kleinen Influenzmaschine, übertrifft aber eine solche durch seine Einfachheit und absolute Sicherheit des Ansprechens.

Um lange Funken zu erzielen, ist natürlich zu beachten, daß die Ladung des Konduktors bei positiv elektrisch werdenden Isolierschichten negativ ist. Man nähert daher in solchem Falle den Knöchel nicht dem Konduktorrand, sondern der großen scheibenförmigen Fläche; noch wirkungsvoller ist es, die Entladung mit einer Kugel von passendem bzw. nicht zu großem Durchmesser vorzunehmen, die an einem leitenden Stiel in der Hand gehalten wird.

Der bereits genannte, in Fig. 2 abgebildete Elektrophor von 15 cm Konduktordurchmesser liefert bereits Funken von 6 cm Länge bzw. Spannungen von etwa 50 000 Volt.

(Eingegangen 24. August 1922.)

6. *Über die Dimensionen der Atomkerne und die α-, H^+-, β- und γ-Strahlung;* *von Maximilian Camillo Neuburger.*

Aus den Experimentalergebnissen der neuesten Arbeit von Ernest Rutherford [1]) und den bekannten mathematischen Beziehungen für die energetischen Verhältnisse bei der Kernspaltung lassen sich die Größenverhältnisse der Atomkerne berechnen. Wir ziehen hier für letzteren Zweck auch die α- und teilweise auch die β-Strahler der Radioelemente heran. Da zwischen der Reichweite der α-Strahlen und ihrer Geschwindigkeit v die Beziehung

$$v^3 = a R_0^{760} \tag{1}$$

besteht, in welcher R_0^{760} die Reichweite bei 0° C und 760 mm Hg-Druck bezeichnet und a eine Konstante ist, die den Wert

$$a = 1{,}07444 \cdot 10^{27} \tag{2}$$

hat, machen wir vorerst die Annahme — die sich nach den weiter unten gegebenen Zahlen als richtig erweist —, daß für die H^+-Strahlung dieselbe Beziehung erfüllt ist. Die H^+-Strahlung wird künstlich durch das Bombardement der Atomkerne mit α-Teilchen von Radium C' herbeigeführt. Die in den Atomkernen vorhandenen H^+-Teilchen werden durch das auftreffende oder sehr nahe vorbeifliegende α-Teilchen mit einer gewissen Geschwindigkeit an die Peripherie des Atomkernes befördert und dann durch das Kraftfeld des Kernes weiter beschleunigt. Die zur Messung gelangende Reichweite, bzw. Geschwindigkeit der H^+-Teilchen setzt sich also aus zwei Geschwindigkeiten, aus der Geschwindigkeit v_K, mit welcher sich das Teilchen zur Peripherie des Kernes bewegt und aus der Zusatzgeschwindigkeit v_A, die das Teilchen außerhalb des

1) E. Rutherford u. J. Chadwick, Phil. Mag. (VI) 42. Nr. 251. S. 809—825. 1921; Physik. Ber. 3. Nr. 7. S. 313—314. 1922.

Kernes von der elektrischen Abstoßung erhält. Die Geschwindigkeit v_A ist aber eine Funktion der Ordnungszahl Z und des Radius r des Atomkernes. Die kinetische Energie beträgt für ein H^+-Teilchen ($m_H = 1{,}662 \cdot 10^{-24}$ g)

$$\frac{1}{2} m_H v_A^2 = \frac{Ze^2}{r} . \tag{3}$$

Der Radius des Atomkernes ist für die H^+-Strahlung

$$r = \frac{2Ze^2}{m_H v_A^2} . \tag{4}$$

Da nun die, der direkten Messung zugängliche Reichweite bzw. Geschwindigkeit $v_{beob.}$ der H^+-Teilchen sich aus den beiden Geschwindigkeiten v_A und v_K zusammensetzt, so erhält man durch Einsetzen von $v_{beob.}$ anstatt v_A in Formel (4) die *untere Grenze* für den Radius des Atomkernes. Die auf diese Weise erhaltenen Werte für die unteren Grenzen einiger Kernradien sind in Tab. 1 eingetragen. Die Geschwindigkeit $v_{beob.}$ ist nach Formel (1) aus der von Rutherford gemessenen Reichweite der H^+-Strahlen berechnet.

Tabelle 1.

Element (H^+-Strahlung)	Ordnungszahl	Reichweite in cm ca.	Geschwindigkeit $v_{beob.}$ in cm-sec^{-1} $\times 10^9$ ca.	Untere Grenze des Kernradius in cm $\times 10^{-13}$
Wasserstoff .	1	32	3,25	0,26
Helium . . .	2	32	3,25	0,52
Bor	5	45	3,64	1,0
Stickstoff . .	7	40	3,50	1,6
Natrium . .	11	42	3,56	2,4
Aluminium .	13	90	4,59	1,7
Phosphor . .	15	65	4,12	2,48

Die so gefundenen Werte für die untere Grenze des Radius sind aber, wie wir gleich zeigen werden, viel zu niedrig. Da die H^+-Teilchen aus den Atomkernen durch die α-Teilchen von Radium C' freigemacht wurden, so muß sich das α-Teilchen (mit großer Geschwindigkeit) in die Atomkerne hineinbewegt haben. Das α-Teilchen müßte aber für einen gewissen Wert des Radius des Atomkernes an der Peripherie mit einer sehr kleinen Geschwindigkeit (bzw. $v = 0$) ankommen. Die kinetische Energie des α-Teilchens von Radium C kann

nur durch die gleich große Abstoßungsarbeit des Kernes vernichtet werden. Es ist also in diesem Falle

$$\frac{1}{2} m_{He} v^2 = \frac{2 \cdot Z e^2}{r} . \tag{5}$$

Da nun

$$m_{He} = \frac{m_H \cdot A_{He}}{A_H}, \tag{6}$$

so ist

$$r = \frac{4 e^2}{m_H} \cdot \frac{A_H}{A_{He}} \cdot \frac{Z}{v^2}, \tag{7}$$

oder wenn wir berücksichtigen, daß z. B. die Reichweite der α-Teilchen gemessen wurde, folgt mit Bezug auf Formel (1)

$$r = \frac{4 e^2}{m_H} \cdot \frac{A_H}{A_{He}} \cdot \frac{Z}{(a R_0^{3/2})^{\frac{2}{3}}} . \tag{8}$$

Setzt man für v, bzw. R die Geschwindigkeit bzw. Reichweite der α-Teilchen von Radius C' ein, so erhält man mit viel größerer Genauigkeit als früher ebenfalls Werte für die unteren Grenzen der Kernradien. Die α-Teilchen von Radius C' dringen — wenn man die weiter unten gegebenen Kerngrößen der Radioelemente berücksichtigt, ist diese Schlußfolgerung gerechtfertigt — in jeden Atomkern ein, ob sie diese aber zerspalten, ist eine andere Frage.

Bei den Atomkernen von hoher Ordnungszahl dürften die α-Teilchen von Radium C' vielleicht keine Aufspaltung mehr herbeiführen. Für unsere Rechnung genügt es, daß sich diese α-Teilchen in den Kern hineinbewegen. In Gleichung (7), bzw. (8) bedeuten A_H, bzw. A_{He} die Atomgewichte von Wasserstoff

$$\begin{cases} A_H = 1{,}0077_5 \\ A_{He} = 4{,}002 \end{cases} \tag{9}$$

und Helium. Die mit Beziehung (8) erhaltene Werte für die *unteren* Grenzen sind in Tab. 2 eingetragen und sind (vgl. die Radioelemente in Tabb. 2 u. 4) nur Mittelwerte für die einzelnen Elementtypen.

Die Werte für die *oberen* Grenzen der Kernradien sind

Tabelle 2.

Kerndimensionen der Elemente.

Ordnungszahl	Elementtype	Untere Grenze des Kernradius in cm $\times 10^{-14}$	Ordnungszahl	Elementtype	Untere Grenze des Kernradius in cm $\times 10^{-14}$
1	H	3,48	47	Ag	163,63
2	He	6,96	48	Cd	167,11
3	Li	10,44	49	In	170,59
4	Be	13,93	50	Sn	174,07
5	B	17,40	51	Sb	177,55
6	C	20,89	52	Te	181,04
7	N	24,37	53	J	184,51
8	O	27,85	54	X	188
9	F	31,33	55	Cs	191,48
10	Ne	34,81	56	Ba	194,96
11	Na	38,3	57	La	198,44
12	Mg	41,78	58	Ce	201,92
13	Al	45,26	59	Pr	205,40
14	Si	48,74	60	Nd	208,88
15	P	52,22	61	—	212,37
16	S	55,70	62	Sm	215,85
17	Cl	59,18	63	Eu	219,33
18	Ar	62,67	64	Gd	222,81
19	K	66,15	65	Tb	226,29
20	Ca	69,63	66	Dy	229,77
21	Sc	73,11	67	Ho	233,25
22	Ti	76,59	68	Er	236,74
23	V	80,07	69	Tu	240,22
24	Cr	83,55	70	Yb	243,70
25	Mn	87,04	71	Lu	247,18
26	Fe	90,52	72	—	250,66
27	Co	94	73	Ta	254,14
28	Ni	97,48	74	W	257,62
29	Cu	100,96	75	—	261,11
30	Zn	104,44	76	Os	264,59
31	Ga	107,92	77	Ir	268,07
32	Ge	111,40	78	Pt	271,55
33	As	114,89	79	Au	275,03
34	Se	118,37	80	Hg	278,51
35	Br	121,85	81	Tl	281,99
36	Kr	125,33	82	Pb	285,47
37	Rb	128,81	83	Bi	288,96
38	Sr	132 29	84	Po	292,44
39	Y	135,77	85	—	295,92
40	Zr	139,26	86	Em	299,40
41	Nb	142 74	87	—	302,88
42	Mo	146,22	88	Ra	306,36
43	—	149,70	89	Ac	309,84
44	Ru	153,18	90	Th	313,33
45	Rh	156,66	91	Pa	316,81
46	Pd	160,14	92	U	320,29

nur für einige Elemente durch Schätzung, bzw. näherungsweise Rechnung bekannt. Sie sind folgende[1]) [Hei = Isohelium[2])]:

H . . . $2 \cdot 10^{-13}$ cm (Rutherford, Darwin),
Hei . . $1{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm (Smekal),
$1{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm (Neuburger),
He . . $1{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm (Smekal),
$3 \cdot 10^{-13}$ cm (Rutherford),
Li_6 . . $2{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm (Neuburger),
N . . . $7 \cdot 10^{-13}$ cm (Rutherford),
Au . . $8 \cdot 10^{-13}$ cm (Rutherford, Darwin).

Die Gleichung (7), bzw. (8) geht durch Einsetzen der Werte von e, m_H, A_H, A_{He} und v, bzw. a und R in den Ausdruck

$$r = 3{,}4814 \cdot 10^{-14} \cdot Z$$

über. Ein Vergleich der Tabb. 1 und 2 zeigt, daß die Werte für die unteren Grenzen der Kernradien in Tab. 2 höher sind. Da es sich um von Rutherford gespaltene Atomkerne in Tab. 1 handelt, sind nur die für diese Atomkerne in Tab. 2 angegebenen Werte richtig, da sonst — nach den Werten von Tab. 1 — keine Zerspaltung eintreten könnte. Auf Grund dieser richtigen Werte für die untere Grenze der Kernradien läßt sich für die künstlich hervorgerufene H^+-Strahlung die *untere* Grenze für den Wert der Geschwindigkeit v_K, die das H^+-Teilchen innerhalb des Atomkernes besitzt und die *obere* Grenze für den Wert der Geschwindigkeit v_A, die das H^+-Teilchen beim Verlassen der Kernperipherie durch die Abstoßungskraft des Kernes erhält, berechnen. Die Gleichung (4) ist hierzu nur nach v^2 aufzulösen:

$$v_A^2 = \frac{2Ze^2}{m_H r} \tag{10}$$

und die in Tab. 2 befindlichen Werte für r darin einzusetzen. Es folgt aus der Energiegleichung, daß

$$v_{beob.}^2 = v_K^2 + v_A^2. \tag{11}$$

1) E. Rutherford, Phil. Mag. (VI) 27. S. 488. 1914; M. C. Neuburger, Ann. d. Phys. 68. S. 574. 1922; A. Smekal, Wien. Ber. 129. S. 464. 1921; S. 180. 155. 1921; C. G. Darwin, Phil. Mag. (VI) 27. S. 499. 1914.

2) Falls das *Isohelium frei* existenzfähig sein sollte!

Die Werte für die obere Grenze der Geschwindigkeit v_A der H^+-Strahlen sind konstant, da ja die Werte für die unteren Grenzen der Kernradien mit der Geschwindigkeit der α-Strahlen von Radium C' berechnet wurden. Aus den Gleichungen (4) und (7) folgt für die H^+-Teilchen, daß

$$v_A^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_{He}}{A_H} \cdot (v_\alpha^{Ra\,C'})^2. \tag{12}$$

Die aus den Ausdrücken (10), bzw. (12) und (11) folgenden Werte für die oberen, bzw. unteren Grenzen von v_A und v_K zeigt Tab. 3.

Tabelle 3.

H^+-Strahlung.

Element	Ordnungszahl	Geschwindigkeit $v_{beob.}$ in cm $sec^{-1} \times 10^9$	Untere Grenze der Geschwindigkeit v_K in cm $sec^{-1} \times 10^9$	Obere Grenze der Geschwindigkeit v_A in cm $sec^{-1} \times 10^9$
Bor	5	3,64	2,32	2,807
Stickstoff .	7	3,50	2,095	
Natrium . .	11	3,56	2,19	
Aluminium	13	4,59	3,63	
Phosphor .	15	4,12	3,01	

Die der oberen Grenze der Geschwindigkeit v_A des H^+-Teilchens entsprechende *obere* Grenze der Energie E_A beträgt

$$E_A = 6{,}496 \cdot 10^{-6} \text{ erg.}$$

Da bei den α-Strahlern der Radioelemente die Geschwindigkeit der ausgesandten α-Teilchen größer ist als diejenige Geschwindigkeit, die die α-Teilchen nur von der Abstoßungsarbeit der Kerne allein erhalten könnten, ist es möglich, auch für die Atomkerne dieser Elemente die Werte für die unteren Grenzen der Kernradien aus Gleichung (7), bzw. (8) zu berechnen. Man hat zu diesem Zweck in Ausdruck (8) für R_0^{760} die Reichweite der einzelnen α-Strahler einzusetzen. In Tab. 4 sind die so erhaltenen Werte für die unteren Grenzen der Kernradien der Atomkerne der α-Strahler zusammengestellt. Die in den Spalten 3 und 4 gegebenen Werte der Reichweiten und deren Fehlergrenzen sind fast alle einer Tabelle aus der

Arbeit „Reichweitenmessungen an α-Strahlern“ von H. Geiger[1]) entnommen. Wie aus Tab. 4 zu ersehen ist, ergeben sich für Isotope verschiedene Werte für die unteren Grenzen der Kernradien. Andererseits ergeben sich für α-Strahler von verschiedener Ordnungszahl, wie z. B. Aktiniumemanation und Aktinium *C* fast dieselben Werte für die unteren Grenzen der Kernradien.

Tabelle 4.

Kerndimensionen der α-Strahler.

1	2	3	4	5	6
α-Strahler	Ordnungszahl	Reichweite in cm bei 0° C.	Mittlere Fehler von R_0^{760} in cm	Geschwindigkeit $v_{beob.}$ in cm-sec^{-1} $\times 10^9$	Untere Grenze des Kernradius in cm $\times 10^{-13}$
Aktinium *C* . . .	83	5,224	± 0,006	1,777	36,3
Thorium *C* . . .	83	4,538	± 0,009	1,696	39,9
Radium *C* . . .	83	3,602	—	1,570	46,5
Thorium *C'* . . .	84	8,168	± 0,007	2,063	27,3
Radium *C'* . . .	84	6,608	± 0,004	1,922	31,4
Aktinium *A* . . .	84	6,241	± 0,010	1,886	32,6
Aktinium *C'* . . .	84	6,07	sehr unsicher	1,87	33,3
Thorium *A* . . .	84	5,387	± 0,008	1,795	36,0
Radium *A* . . .	84	4,476	± 0,010	1,688	40,7
Radium *F* . . .	84	3,721	± 0,004	1,587	46,1
Aktiniumemanation	86	5,487	± 0,017	1,806	36,4
Thoriumemanation	86	4,799	± 0,007	1,728	39,8
Radiumemanation .	86	3,907	± 0,009	1,613	45,7
Aktinium *X* . . .	88	4,141	± 0,019	1,645	44,9
Thorium *X* . . .	88	4,127	± 0,010	1,643	45,0
Radium	88	3,212	± 0,009	1,511	53,2
Radiumaktinium . {	90	4,432	± 0,025	1,682	43,9
	90	4,0	—	1,626	47,0
Radiothorium . .	90	3,810	± 0,005	1,600	48,6
Ionium	90	3,028	± 0,016	1,482	56,6
Thorium	90	2,749	sehr unsicher	1,435	60,4
Protaktinium . .	91	3,482	± 0,042	1,552	52,1
Uran II	92	2,910	± 0,1	1,462	59,4
Uran I.	92	2,531	sehr unsicher	1,396	65,2

Die in Tab. 4 angegebenen Werte der beobachteten Geschwindigkeit $v_{beob.}$ der α-Teilchen sind zugleich die Werte für

1) H. Geiger, Zeitschr. f. Phys. 8. Nr. 1. S. 45—57. 1921.

die *oberen* Grenzen der Geschwindigkeit v_A für die einzelnen α-Strahler.

Die unteren Grenzen für die Geschwindigkeiten v_A und die oberen Grenzen für die Geschwindigkeiten v_K und der Kernradien sind vorläufig nur für die α- und β-Strahler Radium und Radiothorium berechenbar. Wir kommen auf diese Grenzwerte der beiden Radioelemente am Schlusse noch zurück.

Für die von den Radioelementen ausgesandten β-Strahlen läßt sich bei bekannten Kernradien die Geschwindigkeit v_K, mit der das Elektron die Kernperipherie überfliegt und die letzterer entgegenwirkende Energie E_A bzw. die dieser entsprechende Gegengeschwindigkeit v_A, die durch das äußere Kraftfeld des Kerns hervorgerufen wird, berechnen. Da jedoch die Kernradien für fast alle β-Strahlen nicht bekannt sind, ist man genötigt, die Werte aus Tab. 2 für die unteren Grenzen der Kernradien zu benützen. Man erhält dadurch die oberen Grenzen für die Werte der Geschwindigkeiten v_K und v_A. Da die experimentell gemessenen Geschwindigkeiten $v_{beob.}$ der β-Strahlelektronen sich der Lichtgeschwindigkeit stark nähern, hat man zwecks Anschreibung der Energiegleichung die Relativitätstheorie heranzuziehen. Bezeichnet man die Ruhemasse des Elektrons mit m_0, so lautet die Energiegleichung:

$$E_{beob.} + E_A = E_K \tag{13}$$

bzw. nach der Relativitätstheorie

$$\left\{ m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{beob.}^2}{c^2}}} \right) + m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_K^2}{c^2}}} - 1 \right). \right. \tag{14}$$

Die Energie $E_{beob.}$ ist diejenige Energie, die aus der beobachteten Geschwindigkeit der β-Strahlen sich berechnen läßt, E_A ist die auf die Geschwindigkeit v_K des β-Teilchens verzögernd wirkende Energie, E_K ist die Energie, mit welcher das β-Teilchen die Peripherie des Kerns erreicht. Für die Energie E_A besteht die Beziehung:

$$(15) \qquad \frac{e^2 Z}{r} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} - 1 \right) = E_A$$

und für die dieser Energie entsprechende Gegengeschwindigkeit v_A der Ausdruck:

$$(16) \qquad \frac{e^2 Z}{m_0 r c^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}}.$$

Da

$$m_0 = 8{,}996 \cdot 10^{-28},$$
$$c = 2{,}999 \cdot 10^{10},$$
$$e = 4{,}774 \cdot 10^{-10},$$

so ist Ausdruck (16) auch zu schreiben:

$$(17) \qquad 1 + 2{,}8167_5 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{Z}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}}.$$

Da die sicheren Werte für die unteren Grenzen der Kernradien aus Tab. 4 nur für solche β-Strahler zur Verwendung gelangen können, die auch zugleich α-Strahler sind, müssen für die meisten β-Strahler die weniger richtigen Werte der Kernradien aus Tab. 2 entnommen werden. Da jedoch diese Werte von Tab. 2 mit der oben abgeleiteten Formel:

$$r = 3{,}4814_1 \cdot 10^{-14} \cdot Z$$

berechnet wurden, so geht Gleichung (17) über in:

$$(18) \qquad 1 + \frac{28{,}1675}{3{,}4814} = 9{,}091 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}}.$$

Der Wert für die obere Grenze der Geschwindigkeit v_A ergibt sich also bei Benützung der Werte für die unteren Grenzen der Kernradien aus Tab. 2 als konstant für alle β-Strahler zu:

$$v_A = 2{,}98 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$$

bzw. der Wert der *oberen* Grenze der Energie zu:

$$E_A = 6{,}547 \cdot 10^{-6} \text{ Erg}.$$

Entnimmt man die Werte für die Kernradien der α- und β-Strahler (RdTh, RdAc, Ra, RaC, ThC) aus Tab. 4, so erhält man für die Geschwindigkeiten v_A und v_K etwas niedrigere

Werte. Da die durch obige Gleichungen erhaltenen Werte für die oberen Grenzen der beiden Geschwindigkeiten v_A und v_K der Lichtgeschwindigkeit sehr nahe kommen, erübrigt sich eine tabellarische Zusammenstellung dieser Werte für sämtliche β-Strahler. Jedoch noch aus einem weiteren Grunde ist es zweckmäßig, daß eine Zusammenstellung der Werte für die oberen Grenzen der Energien E_A und E_K unterbleibt. Es hat sich durch neuere Untersuchungen der β-Strahlungen der Radioelemente herausgestellt, daß bei den meisten β-Strahlern nur die Geschwindigkeit der sekundär, im Atom erregten β-Strahlung bekannt ist. Messungen der Geschwindigkeiten der primär aus dem Atomkern kommenden β-Strahlen sind erst in letzter Zeit von C. D. Ellis[1]) (RaB) und von Lise Meitner[2]) (ThB, RaD, RaC, Ra, RdTh) ausgeführt worden. Es sind daher in den Tabb. 5 und 6 nur für diese β-Strahler die Maximal- und Minimalwerte von E_A, E_K, r angegeben. Die Energie $E_{beob.}$ bezeichnet jene Energie, die sich entweder aus der gemessenen Geschwindigkeit der (primären) Kern-β-Strahlung bzw. der gleich großen Energie der (primären) Kern-γ-Strahlung oder aus der Energiedifferenz[2]) der (sekundären) Atom-β-Strahlung ergibt. Tab. 5 enthält die oberen Grenzwerte von E_K und E_A, die sich bei Benutzung der in Tab. 2 angegebenen unteren Grenzwerte für die Kernradien der Radioelemente RaB, RaD und ThB ergeben. Nur für Radium C kann als α- und β-Strahler der genauere Wert der unteren Grenze seines Kernradius aus Tab. 4 herangezogen werden.

Tab. 6 enthält die oberen und unteren Grenzwerte von E_K, E_A und r der zwei Radioelemente Radium und Radiothorium. Diese Radioelemente senden eine β-Strahlung aus, mit welcher *keine* Umwandlung des Atomkerns verbunden ist. Lise Meitner[2]) hat den Nachweis erbracht, daß diese β-Strahlung der beiden Elemente nicht aus dem Atomkern stammt, sondern eine Atom-β-Strahlung, also sekundären Ursprungs ist. Diese Atom-β-Strahlung wird durch eine Kern-γ-Strahlung ausgelöst, die selbst wieder durch eine Kern-β-Strahlung entsteht. Die β-Strahlelektronen können also bei diesen Radioelementen den

1) C. D. Ellis, Proc. Roy. Soc. (A) 99. S. 261—271. 1921.
2) L. Meitner, Zeitschr. f. Phys. 9. Nr. 3. S. 131—144. 145—152. 1922.

Tabelle 5.

β-Strahlung.

β-Strahler	Ordnungszahl	$E_{beob.}$ in erg $\times 10^{-7}$	Obere Grenze der Energie E_A in erg $\times 10^{-7}$	Obere Grenze der Energie E_K in erg $\times 10^{-7}$	Untere Grenze des Kernradius in cm $\times 10^{-14}$
Thorium *B*	82	3,75	65,47	69,22	285,47
Radium *C*	83	33,5	40,68	74,18	465,
Radium *D*	82	0,78	65,47	66,2	285,47
Radium *B*	82	5,53	65,47	71,0	285,47
		3,77	65,47	69,24	285,47

Tabelle 6.

β-Strahlung.

β-Strahler	Ordnungszahl	Energie $E_{beob.}$ in erg $\times 10^{-7}$	*Obere* Grenze der Energie E_A in erg $\times 10^{-7}$	*Obere* Grenze der Energie E_K in erg $\times 10^{-7}$	*Untere* Grenze der Energie E_A in erg $\times 10^{-7}$	Untere Grenze der Energie E_K in erg $\times 10^{-7}$	Obere Grenze des Kernradius in cm $\times 10^{-13}$	Untere Grenze des Kernradius in cm $\times 10^{-13}$
Radium . . .	88	3,0	37,69	37,69	3,0	3,0	67,0	5,32
Radiothorium .	90	1,34	42,2	42,2	1,34	1,34	150,0	4,86

Atomkern nicht verlassen und geben einen Teil ihrer Energie in Form von Kern-γ-Strahlung ab. Da nun aus der Atom-β-Strahlung die Energie der Kern-γ-Strahlung und damit die Energie der Kern-β-Strahlung berechenbar ist, ist es möglich, die oberen Grenzen der Kernradien der beiden Elemente und die unteren Grenzen von E_A und E_K zu berechnen. Die in Tab. 4 angeführten unteren Grenzen der Kernradien ergeben die in Tab. 6 gegebenen Werte der oberen Grenzen von E_A und E_K, da Radiothorium und Radium α- und β-Strahler sind. Da die mit der Energie E_K ausgestatteten Kernelektronen nicht aus dem Atomkern herausgelangen können, muß allgemein

$$E_A \gtrless E_K, \tag{19}$$

für diese zwei Radioelemente sein. Zur Berechnung der *unteren* Grenzen von E_A, E_K und r nehmen wir an, daß ($E\gamma$-Energie der Kern-γ-Strahlen)

$$E_A = E_K = E_{beob.} = E\gamma$$

Tabelle 7.
α-Strahlung.

Element	Ordnungszahl	Obere Grenze des Kernradius in cm × 10^{-13}	Untere Grenze des Kernradius in cm × 10^{-13}	Geschwindigkeit $v_{beob.}$ in cm × 10^9	Energie $E_{beob.}$ in erg × 10^{-7}	Obere Grenze der Geschwindigkeit v_A in cm × 10^9	Untere Grenze der Geschwindigkeit v_A in cm × 10^9	Obere Grenze der Energie E_A in erg × 10^{-7}	Untere Grenze der Energie E_A in erg × 10^{-7}	Obere Grenze der Geschwindigkeit v_K in cm × 10^9	Obere Grenze der Energie E_K in erg × 10^{-7}
Radium .	88	67,0	5,32	1,511	75,35	1,511	0,425	75,35	5,987	1,45	69,87
Radiothorium	90	150,0	4,88	1,60	84,434	1,60	0,288	84,434	2,785	1,57	81,7

sei. Die Werte für die unteren Grenzen von r sind dann aus Gleichung (15) zu berechnen.

Für Radium B sind in Tab. 5 zwei verschiedene primäre Kern-β-Strahlen angegeben, die experimentell von Ellis (a. a. O.) gefunden wurden. Da überhaupt die Verhältnisse bei den radioaktiven Umwandlungen für das paarweise Vorkommen von Kernelektronen in den Atomkernen sprechen, ist die Existenz von zwei (primären) Kern-β-Strahlungen erklärbar.

Die durch die Energie der Kern-γ-Strahlung von Radium und Radiothorium ermittelten oberen Grenzen der Kernradien dieser beiden Elemente können nun für die Berechnung der *oberen* Grenzen der Geschwindigkeiten v_A und v_K und der Energien E_A und E_K, sowie der *unteren* Grenzen von v_A und E_A für die α-Strahlung dieser zwei Radioelemente herangezogen werden. In Gleichung (7) werden zu diesem Zwecke für r die oberen Grenzwerte eingesetzt und nach v aufgelöst. Der so erhaltene Wert von v ist die untere Grenze der Geschwindigkeit v_A. Die dieser Geschwindigkeit entsprechende untere Grenze der Energie E_A und die aus der beobachteten Reichweite bzw. Geschwindigkeit berechnete Energie $E_{beob.}$ gestatten

die obere Grenze der Energie E_K, bzw. der Geschwindigkeit v_K zu berechnen, da für α-Strahlung die Energiegleichung:

$$E_{beob.} - E_A = E_K \tag{20}$$

gilt.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß bei einer graphischen Darstellung der unteren Grenzen der Kernradien der α-Strahler in bezug auf ihre Ordnungszahlen sich ein periodischer Verlauf der drei Kurven für die Radium-Aktinium- und Thoriumfamilie zeigt. Diese Periodizität hat jedoch nur sehr geringe Ähnlichkeit mit dem periodischen Verlauf der Atomvoluminakurve und wurde schon von A. Smekal (a. a. O.) vermutet. Sie dürfte möglicherweise durch Stabilitätsverhältnisse verursacht sein. Die Werte der unteren Grenzen der Kernradien für die α-Strahler einer radioaktiven Familie nehmen nicht fortdauernd von α-Strahler zu α-Strahler ab, sondern (s. Tab. 4) es zeigt sich besonders bei α- und β-Strahlern, die eine Zweigfamilie entstehen lassen, ein Anstieg der Werte für die Kernradien. So findet z. B. für die α-Strahler der Radiumreihe von Uran *I* bis Radium *A* eine Abnahme der Kernradien statt, bei Radium *C* zeigt sich ein beträchtlicher Anstieg, bei Radium *C'* eine starke Abnahme und bei Radium *F* wieder eine so große Zunahme, daß der Wert für Radium *C* nochmals erreicht wird.

Bezugnehmend auf die Experimentalarbeiten von C. D. Ellis und L. Meitner möchten wir noch besonders darauf hinweisen, daß sich die radioaktiven Vorgänge nunmehr auch vom Standpunkt der Quantentheorie behandeln lassen, da in den Atomkernen Energieniveaus bestehen, bzw. ein Quantenübergang zwischen den zerfallenden Atomen und den aus diesen entstehenden Atomen existiert.

Wir werden in einer demnächst erscheinenden Arbeit die *Quantentheorie der radioaktiven Umwandlung* eingehend behandeln.

Wien, 29. Juni 1922.

Nachtrag.

Über den unteren und oberen Grenzwert für den Radius des Wasserstoffkerns.[1])

Der aus der oben abgeleiteten Gleichung:

$$r = 3{,}4814 \cdot 10^{-14} \cdot Z$$

für den Wasserstoffkern — das positive Elektron — folgende Wert des Radius ist *keine untere* Grenze. Er würde nur dann die untere Grenze sein, wenn das α-Teilchen von Radium C in das Innere des Wasserstoffkerns eindringen könnte. Da dies beim Wasserstoffkern sicher nicht der Fall ist, *muß* der Radius kleiner sein, als der aus obiger Gleichung folgende.

Der Wert für die untere Grenze des Radius läßt sich hingegen aus der, aus der Relativitätstheorie abgeleiteten Beziehung:

$$r = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_H \cdot c^2}$$

berechnen, wobei der Wasserstoffkern als positives Elektron und dessen Trägheit als rein elektromagnetischen Ursprungs aufgefaßt ist.

Man erhält dann für den *unteren* Grenzwert des Radius

$$H \ldots r_{min} = 1{,}01 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Der Radius des Wasserstoffkerns kann nur größer sein als dieser Wert.

Der *obere* Grenzwert für den Radius ist der aus der erstgenannten Gleichung folgende, somit also:

$$H \ldots r_{max} = 3{,}5 \cdot 10^{-14} \text{ cm}.$$

Wien-Bad Aussee, den 4. August 1922.

---

1) Hrn. Geh. Hofrat Prof. Dr. Willy Wien möchte ich für die Anregung hierzu auch hier bestens danken.

(Eingegangen 7. August 1922.)

7. *Die Relativierung der Bewegung mit Hilfe der Hypothese von A. Föppl*[1]*; von H. Zanstra.*

§ 1. Die Festlegung von Inertialsystemen in der klassischen Mechanik ohne Verwendung des Prinzips der absoluten Bewegung.

In der klassischen Mechanik werden bekanntlich die Differentialgleichungen der Bewegung eines Systemes von n materiellen Punkten

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} m_\nu \ddot{x}_\nu = X_\nu, & m_\nu \ddot{y}_\nu = Y_\nu, & m_\nu \ddot{z}_\nu = Z_\nu \\ & & \nu = 1 \ldots n) \end{array} \right.$$

bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, das im „absoluten Raume" ruht oder gleichförmig bewegt. Sobald man hingegen auf ein anderes Bezugssystem übergeht, das bezüglich des ersten nicht gleichförmig bewegt oder in irgendeiner Weise rotiert, so erhalten die Differentialgleichungen der Bewegung eine kompliziertere Gestalt, z. B. kommen, wie bekannt, im Falle eines absolut rotierenden Bezugssystems im linken Gliede Terme vom Typus der Zentrifugal- und Corioliskräfte hinzu.

Diejenigen Koordinatensysteme, für welche die Bewegungsgleichungen die einfachste Form (1) annehmen, die sogenannten „Inertialsysteme", werden also mit Hilfe des Begriffes des „absoluten Raumes" definiert, welcher von Newton eingeführte Begriff auch in der späteren Ausarbeitung der Newtonschen Mechanik anfänglich beibehalten wurde. Doch hat bereits Newtons jüngerer Zeitgenosse Berkeley dieses Prinzip der absoluten Bewegung (Bewegung im „absoluten Raume") einer

1) Dieser Artikel ist, abgesehen von der Berichtigung eines — für den Gedankengang belanglosen — Versehens in den Gl. 8 und 9 und in § 5g die Übersetzung einer Originalmitteilung in den „Verslagen Koninklijke Academie van Wetenschappen, Amsterdam", 29. S. 1217. 1921.

Kritik unterworfen, indem er darauf hinweist, daß die Bewegung eines Körpers auf andere Körper und nicht auf den absoluten Raum bezogen werden muß.[1]) In neuerer Zeit ($\pm$ 1870) waren es besonders C. Neumann, Lange und Mach[2]), welche diese Frage aufs Neue wieder aufnahmen. Während Neumann noch die Auffassung der absoluten Bewegung verteidigte, wurde durch die spätere Kritik die Überzeugung ziemlich allgemein, daß die Bewegung relativ sei. Hat man letzteres einmal anerkannt, so kommt man zu den folgenden zwei Problemen:

1. Wie kann man Inertialsysteme festlegen ohne Verwendung eines absoluten Raumes?

2. Welche Form enthalten dementsprechend die Bewegungsgleichungen der Mechanik, wenn man verlangt, daß sie keine absoluten Koordinaten mehr enthalten, sondern nur relative (d. h. die gegenseitige Lage der Systempunkte bestimmende) Koordinaten und ihre Derivierten nach der Zeit?

Föppl hat eine Lösung des ersten Problems gegeben, die wir im folgenden Paragraphen besprechen wollen.[3]) In Anschluß daran wollen wir dann in § 4 eine Lösung des zweiten Problems geben. Schon jetzt wollen wir darauf hinweisen, daß diese Lösung eine ganz andere ist als die der Einsteinschen Theorie, in § 5 kommen wir darauf zurück.

§ 2. Die Hypothese von A. Föppl[4]), welche spezielle Inertialsysteme festlegt.

Einfachheitshalber werden im folgenden alle Rechnungen in der Ebene ausgeführt.[5])

---

1) Berkeley, Prinzipien der menschlichen Erkenntnis. Deutsche Übersetzung von Friedrich Ueberweg, Sektionen CXI u. f.

2) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Für Lange und Neumann siehe § 5. Eine Angabe der Literatur findet sich in der Enzyklopädie der Math. Wissensch. VI, 1, S. 30. Siehe auch H. Seeliger, Über die sogenannte absolute Bewegung. Sitzungsber. der Math. Phys. Klasse der Bayr. Acad. der Wiss. 36. S. 85. 1906.

3) Einige kurze kritische Bemerkungen, dieser und einigen anderen vorgeschlagenen Lösungen betreffende, wollen wir noch in § 5 geben.

4) A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik. VI. Erster Abschnitt. Die relative Bewegung.

5) Die Ausführung im Raume ist ganz analog. Es empfiehlt sich dann die Verwendung von Vektoren.

Mit Föppl nehmen wir an, daß die ganze im Raume anwesende Materie besteht aus einer endlichen Zahl von n materiellen Punkten. Dann gelten in einem Inertialsystem für die Koordinaten x', y' die Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} m_\nu \ddot{x}'_\nu = X_\nu, & m_\nu \ddot{y}'_\nu = Y_\nu \\ & (\nu = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Weiter nehmen wir an, daß die Größen im rechten Gliede (die Kraftkomponenten) dem Wechselwirkungsgesetz genügen:

$$(3a)\qquad \Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0.$$

$$(3b)\qquad \Sigma(x' Y - y' X) = 0,$$

summiert über alle n-Punkte. Dies ist um so mehr der Fall, wenn die Punkte aufeinander Kräfte in den Richtungen ihrer Verbindungslinien ausüben.

Aus (2), (3a) und (3b) folgt:

$$(4a)\qquad \Sigma m \ddot{x}' = 0, \qquad \Sigma m \ddot{y}' = 0$$

$$(4b)\qquad \Sigma m(x' \ddot{y}' - y' \ddot{x}') = 0$$

und nach Integration:

$$(5a)\qquad \Sigma m \dot{x}' = T_1, \qquad \Sigma m \dot{y}' = T_2$$

$$(5b)\qquad \Sigma m(x' \dot{y}' - y' \dot{x}') = R,$$

mit 3 noch vollkommen willkürlichen Konstanten T_1, T_2 und R. Im Raume hat man analog 6 Konstanten T_1, T_2, T_3, R_1, R_2, R_3. Es ist immer möglich ein Inertialsystem derart zu wählen, daß drei dieser Größen verschwinden, mehr als drei können nicht verschwinden ohne eine spezielle Hypothese.

Die Hypothese von Föppl ist nun:

Unter den Inertialsystemen gibt es immer solche, für welche sämtliche 6 Konstanten T_1, T_2, T_3, R_1, R_2, R_3 verschwinden.

Somit gilt für die Ebene:

$$(6)\qquad T_1 = 0, \qquad T_2 = 0, \qquad R = 0$$

oder auch nach (5a) und (5b):

$$(7a)\qquad \Sigma m \dot{x}' = 0, \qquad \Sigma m \dot{y}' = 0.$$

$$(7b)\qquad \Sigma m(x' \dot{y}' - y' \dot{x}') = 0.$$

Zu diesen speziellen Inertialsystemen gehören auch solche, in welchen überdies $\Sigma m x' = 0$ und $\Sigma m y' = 0$, und deren

Ursprung also fortwährend mit dem Schwerpunkt des Punktsystems zusammenfällt, ein solches System heißt nach Föppl *Hauptbezugssystem.*[1])

Ein solches Hauptbezugssystem $X_\beta Y_\beta$ kann nun in folgender Weise konstruiert werden. Nimm ein Bezugssystem $X_\alpha Y_\alpha$, dessen Ursprung dauernd mit dem Schwerpunkt des Punktsystems zusammenfällt, während die X-Achse fortwährend durch einen der materiellen Punkte hindurchgeht. Berechne $\Sigma m z^2 \dot{\theta}$ in $X_\alpha Y_\alpha$. Lege ein zweites Koordinatensystem $X_\beta Y_\beta$ mit Ursprung ebenfalls fortwährend im Schwerpunkte und gib diesem Systeme in $X_\alpha Y_\alpha$ eine Rotationsgeschwindigkeit:

$$\omega = -\frac{\Sigma m z^2 \dot{\theta}}{\Sigma m z^2}.$$

In dieser Weise ist ein Hauptbezugssystem, also ein Inertialsystem, festgelegt ohne Verwendung eines „absoluten Raumes".

§ 8. Relativierung ohne Verwendung der Föpplschen Hypothese.

Vom zweiten in § 1 gestellten Problem wollen wir erst eine Lösung geben ohne Verwendung der Föpplschen Hypothese.

Wir gehen aus von den Differentialgleichungen (2). Daneben setzen wir voraus, daß die Kräfte, deren Komponenten X_ν und Y_ν sind, nur von der relativen Lage der Punkte abhängig sind (z. B. Newtonsche Kraft).

Es sei nun ein neues Bezugssystem XY mit Ursprung fortwährend in einem willkürlichen materiellen Punkte des Systems gelegt, das wir Punkt 1 nennen wollen. Die X-Achse gehe fortwährend durch einen zweiten willkürlichen Punkt 2 des Punktsystems; die neuen Koordinaten x und y sind dann nach § 1 relative Koordinaten. Nach der Transformation der alten Koordinaten auf das neue Bezugssystem[2]) gehen die Bewegungsgleichungen (2) über in:

---

1) Die Föpplsche Hypothese lautet in ihrer ursprünglichen Form: für ein Inertialsystem mit dem Ursprung im Schwerpunkt ist der totale Drall (Moment der Bewegungsgröße) immer gleich Null.

2) Siehe § 5g.

$$(8a)\quad \begin{cases} x_2(\ddot{x}_\nu - w^2 x_\nu) + 2w(\dot{x}_2 y_\nu - x_2 \dot{y}_\nu) \\ \qquad = x_2\left(\frac{X_\nu}{m_\nu} - \frac{X_1}{m_1}\right) + y_\nu\left(\frac{Y_2}{m_2} - \frac{Y_1}{m_1}\right) \\ x_2(\ddot{y}_\nu - w^2 y_\nu) - 2w(\dot{x}_2 x_\nu - x_2 \dot{x}_\nu) \\ \qquad = x_2\left(\frac{Y_\nu}{m_\nu} - \frac{Y_1}{m_1}\right) - x_\nu\left(\frac{Y_2}{m_2} - \frac{Y_1}{m_1}\right), \end{cases}$$

in welchen Gleichungen w gegeben ist durch die Differentialgleichung:

$$(8b)\quad \dot{w}\, x_2 + 2w\dot{x}_2 = \frac{Y_2}{m_2} - \frac{Y_1}{m_1}.$$

Es gibt $2n-3$ Koordinaten $x_\nu y_\nu$ und dementsprechend $2n-3$ unabhängige Gleichungen zweiter Ordnung (8a), die Hilfsgröße w trete auf in einer Gleichung erster Ordnung (8b) in w. (8a) und (8b) bilden also zusammen ein System der Ordnung $2(2n-3)+1 = 4n-5$. Nach Elimination von w bleiben $2n-3$ Koordinaten, so daß z. B. das System übergeführt werden kann in $2n-4$ *Gleichungen zweiter Ordnung und eine Gleichung dritter Ordnung.* In diesen Gleichungen treten dann nur die relativen Koordinaten und Derivierten und die ebenfalls nur von der relativen Lage der n-Punkte abhängigen Größen $X_\nu Y_\nu$ auf, so daß damit das gestellte Problem gelöst ist.

§ 4. Relativierung mit Verwendung der Föpplschen Hypothese.

Wir werden hier eine viel einfachere Lösung des in § 1 gestellten zweiten Problems erhalten, weil wir jetzt nicht nur die im vorigen Paragraphen gemachten Annahmen, sondern auch die Föpplsche Hypothese verwenden.

Die Bewegungsgleichungen (2) werden mit Rücksicht auf (7a) und (7b) nach Transformation auf die neuen, relativen Koordinaten [1]):

$$(9a)\quad \begin{cases} x_2(\ddot{x}_\nu - w^2 x_\nu) + 2w(\dot{x}_2 y_\nu - x_2 \dot{y}_\nu) \\ \qquad = x_2\left(\frac{X_\nu}{m_\nu} - \frac{X_1}{m_1}\right) + y_\nu\left(\frac{Y_2}{m_2} - \frac{Y_1}{m_1}\right) \\ x_2(\ddot{y}_\nu - w^2 y_\nu) - 2w(\dot{x}_2 x_\nu - x_2 \dot{x}_\nu) \\ \qquad = x_2\left(\frac{Y_\nu}{m_\nu} - \frac{Y_1}{m_1}\right) - x_\nu\left(\frac{Y_2}{m_2} - \frac{Y_1}{m_1}\right), \end{cases}$$

1) Ausführung siehe § 5g.

in welchen Gleichungen:

$$w = -\frac{\Sigma m \Sigma m(x\dot{y} - y\dot{x}) - (\Sigma mx \Sigma m\dot{y} - \Sigma my \Sigma m\dot{x})}{\Sigma m \Sigma m(x^2 + y^2) - (\Sigma mx)^2 - (\Sigma my)^2}, \tag{9b}$$

summiert über alle n-Punkte.

Die Gleichungen (9a) sind die gefragten Bewegungsgleichungen in relativen Koordinaten, wenn für w der Wert (9b) substituiert wird. Sie sind $2n - 3$ *voneinander unabhängige Differentialgleichungen zweiter Ordnung.*

Ohne Einführung der Föpplschen Hypothese erhielten wir in § 3 $2n - 4$ Gleichungen zweiter und eine Gleichung dritter Ordnung, hier erhalten wir, dank sei der Föpplschen Hypothese, $2n - 3$ Gleichungen zweiter Ordnung. Die hier erhaltenen Gleichungen (9a) und (9b) sind daher den Gleichungen (8a) und (8b) vorzuziehen.

§ 5. Bemerkungen.

a) Lange[1]) gibt in seiner Methode der Probekörper einen Weg an, Inertialsysteme experimentell zu finden, bespricht aber nicht deren Zusammenhang mit dem Total der materiellen Punkte der Welt.

b) Neumann[2]) und später Boltzmann[3]) versuchen dies wohl, indem sie die Lage der materiellen Punkte beziehen auf die Hauptträgheitsachsen des Totalsystems. Sie geben keine Differentialgleichungen. Man kann sich davon überzeugen, daß die in einem solchen Systeme gültigen Differentialgleichungen eine andere Gestalt haben müssen als die Newtonsche, im Gegensatz zum Föpplschen System, das keine Änderung der Newtonschen Differentialgleichungen verlangt, sondern nur einen bestimmten Wert einiger Integrationskonstanten (§ 2).

c) Kolkmeyer[4]) beschäftigt sich mit in manchen Hinsichten allgemeineren Problemen, insoweit er z. B. auch die

---

1) L. Lange, Geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffs.

2) C. Neumann, Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Mechanik.

3) L. Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipien der Mechanik. Leipzig 1904. II. S. 333.

4) N. H. Kolkmeyer, Eliminatie van de begrippen assenstelsel, lengte en tijd uit de vergelijkingen voor de planetenbewegingen. Dissertation Amsterdam 1915.

absolute Zeit aus den Gleichungen eliminiert. In diesem Zusammenhang sei nur erwähnt, daß er nicht zu Gleichungen vom Typus des § 4 kommt, weil er die Hypothese von Föppl nicht heranzieht.

d) Einstein gibt in seiner Relativitätstheorie eine prinzipiell ganz andere Relativierung als die hier ausgeführte, was damit zusammenhängt, daß er nicht nur die mechanischen, sondern auch die elektromagnetischen und optischen Erscheinungen relativieren will.

e) In Zusammenhang mit einem von Föppl[1]) durchgeführten Experiment und einer Bemerkung von Freundlich[2]) möge noch folgendes Gedankenexperiment besprochen werden. Am Nordpol der Erde werde der Foucaultsche Pendelversuch gemacht. Unter dem Pendel werde ein schweres Schwungrad aufgestellt mit vertikaler Rotationsachse. Frage: Ändert sich die Bewegung des Pendels, wenn wir das Schwungrad drehen? Die Föpplsche Hypothese und unsere Gleichungen geben die folgende Antwort: Bezüglich des Hauptbezugssystems bleibt: 1. die Drehung der Schwingungsebene fortlaufend = Null, 2. die Summe des Dralles von Schwungrad und Erde immer konstant, ebenfalls dieselbe Summe über die restierenden Körper der Welt, da ja ihre totale Summe vorher und nachher Null bleiben muß. Daraus folgt unmittelbar: Die Drehung der Schwingungsebene gegenüber den restierenden Körpern (Fixsterne) erfährt keine Veränderung (wohl aber gegenüber der Erde, insofern sich deren Rotation ein wenig geändert hat).

f) Vom Standpunkte der Newtonschen Mechanik kann man behaupten: Wenn nur zwei Himmelskörper in der Welt da wären, so wäre es möglich, daß sie in konstanter Entfernung sich umeinander bewegen würden; auch wäre es möglich, daß eine allein in der Welt anwesende Flüssigkeitsmasse infolge der Zentrifugalkräfte abgeplattet wäre, während doch keine relative Bewegung der Flüssigkeitsteilchen konstatiert würde. In der hier gegebenen, sich auf die Föpplschen Hypothese stützenden Auffassung ist dies unmöglich.

---

1) A. Föppl, Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der Bayr. Acad. der Wiss. 34. S. 3. 1904.

2) Erwin Freundlich, Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. Berlin 1916. S. 27.

g) Zwecks Ausführung der Transformationen des § 3 geht man aus von einem Inertialsystem.

$$m_\nu \ddot{x}_\nu' = X_\nu, \qquad m_\nu \ddot{y}_\nu' = Y_\nu. \tag{2}$$

Für das neue Bezugssystem XY, mit Ursprung dauernd im Punkte 1 und mit der X-Achse fortwährend durch den Punkt 2, gilt:

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0, \qquad y_2 = 0. \tag{10}$$

Das ursprüngliche Bezugssystem sei momentan dem neuen Systeme parallel. Die Transformationsformeln sind dann:

$$\begin{cases} \ddot{x}_\nu + a - \dot{w} y_\nu - w^2 x_\nu - 2w\dot{y}_\nu = \ddot{x}_\nu' \\ \ddot{y}_\nu + b + \dot{w} x_\nu - w^2 y_\nu + 2w\dot{x}_\nu = \ddot{y}_\nu' \end{cases} \tag{11}$$

in welchen Gleichungen a und b die Beschleunigungskomponenten des neuen Ursprungs sind und w die Rotationsgeschwindigkeit des neuen Systems.

Die drei Bedingungen (10), substituiert in (11), geben dann:

$$\begin{cases} a = \ddot{x}_1' = \dfrac{X_1}{m_1}, \qquad b = \ddot{y}_1' = \dfrac{Y_1}{m_1} \\ \dot{w} x_2 + 2w\dot{x}_2 = \ddot{y}_2' - b = \dfrac{Y_2}{m_2} - \dfrac{Y_1}{m_1}. \end{cases} \tag{12}$$

Die Gleichungen (11) und (12), welche somit die Bewegungsgleichungen in relativen Koordinaten sind, können auf die Gleichungen (8a) und (8b) des § 3 reduziert werden. Man kann nun w auffassen als eine Hilfsgröße, vorkommend in (8a), welche durch (8b) gegeben wird.

Um nun die Föpplsche Hypothese einzuführen, kann man ausgehen von einem Hauptbezugssystem, dessen Ursprung also im Schwerpunkt des Punktsystems liegt, während der totale Drall fortwährend verschwindet (§ 2).

$$\Sigma m x' = 0, \qquad \Sigma m y' = 0. \tag{13a}$$

$$\Sigma m (x'\dot{y}' - y'\dot{x}') = 0. \tag{13b}$$

Der Ursprung des neuen Systems hat nun nach (13a) im ursprünglichen Systeme die Koordinaten:

$$x_1' = -\frac{\Sigma m x}{\Sigma m} \quad \text{und} \quad y_1' = -\frac{\Sigma m y}{\Sigma m},$$

die Rotationsgeschwindigkeit ist w. Die Gleichung (13b) geht dann nach Transformation auf das neue Bezugssystem über in (9b) des § 4, welche Gleichung nun statt (8b) die Hilfsgröße w gibt.

(Eingegangen 31. Oktober 1922.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 0.

Fabrik für physikalische, chemische und technische Apparate

Gegründet 1890 — Gegründet 1890

Pfeiffer

Hoch-Vakuum-Pumpen

für Wissenschaft und Technik

für Saugleistungen bis 30 cbm stündlich und Vakua bis $^1/_{1000000}$ mm Hg

Neuheit! **Quecksilber-Dampfstrahlpumpe** *Neuheit!*

nach System Pfeiffer (D. R. P. angem.), ganz aus Stahl.

Rotierende Kapsel-Öl-Luftpumpe D. R. P.
mit Elektromotor direkt gekuppelt.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4—1000 mm Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke

Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

1923. № 3.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 70.

1. *Über das Leuchten der Phosphore in hohen elektrischen Feldern;*

von Ferdinand Schmidt.

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.) [1])

Einleitung.

Bei der Erregung und der Abklingung eines Phosphors hat man es nach der Anschauung des Hrn. Lenard[2]) mit den folgenden Einzelvorgängen in den Phosphoreszenzzentren zu tun: Während der Erregung werden Elektronen aus den Metallatomen des Phosphors abgetrennt. Diese verlassen vollständig den Verband des Metallatoms und werden alsbald von gewissen Nachbaratomen im Zentrum aufgenommen, bei denen sie eine mehr oder minder lange Zeit verbleiben. Hierin besteht die Aufspeicherung der Erregung im Phosphor. Kehren die Elektronen von den aufspeichernden Stellen aus irgendwelchen Ursachen zum Metallatom zurück, so erfolgt das Leuchten des Metallatoms, der Phosphor klingt ab. Für gewöhnlich wird diese Rückkehr der aufgespeicherten Elektronen, wenn der Phosphor bei gleichbleibender Temperatur sich selbst überlassen wird, durch die Wärmebewegung veranlaßt. Die Abspaltung der Elektronen von den aufspeichernden Atomen erfolgt dabei durch Nähewirkung von seiten der benachbarten Atome, wenn infolge der Wärmebewegung im Phosphor die Atome sich dicht einander nähern.

Die Zahl der in der Zeiteinheit von den aufspeichernden Atomen abgetrennten und zu den Metallatomen zurückkehrenden Elektronen kann durch Erwärmen des Phosphors (Hitzeaustreiben) und durch Bestrahlung mit Licht (Ausleuchtung) vergrößert werden. In beiden Fällen tritt ein kurzdauerndes

1) Heidelberger Habilitationsschrift.

2) P. Lenard, Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht. I. Sitzungsber. d. Heidelberger Ak. d. Wiss. Math.-Naturw. Kl. Abt. A. 1917. 5. Abh. Einleitung.

Aufleuchten des Phosphors ein. Die Wirkung der beiden Eingriffe beruht in einer Steigerung der Energie der Wärmebewegung im Phosphor und zwar im ersteren Falle sämtlicher Moleküle des Phosphors, im letzteren Falle der Atome innerhalb eines Zentrenmoleküls (molekular-lokale Temperaturerhöhung). Beide Vorgänge sind von Hrn. Lenard[1]) in weitgehendem Maße quantitativ untersucht worden, wobei sich ein verfeinertes Bild des Aufbaues der Phosphore und der Leuchtvorgänge in ihnen ergab.

Neuerdings haben die Herren Gudden und Pohl[2]) an Zinksulfidphosphoren gezeigt, daß man die Rückkehr der aufgespeicherten Elektronen auch durch hohe elektrische Felder erzwingen kann. Sie fanden für eine Reihe dieser Phosphore eine aufblitzende Ausleuchtung beim Anlegen eines Feldes von etwa 3000 Volt/cm an die abklingenden Phosphore, während eine dauernde Ausleuchtung bei konstant wirkendem Feld erst bei etwa 15 000 Volt/cm eintrat. So bemerkenswert die Beobachtungen der genannten Herren auch sind, bieten sie doch für das Verständnis der Vorgänge in den Zentren eines Phosphors bei Einwirkung eines elektrischen Feldes noch zu wenig Material.

Die vorliegende Untersuchung sammelt daher im Anschluß an die Versuche der Herren Gudden und Pohl weitere Erfahrung über die Ausleuchtung der Phosphore durch elektrische Felder. Sie erreicht dies einerseits dadurch, daß die Versuche auf eine größere Zahl der verschiedenartigsten Phosphore gut bekannter Zusammensetzung ausgedehnt werden und andererseits dadurch, daß der Verlauf der Ausleuchtung unter möglichster Veränderung der Feldverhältnisse qualitativ nnd quantitativ gefaßt wird. Die dabei erhaltenen zahlreichen neuen Beobachtungsergebnisse werden zur Aufstellung eines Bildes über den Mechanismus der Ausleuchtung durch ein elektrisches Feld benutzt.

---

1) P. Lenard, Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht. I. bis IV. Sitzungsber. Heidelberger Ak. d. Wiss. Math.-Naturw. Klasse. Abt. A. 1917. 5. u. 7. Abh.; 1918, 8. u. 11. Abh. In dieser Untersuchung ist auf alle frühere wichtige Kenntnis über die oben erwähnten Vorgänge hingewiesen, so daß sich weitere Literaturangaben hier erübrigen.

2) B. Gudden u. R. Pohl, Ztschr. f. Phys. 2. S. 192. 1920.

1. Teil. Allgemeine Beobachtungen.

Das Beobachtungsverfahren.

Sollten die Untersuchungen über die Einwirkung eines elektrischen Feldes auf das Leuchten der Phosphore zu eindeutigen Schlüssen auf die Vorgänge in den Zentren verwertbar und frei von störenden Nebenwirkungen sein, so mußten bei ihnen vornehmlich die folgenden Bedingungen befolgt werden, deren Notwendigkeit aus allem bisher an den Phosphoren Bekannten gegeben war.

1. Die Phosphore mußten im elektrischen Felde möglichst gut isolieren.
2. Das zur Erregung der Phosphore benutzte Licht durfte nur die Wellenlängen ihrer Dauererregungsstellen enthalten. Alles für die Erregung unwirksame Licht war auszuschalten, da es nur ausleuchtend und tilgend auf die Phosphore wirkt.
3. Die Phosphore mußten sich bei Einwirkung des elektrischen Feldes in einem wohldefinierten Erregungszustande befinden, sie mußten daher entweder voll oder vom gänzlich entleuchteten Zustand aus erregt werden.
4. Die Ausleuchtungsvorgänge durften nur an einer Bande des Phosphors für sich allein beobachtet werden.

Mit Rücksicht auf diese Bedingungen wurde die Versuchsanordnung in der im folgenden beschriebenen Weise aufgebaut. Der zu untersuchende Phosphor befand sich pulverförmig zwischen zwei Messingkämmen[1]), deren Zinken 1 mm breit waren und so ineinander griffen, daß die Zinken des einen Kammes von denen des anderen 0,5 mm weit abstanden. Beide Kämme waren isoliert voneinander auf eine starke Glimmerscheibe festgekittet. Nach dem Vorgange der Herren Gudden und Pohl sei diese Einrichtung eine „Zelle" genannt. Vor dem Einfüllen in die Zelle wurden die Phosphore flächenhaft ausgebreitet einer tagelangen Trocknung in einem luftleer gemachten Trockentopf unterworfen. Dies erwies sich als unbedingt erforderlich, um eine gute Isolation der Phosphore bei Anlegung der hohen Felder zu gewährleisten. Auch während

1) Ähnlich den in der Arbeit der Herren Gudden und Pohl (Ztschr. f. Phys. 2. S. 183. 1920) verwendeten Zellen.

der Versuche lag die mit dem Phosphorpulver gefüllte Zelle in einem luftdicht verschlossenen Glasgefäß, in dem Schälchen mit P_2O_5 aufgestellt waren.

Als Lichtquelle für die Erregung der Phosphore diente eine Quarzquecksilberlampe mit vorgeschaltetem Blauglas und vorgeschalteter Kupferoxydammonlösung, um das für die Erregung unwirksame Gelb und Grün der Lampe fortzunehmen. Das Licht der Lampe wurde nach seinem Durchgange durch die Farbfilter mittels einer Linse gesammelt und durch einen um 45° geneigten Spiegel[1]) von oben auf die wagrecht liegende Zelle geworfen. Die erregenden Lichtstrahlen fielen daher nahezu senkrecht zu den Kraftlinien des elektrischen Feldes ein. Sie enthielten in der Hauptsache die Quecksilberlinien 435, 407, 404 und 365 $\mu\mu$, die alle untersuchten Phosphore, wie bei jedem derselben besonders festgestellt wurde, zu dauerndem Nachleuchten erregten. Die Phosphore wurden im allgemeinen vor einer jeden Beobachtung voll erregt.[2]) Die für jeden einzelnen Phosphor dazu notwendige Erregungsdauer wurde durch Lichtsummenmessungen mit Hilfe einer lichtelektrischen Zelle für eine bestimmte Intensität des erregenden Lichtes festgestellt. Um letztere jederzeit wieder herstellen zu können, war in den Stromkreis der Quecksilberlampe ein verstellbarer Widerstand und ein Webermesser eingeschaltet; ein Voltmesser erlaubte, gleichzeitig die Klemmenspannung der Lampe abzulesen.

Die zur Herstellung der elektrischen Felder notwendigen Spannungen wurden einer Bornhäuserschen Hochspannungsbatterie entnommen. Ihre Einrichtung erlaubte, in Stufen von 2 Volt Spannungen von 2 bis 1200 Volt an die Zelle zu legen, so daß das höchsterreichbare Feld, in dem sich der zu untersuchende Phosphor befand, bei Berücksichtigung der Kammzwischenräume der Zelle 24 000 Volt/cm betrug. Zwischen Hochspannungsbatterie und Zelle war eine Wippe eingeschaltet, mit der nach Belieben die Feldrichtung an der Zelle gewechselt werden konnte. Die Hochspannungsbatterie war durch zwei Widerstände von je 12 000 Ohm gesichert. Bei dieser Batterie war stets ein Voltmesser in Verwendung, an

1) Der Spiegel konnte nach der Erregung zur Seite geschoben werden.

2) Über den Begriff der vollen Erregung eines Phosphors vergleiche P. Lenard, Über Lichtsummen bei Phosphoren. Sitzungsber. d. Heidelberger Ak. d. Wiss. Math.-Naturw. Klasse. Abt. A. 1912. 5. Abh. S. 15.

dem vor jeder Benutzung durch kurzes Einschalten geprüft wurde, ob die beabsichtigte Spannung auch vorhanden war.

Die Untersuchungen, die mit der soeben beschriebenen Anordnung ausgeführt wurden, ließen sich mit Rücksicht auf den Zustand, in dem sich die Phosphore befanden, wenn die Einwirkung des elektrischen Feldes vorgenommen wurde, in zwei Beobachtungsabschnitte zerlegen. Im ersten Beobachtungsabschnitt wurden die Leuchterscheinungen beobachtet, welche die Einwirkung eines elektrischen Feldes während der Abklingung der Phosphore nach ihrer vollen Erregung hervorrief. Im zweiten Beobachtungsabschnitt wurden die Phosphore schon unter der Wirkung eines elektrischen Feldes erregt und dann zu einer gewissen Zeit nach Schluß der Erregung der Feldwirkung entzogen.

Die Beobachtungsergebnisse.

A. Über die Wirkung elektrischer Felder auf das Abklingen der Phosphore.

Die Herren Gudden und Pohl hatten die Einwirkung hoher elektrischer Felder auf das Abklingen der Phosphore im besonderen an den Zinksulfidphosphoren gefunden. Da diese sich im großen und ganzen in ihren Eigenschaften entsprechend den bekannten Erdalkaliphosphoren verhalten, lag die Möglichkeit vor, daß auch die Erdalkaliphosphore sich in bezug auf die Einwirkung der elektrischen Felder ähnlich wie die Zinksulfidphosphore benehmen würden. So wurden denn außer einer großen Reihe von Zinksulfidphosphoren wohlbekannter Zusammensetzung, wie sie durch die jüngst veröffentlichte Untersuchung des Hrn. Tomaschek[1]) gegeben waren, auch die Erdalkalischwefel- und die Erdalkaliselenphosphore auf ihr Verhalten im elektrischen Felde geprüft. Hierbei zeigte sich nun, daß alle untersuchten Zinksulfidphosphore die Wirkung des elektrischen Feldes aufwiesen, während bei den Erdalkalischwefelphosphoren, von denen hauptsächlich die α-Banden des Wismuts und des Kupfers in den Sulfiden des Calciums und des Strontiums zur Untersuchung kamen, unter Anwendung von Feldstärken bis zu 24 000 Volt/cm keinerlei Wirkung

1) R. Tomaschek, Ann. d. Phys. 65. S. 189. 1921.

beobachtet werden konnte.[1]) Von den Erdalkaliselenphosphoren zeigten den Effekt ein CaSeZn α und ein SrSeCu β Phosphor.[2]) Die untersuchten Zinksulfidphosphore waren Zinkkupfer- und Zinkmanganphosphore verschiedener Zusammensetzung und unter verschiedenen Glühverhältnissen hergestellt, die alle die α-Bande des Kupfers oder des Mangans bei Zimmertemperatur aussandten. Käufliches phosphoreszierendes Zinksulfid, das in seinem Leuchten die α-Bande des Kupfers aufwies, verhielt sich im elektrischen Felde genau wie die anderen Zinkkupferphosphore.

Die Tabelle 1 gibt eine zusammenfassende Übersicht darüber, bei welchen Phosphoren die Wirkung der elektrischen Felder in gut beobachtbarer Weise gefunden wurde. In der ersten senkrechten Reihe dieser Tabelle findet man die Nummer des untersuchten Phosphors; sie wird im folgenden unter Bezugnahme auf diese Tabelle jeweils zur Bezeichnung des Phosphors genannt werden. In der zweiten Reihe ist die nach dem Vorgange Hrn. Lenards allgemein übliche Bezeichnung des Phosphors angegeben. Die dritte senkrechte Reihe enthält die quantitative Zusammensetzung eines jeden Phosphors. Ist diese schon veröffentlicht, so ist kurz auf die in Frage kommende Arbeit hingewiesen. In der vierten Reihe ist für jeden Phosphor die bei Zimmertemperatur sichtbare Bande aufgeführt und endlich in der fünften Reihe ist der Feldstärkenbereich angegeben, in dem ein Aufleuchten des Phosphors beim Anlegen des Feldes während der Abklingung beobachtet wurde. Auf die Bedeutung der in dieser Reihe enthaltenen Zahlen soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden, sie wird später im Zusammenhang mit anderen Versuchen öfters besprochen werden.

Die Beobachtungsergebnisse, die mit den in der Tabelle 1 genannten Phosphoren erhalten wurden, werden im folgenden in mehreren Abschnitten beschrieben werden.

1) Vielleicht tritt bei diesen Phosphoren die Wirkung erst bei höheren Feldstärken ein.

2) Es standen für die Untersuchung vier Erdalkaliselenphosphore zur Verfügung, die das radiologische Institut ihrem ersten Hersteller, Hrn. Prof. Dr. W. E. Pauli verdankt. Von diesen zeigten die beiden oben erwähnten Phosphore die Wirkung gut, während die anderen zu schwach bei Zimmertemperatur leuchteten, um mit Sicherheit die Wirkung der elektrischen Felder feststellen zu können.

Tabelle 1.

Nr.	Bezeichnung des Phosphors	Zusammensetzung des Phosphors	Emissionsbande	Feldstärken, b. den. d. Ausleuchtung beobacht. wurde Volt/cm
1.	ZnSMnNa	siehe bei: R. Tomaschek, a. a. O., S. 208. Tab. III. Nr. 3	α	2800—22 000
2.	ZnSMnLiMg	siehe bei: R. Tomaschek, a. a. O., S. 208. Tab. III. Nr. 19	α	2000—24 000
3.	ZnSMnCaK	siehe bei: R. Tomaschek, a. a. O., S. 205. Tab. II. Nr. 20	α	3400—22 000
4.	ZnSMnCaK	siehe bei: R. Tomaschek, a. a. O., S. 205. Tab. II. Nr. 21	α	3000—20 000
5.	ZnSMnCaK	siehe bei: R. Tomaschek, a. a. O., S. 205. Tab. II. Nr. 25	α	2000—20 000
6.	ZnSCuNaMg	2 g ZnS, 0,02 g NaCl, 0,02 g MgF_2, 0,000055 g Cu (Tomaschek) . .	α	2400—20 000
7.	ZnSCuNaMg	2 g ZnS, 0,01 g NaCl, 0,01 g MgF_2, 0,000078 g Cu, 1040°, 80 min. (Tomaschek)	α	2000—20 000
8.	ZnSCuNa-MgCa	2 g ZnS, 0,05 g MgF_2, 0,02 g NaCl, 0,05 g CaF_2, 0,000026 g Cu, 1200° 30 min. (Tomaschek)	α	22 000
9.	CaSeZnCa-KNa	siehe bei: F. Kittelmann, Ann. d. Phys. 46. S. 192. 1915. Nr. 4 . .	α	4000—20 000
10.	SrSeCuCa-KLi	2 g SrSe, 0,1 g $CaFl_2$, 0,07 g $K_4B_6O_{10}$, 0,08 g Li_2PO_4, 0,001 g Cu (W. E. Pauli)	β	10 000

1. Beim Anlegen eines elektrischen Feldes während der Abklingung eines Phosphors tritt eine kurzdauernde Ausleuchtung ein.

Die Beobachtung der Ausleuchtung eines Phosphors durch ein elektrisches Feld geschah einfach in der folgenden Weise: Der zu untersuchende Phosphor befand sich in der Zelle im Beobachtungsgefäß. Unmittelbar neben die Zelle wurde ein schmales Schälchen mit demselben Phosphor angefüllt gestellt. Beide Phosphorproben wurden sodann gleichzeitig voll erregt und nach der Erregung eine gewisse Zeitlang abklingen lassen. Wurde darauf an die Zelle ein Feld angelegt, so leuchtete der in ihr befindliche Phosphor gegenüber dem Phosphor in dem Schälchen hell auf. Der Vergleichsphosphor wurde überall da

angewandt, wo es sich darum handelte, die Lichtstärke der Ausleuchtung durch ein elektrisches Feld gegenüber der Helligkeit des abklingenden Phosphors abzuschätzen.

Die Ausleuchtung tritt nur bei einem erregten Phosphor auf, bei einem unerregten Phosphor zeigt sich nichts.

Die Intensität der Ausleuchtung ist im allgemeinen während des Anschaltens der Spannung groß, fällt aber dann äußerst schnell auf die Helligkeit des abklingenden Phosphors herab. Schaltet man, wenn letzteres eingetreten, das Feld ab, wartet einige Sekunden und legt dann wieder dieselbe Spannung an, so erhält man eine Wiederholung der Ausleuchtung in geringerer Lichtstärke als vorher. Läßt man das Feld jedesmal nur für Bruchteile von Sekunden angeschaltet, so kann man die Ausleuchtung ohne erneute Erregung mehrfach nacheinander in immer geringer werdender Lichtstärke beobachten, bis sie vollkommen durch die Feldwirkung verschwunden ist. In dieser Weise haben die Herren Gudden und Pohl die Ausleuchtung der Phosphoreszenz durch elektrische Felder zum erstenmal beobachtet. Ich verweise, da ich aus meinen Versuchen nichts wesentlich Neues über den Verlauf dieser Erscheinung hinzufügen kann, auf die Tabellen und die Figur in der Untersuchung der genannten Herren.[1])

Die Ausleuchtung läßt sich außer durch mehrmaliges An- und Abschalten der Spannung auch durch ein längere Zeit konstant wirkendes Feld vollständig zum Verschwinden bringen. Man bemerkt dann kein Aufleuchten mehr, wenn der Phosphor nach dem Abschalten der Spannung im Dunkeln sich selbst überlassen bleibt und nach einer gewissen Zeit wieder dasselbe Feld angelegt wird. Die Ausleuchtung tritt aber sofort wieder auf, wenn ein höheres Feld angeschaltet wird.[2]) Im Gegensatz hierzu haben die Herren Gudden und Pohl bei einem Phosphor unbekannter Zusammensetzung die Ausleuchtung, wenn sie einmal durch die Wirkung eines Feldes verschwunden war, beim gleichen Feld durch Dunkelpausen wiedererhalten können.[3]) Leider gelang es mir an den in der Tabelle 1 genannten Phosphoren nicht, diese Erscheinung zu beobachten, obwohl ich unter möglichster Veränderung der Feldstärken

1) B. Gudden und R. Pohl, a. a. O. S. 193—195.
2) Siehe hierzu auch B. Gudden und R. Pohl, a. a. O. Tab. 1 und 2.
3) B. Gudden und R. Pohl, a. a. O. Tab. 3.

und der Dauer der Dunkelpausen bei jedem einzelnen Phosphor danach gesucht habe.

2. *Läßt man einen Phosphor unter der Wirkung eines elektrischen Feldes längere Zeit abklingen und nimmt dann das Feld weg, so tritt eine dauernde Ausleuchtung des Phosphors ein.*

Man kann diese Ausleuchtung deutlich beobachten, wenn man den Phosphor unter der Wirkung eines elektrischen Feldes so lange abklingen läßt, bis keine Spur eines Leuchtens mehr sichtbar ist, und dann das Feld abschaltet. Die Helligkeit der dabei auftretenden Ausleuchtung ist sehr schwach, die Ausleuchtung an sich aber von langer Dauer. Diese Ausleuchtung zeigten mehr oder minder gut alle untersuchten Phosphore. Bei dem Phosphor Nr. 2 der Tabelle 1 war die Ausleuchtung, nachdem der Phosphor nach voller Erregung 24 Stunden lang unter der Wirkung eines Feldes von 20 000 Volt/cm im Dunkeln sich selbst überlassen war, beim Abschalten des Feldes noch gut sichtbar.

3. *Hat man die Ausleuchtung eines Phosphors durch die Feldwirkung einmal zum Verschwinden gebracht, so kann man sie durch Umkehr der Feldrichtung sofort wiedererhalten.*

Tabelle 2.

Bezeichnung des Phosphors	Feldstärke Volt/cm	Zeit d. Beginn. der Beobacht. nach Schluß voller Erreg. Sek.	Beobachtung. beim Anlegen des Feldes jeweils für den Bruchteil einer Sek. Zeit zwischen den Einzelbeobachtungen etwa 10 Sek.	Feldrichtung
Nr. 2. ZnSMnLiMg	20 000	60	*h m m s s* 0	+
			m m s s 0	—
			m s 0	+
			s 0	—
Nr. 4. ZnSMnCaK	14 000	85	*h m m s* 0	+
			m m s 0	—
			m s 0	+
			s 0	—

Es bedeuten *h* = helles, *m* = mäßiges, *s* = schwaches und 0 = kein Aufleuchten des Phosphors.

Die Tabelle 2 zeigt die Ausführung einiger Versuche zur Feststellung dieser Erscheinung, die sich bei allen Phosphoren der Tabelle 1 gezeigt hatte. Der Gang eines solchen Versuches

ist der folgende: Der Phosphor wird voll erregt und einige Zeit im Dunkeln abklingen lassen. Sodann wird für den Bruchteil einer Sekunde ein Feld angelegt. Man beobachtet dabei ein Aufleuchten des Phosphors. Das kurzdauernde Anlegen der gleichen Spannung wird von zehn zu zehn Sekunden fortgesetzt, bis kein Aufleuchten des Phosphors mehr sichtbar ist.[1]) Wird aber jetzt die Richtung des Feldes umgekehrt, was in der Tabelle 2 durch ein + oder —-Zeichen angedeutet ist, so wird sofort ein neues kräftiges Aufleuchten des Phosphors eintreten. Der ganze Versuch läßt sich mehrmals ohne neue Erregung des Phosphors wiederholen (vgl. Tabelle 2). Die Lichtstärke der Ausleuchtung nimmt dabei von einer Beobachtungsreihe zur anderen ab, wie es in der Tabelle 2 schön zu sehen ist, bis schließlich die Ausleuchtung vollständig verschwunden ist. Daß man die Phosphore durch fortgesetztes Wechseln der Feldrichtung unter Anwendung von höheren Feldern, als in dieser Untersuchung geschehen, vollkommen wie durch Erwärmen oder durch Licht ausleuchten kann, halte ich für wahrscheinlich.

4. *Die Helligkeit der Ausleuchtung eines Phosphors durch ein elektrisches Feld zu einer bestimmten Zeit nach der Erregung wächst mit steigender Feldstärke.*

Tabelle 3.

Phosphor	Feldstärke Volt/cm	Zeit d. Beobachtung nach Schluß voller Erregung	Art der Ausleuchtung	Intensität des Aufleuchtens beim Anlegen der Spannung geschätzt
ZnSMnLiMg Nr. 2	20 000	15 Minuten	Dauernd. Ausl.	sehr hell
	16 000	„	„	hell
	10 000	„	„	mäßig
	6 000	„	„	schwach
	4 000	„	„	sehr schwach
	2 000	„	„	eben noch sichtbar

Läßt man einen Phosphor nach voller Erregung eine bestimmte Zeitlang abklingen und legt dann ein Feld von geringer Stärke an, so sieht man den Phosphor schwach aufleuchten.

1) Man kann auch den Phosphor durch ein konstant wirkendes Feld ausleuchten und dann die Feldrichtung umkehren.

Schaltet man darauf nach erneuter voller Erregung des Phosphors zu derselben Abklingungszeit eine wesentlich höhere Spannung an, so beobachtet man auch ein lichtstärkeres Aufleuchten des Phosphors. Die Tabelle 3 zeigt dieses Ergebnis für den Phosphor Nr. 2 der Tabelle 1. Bei dieser Versuchsreihe ist erst 15 Minuten nach Schluß voller Erregung beobachtet worden, um auch bei den kleinen Feldstärken die geringen Intensitäten der Ausleuchtung ohne Störung durch die Helligkeit des abklingenden Phosphors einwandfrei feststellen zu können. Wichtig ist in der Beobachtungsreihe der Tabelle 3 auch das Ergebnis, daß die Ausleuchtung überall bis zu den kleinsten Feldstärken herab eine dauernde ist.[1])

Durch die Tatsache, daß die Helligkeit der Ausleuchtung mit der Feldstärke wächst, läßt sich auch die Erscheinung erklären, daß kurze Zeit nach der Erregung bei kleinen Feldstärken (z. B. 4000 Volt/cm) die Ausleuchtung nicht sichtbar ist, während sie bei höheren Feldstärken (z. B. 20 000 Volt/cm) deutlich auftritt. Man muß dabei berücksichtigen, daß die Ausleuchtung stets als eine Zunahme der Helligkeit des abklingenden Phosphors beobachtet wird. Fällt nun erstere unter die Unterschiedsschwelle der gerade herrschenden Phosphoreszenzhelligkeit, was kurze Zeit nach der Erregung bei kleinen Feldstärken der Fall ist, so ist sie nicht sichtbar. Bei höheren Feldern aber wird durch das Anwachsen der Helligkeit der Ausleuchtung die Unterschiedsschwelle überschritten und die Ausleuchtung wird wahrnehmbar. Auf diese Weise kann für jede Feldstärke eine gewisse Abklingungsdauer des Phosphors angegeben werden, nach deren Ablauf die Ausleuchtung beim Anschalten der Spannung eben sichtbar ist.

---

[1]) Die Herren Gudden und Pohl beobachteten in ihrer Untersuchung (Ztschr. f. Phys. 2. S. 195. 1920) bei einem Zinkmanganphosphor eine aufblitzende Ausleuchtung in einem gewissen Bereiche kleiner Feldstärken, während eine dauernde Ausleuchtung erst bei höheren Feldstärken (z. B. 16 000 Volt/cm) auftrat. Dem kann vollkommen zugestimmt werden, wenn man kurze Zeit nach Schluß der Erregung beobachtet, wie es die Herren Gudden und Pohl getan haben, denn dann sinkt die Helligkeit der Ausleuchtung bei kleinen Feldstärken unmeßbar schnell auf die vergleichsweise große Lichtstärke des abklingenden Phosphors herab. Läßt man aber den Phosphor vor der Beobachtung längere Zeit abklingen, so kann man auch bei kleinen Feldstärken eine zeitlich andauernde Ausleuchtung wahrnehmen.

Tabelle 4.

Phosphor	Feldstärke Volt/cm	Zeit nach Schluß voller Erregung, bei der die Ausleuchtung eben bemerkt wurde
ZnSMnNa Nr. 1	8 000	sofort
	6 000	etwa 15 Sek.
	4 000	„ 60 Sek.
	3 000	„ 30 Min. 20 Sek.
	2 800	„ 6 Min. 20 Sek.
ZnSCuNaMg Nr. 7	20 000	sofort
	15 000	etwa 10 Sek.
	6 000	„ 52 Sek.
	2 400	„ 1 Min. 45 Sek.

In der Tabelle 4 ist dies beispielsweise an zwei Phosphoren ausgeführt worden. Man sieht, daß bei hohen Feldstärken die Ausleuchtung schon sofort nach der Erregung beobachtet werden konnte, während sie bei kleinen Feldstärken erst nach längerem Abklingen des Phosphors wahrnehmbar war. Man könnte geneigt sein, aus den verschiedenen Abklingungszeiten und den dazu gehörigen Feldern sich ein Urteil über den Verlauf der Abhängigkeit der Ausleuchtungsintensität von der Feldstärke zu bilden. Jedoch ist dies schwierig, da man auch eine mögliche Abhängigkeit der Lichtstärke der Ausleuchtung von der Abklingungsdauer hierbei in Rücksicht ziehen muß. Wir werden später durch unmittelbare Messung der Ausleuchtungsintensität bei verschiedenen Feldstärken auf einfachere Weise zum Ziele kommen.

Wie aus der Tabelle 1 zu ersehen ist, scheint die Ausleuchtung erst bei einer gewissen und für jeden einzelnen Phosphor eigentümlichen Feldstärke (Schwellenwert) einzusetzen.[1]) Ihre Ermittelung ist natürlich bei subjektiver Beobachtung wegen des Herabsinkens der Ausleuchtungsintensität unter die Reizschwelle des Auges recht unsicher. Aus diesem Grunde ist

1) In der Tabelle 1 ist bei den Phosphoren Nr. 8 und Nr. 10 nur ein Feldstärkenwert eingetragen. Dies soll nun nicht etwa heißen, daß die Ausleuchtung einzig und allein bei diesem Felde auftritt, sondern bedeutet, daß zwecks Beobachtung der Ausleuchtung nur diese eine Feldstärke und keine andere benutzt wurde, da es lediglich darauf ankam, das Vorhandensein einer Ausleuchtung bei diesen Phosphoren festzustellen.

hier auch davon abgesehen worden, die verschiedene Größe des Schwellenwertes bei den einzelnen Phosphoren (vgl. die Tabelle 1) mit ihren Eigenschaften in Zusammenhang zu bringen.

B. Über die Einwirkung elektrischer Felder auf die Erregung der Phosphore.

1. *Wird ein Phosphor in einem elektrischen Felde erregt und nach Beendigung der Erregung während der Abklingung das Feld aufgehoben, so tritt ein kurzdauerndes Aufleuchten ein.*

Die Tabelle 5 gibt die erste Auffindung dieser Erscheinung an drei Phosphoren wieder. Die Phosphore wurden unter

Tabelle 5.

Phosphor	Feld während der Erregung Volt/cm	Dauer der Abklingung unter Feld bis zum Abschalten der Spannung	Helligkeit und Dauer des Aufleuchtens
ZnSMnNa Nr. 1	22 000	18 Sek.	sehr hell, kurze Dauer
ZnSMnLiMg Nr. 2	20 000	180 „	hell, kurze Dauer
ZnSCuNaMgCa Nr. 8	22 000	500 „	hell, kurze Dauer

einem gewissen hohen Felde (zweite senkrechte Reihe der Tabelle 5) dieselbe Zeit lang erregt, die sie bei den früheren Versuchen zu ihrer vollen Erregung nötig hatten. Nach Beendigung der Erregung klangen die Phosphore unter der Feldwirkung noch eine bestimmte Zeit lang (dritte senkrechte Reihe der Tabelle 5) ab. Alsdann wurde das Feld abgeschaltet und das dabei eintretende Aufleuchten beobachtet.

Wird bei derartigen Versuchen das gleiche Feld sofort wieder angeschaltet, so tritt beim Anlegen der Spannung kein erneutes Aufleuchten des Phosphors ein, wird aber das Feld um 180° gedreht, so erfolgt ein neues kräftiges Aufblitzen des Phosphors.

Statt die Kämme der Zelle nach Fortnahme der Spannung zu isolieren, kann man sie auch erden. Im ersteren Falle ist die Helligkeit des ersten Aufblitzens geringer und die Dauer der Ausleuchtung größer, als im zweiten Falle.

Vergleicht man das Aufleuchten nach einer Erregung im elektrischen Felde mit der bis jetzt ausführlich beschriebenen

Ausleuchtung beim Anlegen eines Feldes während der Abklingung unter den gleichen Versuchsbedingungen, so kann man die folgenden bemerkenswerten Unterschiede zwischen beiden feststellen.

a) Die Dauer des Aufleuchtens bei Wegnahme der Spannung nach einer Erregung im elektrischen Felde ist in der Regel größer, als die Dauer der Ausleuchtung beim Anlegen desselben Feldes während der Abklingung des Phosphors.

b) Das Aufleuchten nach einer Felderregung nimmt mit wachsender Dauer der Abklingung an Helligkeit viel langsamer ab, als die Ausleuchtung, die beim Anschalten eines Feldes während der Abklingung auftritt.

Besonders die letztere Erscheinung ist sehr auffallend. Man kann die Phosphore tagelang nach einer Erregung im elektrischen Felde unter dauernder Wirkung des Feldes stehen lassen und erhält dann bei Wegnahme der Spannung ein kräftiges Aufleuchten des Phosphors.

Bemerkenswert ist auch die Tatsache, daß die Phosphore während einer Erregung in einem elektrischen Felde zuweilen merklich heller leuchten, als während einer gewöhnlichen Erregung. Man kann sich davon leicht in der Weise überzeugen, daß man zwei Zellen mit demselben Phosphor angefüllt, von denen eine unter hoher Spannung liegt, gleichzeitig mit der ultravioletten Hg-Linie 365 $\mu\mu$ bestrahlt und das Leuchten der Phosphore beobachtet.

2. *Die Helligkeit des Aufleuchtens beim Abschalten eines Feldes, das während der Erregung auf den Phosphor wirkte, wächst mit steigender Feldstärke.*

Diese Erscheinung ist leicht zu beobachten, wenn man zwei mit dem gleichen Phosphor gefüllte Zellen nebeneinander unter möglichst verschiedenen Feldern auf gleiche Weise erregt und beliebige Zeit nach Schluß der Erregung gleichzeitig die Felder abschaltet. Man sieht dann den Phosphor, der sich während der Erregung in dem höheren Felde befand, heller aufleuchten, als den anderen.

Ebenso wie bei Untersuchung der Ausleuchtung eines Phosphors, die beim Anschalten eines Feldes während seiner Abklingung auftritt, findet man auch hier eine untere Grenze

der Wirksamkeit der Felder, nur liegt diese für dieselben Phosphore bei kleineren Feldstärken, als der früher behandelte Schwellenwert der Ausleuchtung. Die Tabelle 6 soll dieses Ergebnis an zwei Beispielen erläutern.

Tabelle 6.

Phosphor	Dauer der Abklingung bis zum An- oder Abschalten der Spannung		Schwellenwert d. Ausleuchtung beim Anschalten des Feldes während der Abklingung	Schwellenwert d. Ausleuchtung beim Abschalten des Feldes nach einer Erregung im Feld
	Min.	Sek.	Volt/cm	Volt/cm
ZnSMnNa Nr. 1	4′	30″	2800	1400
ZnSMnCaK Nr. 3	5′	0″	3400	2000

2. Teil. Quantitative Beobachtung der Ausleuchtung von Phosphoren durch elektrische Felder.

Das Beobachtungsverfahren.

Die im ersten Teil dieser Untersuchung unternommenen Versuche hatten einen allgemeinen Überblick über die zahlreich auftretenden neuen Erscheinungen bei Einwirkung eines elektrischen Feldes auf Phosphore erbracht. In dem vorliegenden zweiten Teil soll der Verlauf dieser Erscheinungen auch zahlenmäßig mit Hilfe eines Photometers festgelegt werden. Die dazu verwandte Versuchsanordnung ist in der Fig. 1 gezeichnet. In der Mitte der Abbildung bemerkt man das schon im ersten Teil beschriebene Versuchungsgefäß G mit der darinliegenden Zelle Z, darunter die Hochspannungsbatterie mit den Widerständen Ω_1 und Ω_2, dem Voltmesser V_2 und der Wippe Wi. Links oben ist die Quecksilberlampe mit dem Widerstande Ω_4, dem Webermesser Wi und dem Voltmesser V_1 gezeichnet. Im Strahlengange der Hg-Lampe liegen die Farbfilter F_1, die Linse L_4 und der Spiegel S_1, der die Strahlen der Lampe auf die Zelle Z wirft.

Auf der rechten Seite der Fig. 1 ist bis zur Mitte reichend die Photometereinrichtung gezeichnet. Man bemerkt, daß das Photometer so gebaut war, daß es ohne Änderung der beschriebenen Anordnung zwischen dem Spiegel S_1 und dem Versuchsgefäß G eingefügt werden konnte. Wegen der geringen

Helligkeit der zu beobachtenden Leuchterscheinungen mußte der Lichtweg vom Phosphor zum Auge des Beobachters möglichst klein gehalten werden. Dies wurde dadurch erreicht, daß der Beobachter unmittelbar durch eine Lupe L_1 den Phosphor betrachtete, während gleichzeitig das Vergleichslicht

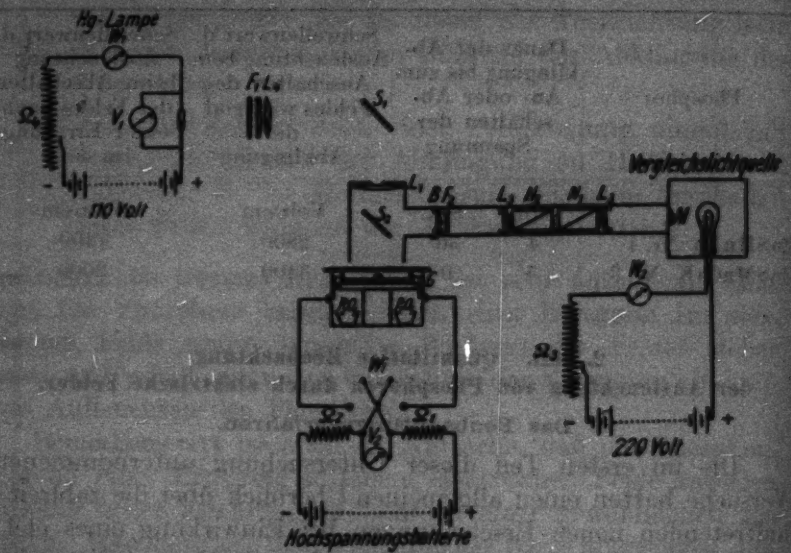


Fig. 1.

durch Spiegelung an einer sehr dünnen unter 45° geneigten ebenen Glasplatte S_2 aus einem seitlich angebrachten Arm des Photometers in sein Auge gelangte. Dieser Arm enthielt die gesamte, zur meßbaren Abschwächung des Vergleichslichtes notwendige Einrichtung.

Als Vergleichslichtquelle diente eine 50kerzige Radiumglühlampe. Sie befand sich in einem lichtdicht verschlossenen Kasten und beleuchtete eine kleine kreisrunde und mit einer Mattscheibe verschlossene Öffnung M des Kastens. Die Strahlen, die von dieser Öffnung ausgingen, wurden durch die Linse L_2 parallel gemacht, durchsetzten zwei Nicolsche Prismen N_1 und N_2 und wurden durch eine Linse L_3 auf eine Mattscheibe B geworfen. Letztere war kreisförmig abgeblendet und mit einem schwarzen Papierstreifen von genau 0,5 mm Breite längs eines Durchmessers beklebt. Ihre, dem Beobachter zugewandte

beleuchtete Fläche hatte die in der Fig. 2 gezeichnete Gestalt. Diese Fläche fiel an der Glasplatte S_2 gespiegelt und durch die Lupe L_1 betrachtet, genau mit der durch die Lupe direkt beobachteten Phosphorfläche in der Zelle zusammen und zwar in der Weise, daß ein Zwischenraum der Zellenkämme — die übrigen waren bei diesen Versuchen abgeblendet — mit der Trennungsfläche der beiden Kreissegmente (Fig. 2) übereinstimmte, was sich durch Verschieben des Versuchsgefäßes G und der Mattscheibe B erreichen ließ. Dabei mußte mit peinlicher Sorgfalt darauf geachtet werden, daß die leuchtende Phosphorfläche und die Fläche des Vergleichslichtes mit scharfer Grenzlinie aneinander stießen, die durch nichts anderes als durch den Unterschied der Helligkeit bezeichnet sein durfte, denn nur so konnte beim Verschwinden der Grenzlinie mit Sicherheit auf Gleichheit der Helligkeit geschlossen werden.

Fig. 2.

Der gesamte Weg des Vergleichslichtes war nach außen volkommen durch Messingröhren von 4 cm Durchmesser abgeschlossen, die innen matt geschwärzt und, wie in der Fig. 1 zu sehen, mit mehreren kreisförmigen Blenden zwecks Herabminderung der sphärischen Aberration der Linsen und zwecks Vermeidung von störenden Reflexionen an den Wänden versehen waren. Die Messingröhren waren zum Teil ineinander gesteckt und erlaubten so eine Verschiebung der Optik bei der Einstellung des Photometers. Die Blende zwischen dem Auge des Beobachters und der Lupe L_1 hatte zur Erreichung möglichst großer Lichtstärke einen Durchmesser von 6 mm. Hierbei war vorausgesetzt worden, daß der Pupillendurchmesser des Auges mindestens dem der Blende des Photometers gleicht, was aber bei den mit dem Photometer vorgenommenen Beobachtungen insofern zutraf, als die Untersuchungen im dunklen Zimmer vorgenommen wurden und die Pupille des Auges hierbei sehr wohl einen Durchmesser von 6 mm erreichen kann.

Die meßbare Veränderung des Vergleichslichtes wurde durch die beiden Nicolschen Prismen N_1 und N_2, die um ihre Längsachse gegeneinander gedreht werden konnten, vorgenommen. Die Helligkeit der aus ihnen austretenden Lichtstrahlen ist bekanntlich dem Quadrat des Kosinus des Winkels, den die Schwingungsrichtungen des Lichtes in den beiden Polarisatoren miteinander bilden, proportional. Dieser Winkel konnte

an einer Gradeinteilung mit Noniusablesung ermittelt werden. Die höchsterreichbare Helligkeit des Vergleichslichtes war durch die Lichtstärke der Lampe bei paralleler Stellung der Nicols gegeben. Sie mußte größer oder mindestens gleich der größten Helligkeit der bei einem Phosphor auftretenden Leuchterscheinungen sein. Da von Phosphor zu Phosphor diese größte Helligkeit verschieden zu erwarten war, mußte die Lichtstärke der Vergleichslichtquelle selbst in stets genau wiederholbarer Weise verändert werden können. Dies wurde durch den veränderlichen Widerstand Ω_3 und den Webermesser W_2 im Stromkreis der Vergleichslichtquelle erreicht. Die Ausmessung der Helligkeit der Leuchterscheinungen eines Phosphors konnte nur dann sicher ausgeführt werden, wenn das Vergleichslicht von der gleichen Farbe wie das Licht der Bande des Phosphors war. Demgemäß wurden in den Strahlengang des Vergleichslichtes mehrere Farbfilter F_2 eingeschoben, die so gewählt wurden, daß sie in genügender Annäherung nur das Bandenlicht des Phosphors durchließen.

Eine Fehlerquelle bei den Messungen mit diesem Photometer konnte dadurch entstehen, daß das Vergleichslicht irgendwie durch Reflexion auf den zu untersuchenden Phosphor gelangt und hier erregend oder auslöschend wirkt. Beides wurde geprüft. Die unerregten Phosphore zeigten nach längerem Brennen der Vergleichslampe kein merkbares Leuchten; oder die Phosphore erregt zur Hälfte unter das Photometer geschoben, ergaben gleiches Leuchten zu jeder Zeit ihrer Abklingung, sowohl auf der unter dem Photometer wie auf der außerhalb des Photometers befindlichen Seite.

Es mag nicht überflüssig sein, zu bemerken, daß bei den Beobachtungen der zuweilen recht schwachen Leuchterscheinungen das Auge des Beobachters gut ausgeruht sein mußte, da bekanntlich die subjektive Stärke der Empfindung in hohem Maße von der Wirkung vorausgegangenen Lichtes abhängig ist. Es war daher ein längerer Aufenthalt des Beobachters im dunkeln Zimmer vor einer jeden Beobachtung unerläßlich. Bei manchen Messungen wurde die Vorsicht so weit getrieben, das Auge eine ganze bestimmte Zeitlang vor der Beobachtung geschlossen zu halten, um es bei Beginn der Beobachtung stets in dem gleichen Zustand für jeden Grad der Helligkeit zu haben.

Die Beobachtungsergebnisse.

A. Über die Wirkung elektrischer Felder auf das Abklingen der Phosphore.

1. *Die Intensität und die Dauer der Ausleuchtung eines Phosphors durch ein elektrisches Feld.*

Die mit der oben beschriebenen Anordnung ausgeführten Messungen sollten zuerst in einem Falle den zeitlichen Verlauf der Ausleuchtung durch ein elektrisches Feld zahlenmäßig zu fassen suchen. Benutzt wurde hierzu der Phosphor 2 der Tabelle 1. Um auch die Lichtstärke der Ausleuchtung mit der

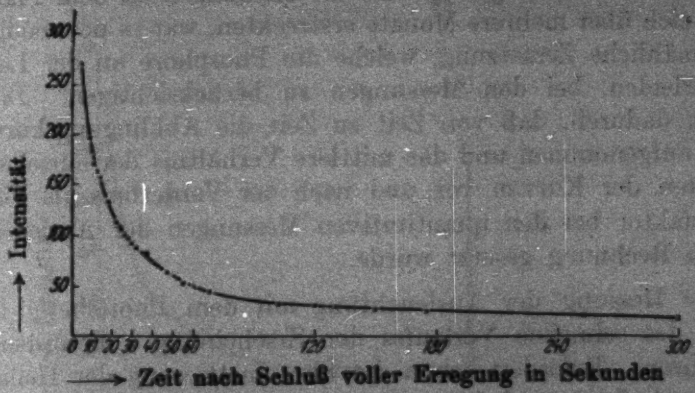


Fig. 3.

Helligkeit des Phosphors in demselben Zeitabschnitt der Abklingung vergleichen zu können, war es notwendig, die Abklingungskurve des Phosphors, d. h. die Intensität seines Leuchtens in Abhängigkeit von der Zeit nach der Erregung zu beobachten. Für jeden Punkt der Abklingungskurve wurde das Vergleichslicht des Photometers durch die beiden Nicols meßbar abgeschwächt, der Phosphor voll erregt und vermittelst einer Stoppuhr die Zeit gemessen, die nach der Erregung verfloß, bis die Helligkeit der Phosphorflächen diejenige des Vergleichslichtes erreicht hatte.[1]) Die graphische Darstellung dieser Beobachtungen gibt die Fig. 3. Die Abszissen sind die

1) Über die Ermittelung der Abklingungskurven von Phosphoren mit Hilfe von Photometern vergleiche W. Hausser, Dissertation Heidelberg, 25. Febr. 1913. Besser als die Photometer eignet sich die lichtelektrische Zelle zur Aufnahme der Abklingungskurven; vergl. P. Lenard und W. Hausser, Über das Abklingen der Phosphoreszenz. Sitzungsber. d. Heidelberger Ak. d. Wiss. Math.-Naturw. Kl. Abt. A. 1912. 2. Abh., doch war speziell für unseren Zweck das Photometer vorzuziehen.

Zeiten nach Schluß voller Erregung und die Ordinaten sind die Lichtstärken des Bandenlichtes in Relativzahlen, wie man sie durch das Quadrat des Kosinus des Winkels, den die Schwingungsrichtungen des Lichtes in den beiden Nicols miteinander bilden, erhält, wenn man die Helligkeit der Fläche des Vergleichslichts bei parallelen Nicols gleich 1000 Einheiten setzt. Um einen Überblick über die Genauigkeit der einzelnen Kurvenpunkte zu erhalten, wurde die Beobachtung jedes Punktes zehnmal wiederholt. Hierbei betrug der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung 3%. Da die Messungen an dem Phosphor 2 sich über mehrere Monate erstreckten, war es notwendig, die allmähliche Zersetzung, welche die Phosphore an der Luft stets erleiden, bei den Messungen zu berücksichtigen. Dies geschah dadurch, daß von Zeit zu Zeit die Abklingungskurve erneut aufgenommen und das mittlere Verhältnis der einzelnen Ordinaten der Kurven vor und nach der Verderbnis als Verderbnisfaktor bei den quantitativen Messungen der Ausleuchtung in Rechnung gesetzt wurde.

Die Messung der Ausleuchtung mit dem Photometer ist infolge des schnellen Verlaufes der Erscheinung außerordentlich schwer. Erfordert schon die Photometrierung der Helligkeit des Aufblitzens beim Anlegen der Spannung große Mühe und lange Übung, so ist die Erfassung der äußerst schnell sich verändernden Lichtstärke in dem weiteren Verlauf der Ausleuchtung noch schwieriger und nur durch sehr zahlreiche Beobachtungen zu erreichen. Wie der zeitliche Verlauf der Ausleuchtung aussieht, zeigt die Fig. 4. Der Abszissen- und der Ordinatenmaßstab dieser graphischen Darstellung sind die gleichen wie in der Fig. 3. Man erkennt die Abklingungskurve des Phosphors in den ersten Minuten nach Schluß voller Erregung. Nach drei Minuten Abklingung ist in dieser Beobachtungsreihe ein elektrisches Feld von 20 000 Volt/cm angelegt worden. Die Ausleuchtung beginnt, wie man in der Fig. 4 sieht, mit einem lichtstarken Aufblitzen und fällt schon innerhalb drei Sekunden auf die Helligkeit des abklingenden Phosphors zurück. In dem späteren Verlauf der Abklingung des Phosphors nach der Feldwirkung war keine meßbare Verringerung der Lichtstärke des Bandenlichtes erkennbar. (In der Fig. 4 bezeichnen die Kreuze die Abklingungskurve ohne Feldwirkung, die Kreise die Abklingungskurve nach der Feld-

wirkung.) Auch ein längeres Anschalten eines Feldes in den ersten Zeiten nach der Erregung war auf den späteren Verlauf der Abklingungskurve ohne erkennbaren Einfluß. Daraus ist zu schließen, daß insbesondere an dem hier untersuchten Phosphor nur ein geringer Bruchteil der aufgespeicherten Lichtenergie durch das elektrische Feld der gegebenen Stärke zur Ausleuchtung gelangt, der den Verlauf der Abklingung nach der Feldwirkung nicht merklich abändert. Seine zahlenmäßige Ermittelung könnte nur mit Hilfe empfindlicher Lichtsummenmessungen ausgeführt werden. Aus der Fig. 4 ersieht man

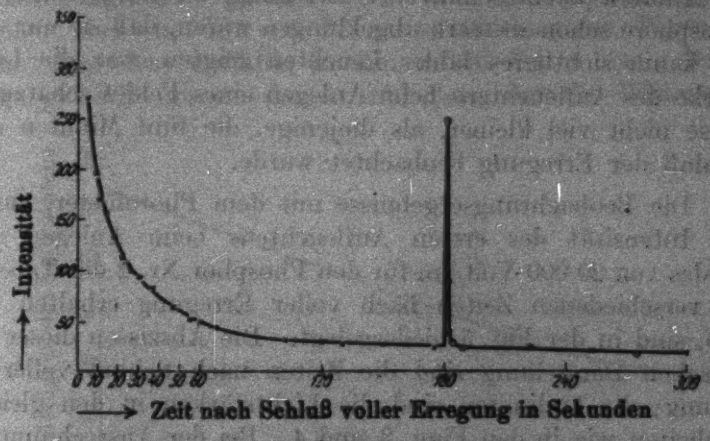


Fig. 4.

auch noch, daß das erste Aufblitzen des Phosphors beim Anlegen des Feldes in seiner Lichtstärke in hohem Maße die Helligkeit des Abklingungsleuchtens überragt; es ist etwa zehnmal so lichtstark, als letzteres.

2. *Die Intensität der Ausleuchtung zu verschiedenen Zeiten der Abklingung.*

In diesem Abschnitte werden die Beobachtungen besprochen werden, die die Helligkeit der Ausleuchtung durch ein elektrisches Feld zu verschiedenen Zeiten nach Schluß voller Erregung eines Phosphors feststellen sollten. Die Helligkeit der Ausleuchtung wird nach längerem Abklingen des Phosphors geringer sein, als kurze Zeit nach Schluß der Erregung, was sich leicht einsehen läßt, wenn man bedenkt, daß mit der Dauer der Abklingung die im Phosphor für den Eingriff des

elektrischen Feldes zur Verfügung stehende aufgespeich
Lichtenergie kleiner wird. Wichtiger als dies ist jedoch
Frage, auf welche Weise sich die Intensität der Ausleucht
mit der Abklingungszeit ändert, besonders in Beziehung z
zeitlichen Verlaufe der Helligkeit des Bandenlichtes.
hierfür in Betracht kommenden Versuche konnten natürl
nur mit Hilfe des Photometers ausgeführt werden. Nur
viel ließ sich ohne ihn feststellen, daß die Intensität der A
leuchtung zwar geringer wurde mit wachsender Zeit nach
Erregung, sich aber dabei nur äußerst langsam änderte. Sel
30 Minuten nach Schluß der Erregung, zu welcher Zeit
Phosphore schon so stark abgeklungen waren, daß sie nur n
ein kaum sichtbares fahles Leuchten zeigten, war die Lic
stärke des Aufleuchtens beim Anlegen eines Feldes schätzun
weise nicht viel kleiner, als diejenige, die fünf Minuten n
Schluß der Erregung beobachtet wurde.

Die Beobachtungsergebnisse mit dem Photometer, die
die Intensität des ersten Aufleuchtens beim Anlegen ei
Feldes von 20 000 Volt/cm für den Phosphor Nr. 2 der Tabell
zu verschiedenen Zeiten nach voller Erregung erhalten w
den, sind in der Fig. 5 niedergelegt. Die Abszissen dieser g
phischen Darstellung sind die Zeiten nach Schluß voller
regung; die Ordinaten sind die Lichtstärken in den gleich
Einheiten wie in den Figg. 3 und 4. Bei der Ausrechnung d
einzelnen Werte der Lichtstärke ist berücksichtigt worde
daß die Lichtstärke, die zu einem bestimmten Zeitpunkt na
der Erregung gemessen wurde, sich zusammensetzt aus d
gerade herrschenden Intensität des Bandenlichts und der Lich
stärke des Aufleuchtens beim Anlegen des Feldes. Unter Z
hilfenahme der Abklingungskurve der Fig. 3 sind alle kur
Zeit nach der Erregung gemessenen Werte um den Betr
der Helligkeit des Bandenlichtes gekürzt worden; nach se
langen Abklingungszeiten ist dieser Betrag, weil er äußer
klein war, vernachlässigt worden. Die Form der Kurve lä
erkennen, daß die Intensität der Ausleuchtung im großen u
ganzen geradlinig mit der Zeit nach der Erregung abfällt.

Ein Vergleich des Verlaufes dieses Intensitätsabfalles m
der Abklingungskurve des Phosphors (Fig. 3) läßt einen leh
reichen Schluß über das Verhalten der Zentren verschieden
Dauer (Größe) unter der Wirkung eines elektrischen Feld

zu. Die Form der Abklingungskurve gibt nach den Untersuchungen Hrn. Lenards[1]) über die Mengenverhältnisse der im Phosphor vorhandenen Zentren verschiedener Dauer Aufschluß. Hiernach ist die große Anfangsintensität und der schnelle erste Abfall des Nachleuchtens (siehe die Kurve der Fig. 3) den Zentren kurzer Dauer zuzuschreiben, im weiteren Verlauf der Kurve kommen dann die Zentren mittlerer und langer Dauer zur Abklingung. Würden durch die Wirkung des elektrischen Feldes alle Zentren verschiedener Dauer gleich intensiv ausgeleuchtet werden, so müßte die Kurve in der Fig. 5 der Abklingungskurve parallel verlaufen. In Wirklichkeit verlaufen aber die Kurven in ganz verschiedener Weise und zwar besonders auffällig in den ersten Zeiten nach der Erregung. Wir müssen daraus schließen, daß die Wirkung des

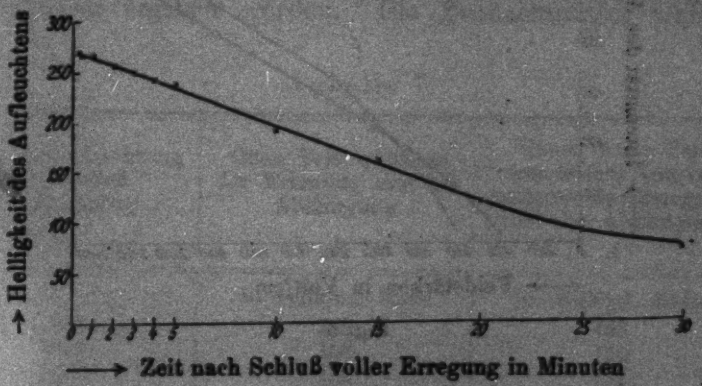


Fig. 5.

elektrischen Feldes wohl die Zentren kurzer Dauer angreift, aber sie kommen in geringerer Zahl zur Ausleuchtung, als die Zentren langer Dauer. Dieser Befund ist auch in guter Übereinstimmung mir der von den Herren Gudden und Pohl[2]) gemachten Beobachtung, daß bei einem Zinkkupferphosphor die Ausleuchtung durch ein elektrisches Feld nur bei einer Belichtung merklich ward, „die stets bis zur Erregung von Dauerzentren ausgedehnt werden mußte".

1) P. Lenard und W. Haussser, Über das Abklingen der Phosphoreszenz, a. a. O., S. 31 u. ff.

2) B. Gudden u. R. Pohl, Ztschr. f. Phys. 2. S. 193, 1920.

3. *Die Abhängigkeit der Intensität der Ausleuchtung von der Feldstärke.*

Die Abhängigkeit der Intensität der Ausleuchtung von der Feldstärke wurde für zwei Phosphore messend verfolgt. Es waren dies der Zinkmanganphosphor Nr. 2 der Tabelle 1 und der Zinkkupferphosphor Nr. 7 der Tabelle 1. Die Fig. 6 zeigt die Beobachtungsergebnisse für den Zinkmanganphosphor, die Fig. 8 für den Zinkkupferphosphor. In beiden Figuren ist die Intensität des Aufleuchtens beim Anlegen der Spannung (Ordinate) in ihrer Abhängigkeit von der Feldstärke (Abszisse)

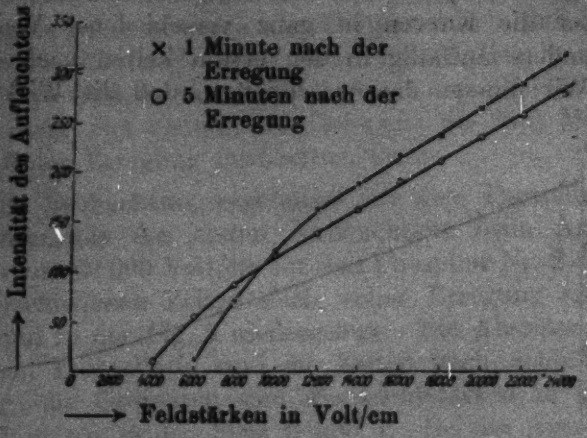


Fig. 6

in einer Minute nach Schluß voller Erregung des Phosphors aufgetragen. Aus dem Verlaufe der Kurven ersieht man, daß die Intensität des Aufleuchtens zuerst schnell und dann langsamer mit der Feldstärke wächst; bei hohen Feldstärken gehen die Kurven in gerade Linien über. Außerdem bemerkt man, daß die Ausleuchtung erst bei einer gewissen Feldstärke einsetzt, deren zahlenmäßige Bestimmung allerdings wegen des Herabsinkens der Ausleuchtungsintensität unter die Sichtbarkeitsgrenze nicht genau auszuführen war.

Für den Zinkmanganphosphor wurde noch eine Beobachtungsreihe fünf Minuten nach Schluß der Erregung ausgeführt. Sie ist in der Fig. 6 aufgezeichnet. Bemerkenswert ist nun der Befund, daß das erste Sichtbarwerden der Ausleuchtung bei der Beobachtungsreihe, die fünf Minuten nach

Schluß voller Erregung erfolgte, bei kleineren Feldstärken auftritt, als bei der Beobachtungsreihe, die eine Minute nach Schluß voller Erregung ausgeführt wurde.

B. Die Einwirkung elektrischer Felder auf die Erregung der Phosphore.

1. *Das Aufleuchten eines Phosphors beim Abschalten eines während der Erregung angelegten Feldes.*

Bevor zur Messung der Aufleuchtungsintensität geschritten wurde, sollte zuerst einmal ermittelt werden, auf welche Weise der Phosphor, nachdem er im elektrischen Felde erregt worden war, in eben diesem Felde abklingt, oder mit anderen Worten, ob sich Unterschiede zwischen der gewöhnlichen Abklingungskurve und derjenigen in einem elektrischen Felde nach einer Felderregung ergeben würden. Die Beobachtungen wurden

Tabelle 7.

Zeit der Beobachtung nach Schluß der Erregung Sek.	Ohne Feld während der Erregung und der Abklingung J	Unter einem Feld von 20 000 Volt/cm während der Erregung und der Abklingung J
	in willkürl. Maße	in willkürl. Maße
10,0	183	185
14,0	156	150
18,0	132	132
26,0	100	100
50,0	60	63
68,0	44	42
175,0	24	24

an dem Phosphor Nr. 2 der Tabelle 1 ausgeführt; die Beobachtungsergebnisse zeigt die Tabelle 7. Aus ihr ist ersichtlich, daß die Abklingung des Phosphors im elektrischen Felde bei den in dieser Untersuchung zur Verfügung stehenden Feldstärken genau so verläuft, wie ohne die Wirkung eines Feldes während der Erregung und der Abklingung.

Einen Überblick über die Art und Weise, wie das Aufleuchten eines Phosphors beim Abschalten der Spannung während der Abklingung verläuft, gibt die graphische Darstellung der Fig. 7. Man erkennt zunächst, daß das Aufleuchten des

Phosphors im Augenblicke des Abschaltens der Spannung (60 Sekunden nach der Erregung) mit großer Intensität einsetzt und sodann sehr schnell (innerhalb 6 Sekunden) auf die Helligkeit des abklingenden Phosphors abfällt. Außerdem bemerkt man, daß der Phosphor darauf in der gleichen Weise weiter abklingt, wie ohne jede Feldwirkung während der Erregung und der Abklingung.

Die Erscheinung, daß das Aufleuchten des Phosphors bei Erdung der Zelle intensiver ist, als beim bloßen Abschalten der Spannung, wie es im ersten Teile dieser Untersuchung beschrieben wurde, tritt bei den Messungen mit dem Photometer besonders deutlich hervor. Ein Beispiel soll dies zahlenmäßig

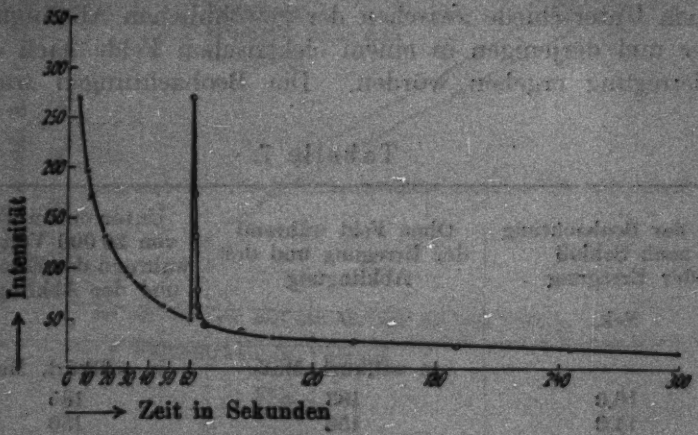


Fig. 7.

erläutern. Der Phosphor Nr. 2 der Tabelle 1 wurde in einem Felde von 20 000 Volt/cm erregt und eine Minute in diesem Feld abklingen gelassen. Sodann wurden einmal nach Fortnahme der Spannung die Zellenkämme isoliert, ein anderes Mal geerdet und in beiden Fällen die Helligkeit des Aufleuchtens mit dem Photometer gemessen. Es ergaben sich bei Erdung der Zelle 377 Einheiten und beim bloßen Abschalten des Feldes 220 Einheiten. Da auch die Dauer des Aufleuchtens bei Erdung der Zelle kürzer ist, als bei der Isolation der Zellenkämme, so ist jedenfalls die ganze Erscheinung darauf zurückzuführen, daß bei der Isolation der Zellenkämme infolge der nie vollständig zu vermeidenden Isolationsfehler das Feld langsam vom Phosphor verschwindet. Klare Verhältnisse schafft nur

das Erden der Zellenkämme, das auch stets in dieser Untersuchung nach der Fortnahme der Spannung ausgeführt wurde.

Die Helligkeit des Aufleuchtens eines Phosphors bei Erdung der Zelle nach einer Erregung und Abklingung im elektrischen Felde nimmt mit wachsender Abklingungsdauer ab, aber ungleich viel langsamer wie die Helligkeit der Ausleuchtung beim Anlegen eines Feldes während der Abklingung,

Tabelle 8.

Feldstärke Volt/cm	Zeit der Beobachtung nach Schluß d. Erregung	Intensität der Ausleucht. beim Anschalten des Feldes während der Abklingung	Intensität d. Aufleucht. bei Erdung der Zelle nach einer Erregung u. Abklingung im Feld
	Minuten	in willkürl. Maße	in willkürl. Maße
20 000	1	266	377
	10	192	330
	20	120	316
	120	0	190

wie auf S. 181 beschrieben wurde. Einen zahlenmäßigen Überblick über diese Verhältnisse gewährt die Tab. 8. Die in ihr enthaltenen Beobachtungen sind an dem Phosphor 2 der Tab. 1 ausgeführt worden; die übrigen Phosphore der Tab. 1 verhielten sich ähnlich. Während die Helligkeit der Ausleuchtung beim Anlegen eines Feldes während der Abklingung mit wachsender Abklingungsdauer verhältnismäßig schnell zur Unmerklichkeit herabsinkt, bleibt das Aufleuchten bei Erdung der Zelle noch lange bestehen. Seine Intensität ist beispielsweise bei dem Phosphor der Tab. 8 nach zwei Stunden Abklingungsdauer erst auf ungefähr die Hälfte ihres eine Minute nach Schluß der Erregung beobachteten Wertes gefallen.

Ein weiterer Unterschied zwischen den beiden Ausleuchtungsarten läßt sich in bezug auf die Intensität des Aufleuchtens feststellen. Sie ist bei Erdung der Zelle und auch beim Abschalten der Spannung nach einer Erregung und Abklingung im elektrischen Felde für jede beliebige Feldstärke stets größer, als die Helligkeit des Aufleuchtens beim Anlegen des Feldes während der Abklingung des Phosphors. Ein Beispiel dafür liefert die Fig. 8, in der für den Phosphor Nr. 7 der Tab. 1 die Intensität des Aufleuchtens bei Erdung der Zelle

nach einer Felderregung und beim Anlegen der Spannung während der Abklingung für verschiedene Feldstärken eingetragen ist.

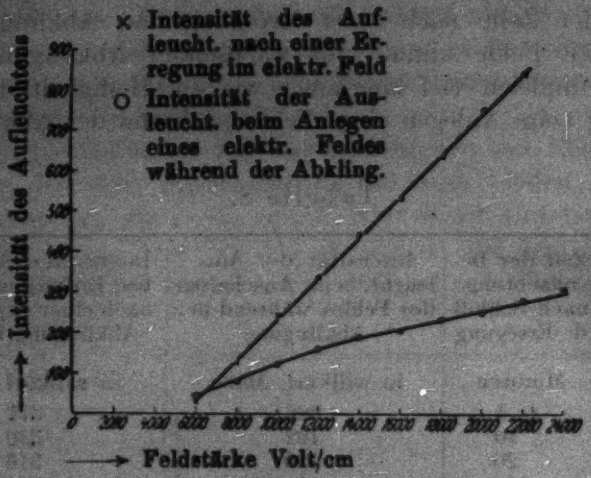


Fig. 8.

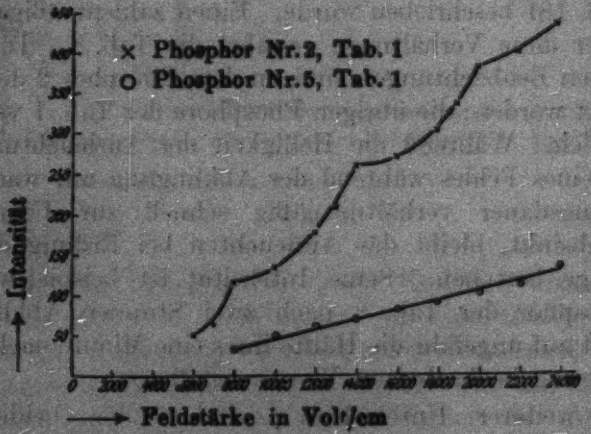


Fig. 9.

2. *Die Abhängigkeit des Aufleuchtens eines Phosphors von der Feldstärke.*

Die Abhängigkeit des Aufleuchtens bei Erdung der Zelle nach einer Erregung und Abklingung im elektrischen Felde von der Feldstärke zeigen die graphischen Darstellungen der Figg. 8 und 9. In der Fig. 8 sind die Verhältnisse nach einer

Minute Abklingung im elektrischen Felde für den Zinkkupferphosphor Nr. 7 der Tab. 1 und in der Fig. 9 für zwei Zinkmanganphosphore Nr. 2 und Nr. 5 der Tab. 1 gezeichnet. Man sieht, daß die Intensität des Aufleuchtens im allgemeinen linear mit der Feldstärke wächst. Ein besonders interessantes Verhalten zeigte aber der in der gegenwärtigen Untersuchung häufiger benutzte Zinkmanganphosphor Nr. 2. Bei ihm änderte sich die Intensität des Aufleuchtens sprungweise mit der Feldstärke. Ich werde voraussichtlich diesen bemerkenswerten Sonderfall in einer späteren Arbeit behandeln.

3. Teil: Über die Vorgänge in den Zentren der Phosphore bei Einwirkung elektrischer Felder während ihres Leuchtens.

Wie in der Einleitung zur vorliegenden Untersuchung besprochen wurde, wandern bei der Erregung eines Phosphors zu dauerndem Nachleuchten in den Zentrenmolekülen Elektronen von den Metallatomen zu gewissen Nachbaratomen und werden dort aufgespeichert. Dadurch werden die Metallatome positiv, die aufspeichernden Atome negativ geladen, das „Zentrum wird polarisiert".[1]) Bei der Abklingung kehren die aufgespeicherten Elektronen zu den Metallatomen zurück. Wird während der Abklingung ein elektrisches Feld an den Phosphor angelegt, so werden alle die Elektronen, die von den aufspeichernden Atomen in Richtung von der negativen zur positven Seite des elektrischen Feldes zu den Metallatomen zurückkehren, durch das Feld leichter von den aufspeichernden Atomstellen losgetrennt werden. Diejenigen Elektronen aber, die in der entgegengesetzten Richtung oder quer zu den Kraftlinien des Feldes verlaufen, werden länger zurückgehalten oder aus ihrer Bahn abgelenkt werden. Außerdem wird das elektrische Feld, wenn der Phosphor sich im erregten Zustand befindet, noch auf das polarisierte Atompaar, Metallatom-aufspeicherndes Atom, wirken und zwar derart, daß die aufspeichernden Atome, da sie negativ geladen sind, zur positiven Seite des Feldes sich wenden, die positiven Metallatome hingegen zur negativen Seite.[2]) Beide Vorgänge in den Zentren,

1) Vgl. P. Lenard u. Sem Saeland, Ann. d. Phys. 28. S. 477 f. 1909.

2) Das Verhalten der polarisierten Atompaare wird auch von Hrn. Lenard zur Erklärung gewisser Erscheinungen der Phosphoreszenz herangezogen. Als solche seien hier erwähnt: Die langwellige Tilgung der Phos-

die Bewegungsänderung der Elektronen und die Drehung der polarisierten Atompaare, müssen bei der Deutung der Leuchterscheinungen, die bei Einwirkung eines elektrischen Feldes auf die Phosphore eintreten, herangezogen werden. Die Berücksichtigung der Bewegungsänderung der Elektronen für sich allein genügt hierzu nicht, wie eine kurze Überlegung zeigen soll. Denkt man sich die polarisierten Atompaare unbeweglich in den Zentren, so kann man annehmen, daß bei der praktisch unendlich großen Zahl der Zentrenmoleküle im Phosphor die polarisierten Paare alle möglichen Lagen zu den Kraftlinien des elektrischen Feldes einnehmen. Überlegt man weiter, daß für die Intensität des Phosphoreszenzlichtes in irgendeinem Zeitpunkte der Abklingung des Phosphors die sekundliche Zahl der zu den Metallatomen zurückkehrenden Elektronen maßgebend ist, so wird durch ein in diesem Zeitpunkte angelegtes elektrisches Feld diese Zahl infolge der leichteren Lostrennung der Elektronen in der einen Feldrichtung vermehrt, in der anderen jedoch infolge des Zurückhaltens der Elektronen um gleichviel vermindert werden müssen; es dürfte kein Aufleuchten des Phosphors erfolgen.

Mit Hilfe der soeben aufgestellten Grundannahmen, der Bewegungsänderung der Elektronen und der Drehung der polarisierten Atompaare, lassen sich alle in dieser Untersuchung erhaltenen Beobachtungsergebnisse anschaulich erklären. Beginnen wir zunächst mit der Deutung der Versuche über die Ausleuchtung durch ein elektrisches Feld während der Abklingung eines Phosphors. Im Augenblicke des Anschaltens der Spannung wird sofort die Drehung der polarisierten Paare in den Zentren einsetzen.[1]) Dabei werden sie mit den Atomen

---

phoreszenz und die Ausleuchtung der Hitzebanden, die beide nach der Annahme Hrn. Lenards (Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht. III. Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. Math.-Naturw. Kl. Abt. A. 1918. 8. Abh. S. 68 f.) durch die Resonanz der polarisierten Paare besorgt werden.

1) Man könnte auch daran denken, daß außer den polarisierten Paaren noch andere irgendwie geladene Atome im Zentrum bei der Einwirkung eines elektrischen Feldes wandern werden. Bei der Betrachtung der Versuche über die Wirkung der elektrischen Felder während der Erregung der Phosphore werden auch diese Atome mit berücksichtigt werden, da man über ihr Vorhandensein und über ihr Verhalten während des Erregungsvorganges aus anderen Phosphoreszenzuntersuchungen genaue Kenntnis besitzt.

in den Zentren öfters zur Nähewirkung kommen, als dies bei der Einwirkung der Wärmebewegung allein geschieht. Infolgedessen werden mehr Elektronen als gewöhnlich von den aufspeichernden Atomen abgetrennt werden und bei ihrer Rückkehr zu den Metallatomen die erhöhte Lichtemission hervorrufen (vgl. S. 167 u. 179). Die Zahl der sich richtenden polarisierten Paare im Phosphor ist beim Anschalten des Feldes sehr groß, daher das helle Aufblitzen des Phosphors (vgl. S. 180 und Fig. 4). Die auf das Aufblitzen folgende Ausleuchtung wird so lange dauern, bis alle entgegengesetzt geladenen Atompaare ihre neue Lage in dem Felde eingenommen haben. Daß sie hierzu Zeit und zwar ziemlich lange Zeit, wie die Versuche zeigen, brauchen, ist nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, daß sie an ihrer Drehung durch die übrigen Atome des Zentrums gehindert werden. Läßt man das elektrische Feld lange Zeit konstant auf den Phosphor wirken, so verschwindet, wie die Versuche auf S. 168 zeigen, die Ausleuchtung für dieses Feld vollkommen, selbst bei langen Dunkelpausen zwischen Abschalten und erneutem Anschalten der Spannung. Daraus ist zu schließen, daß die polarisierten Paare sich im allgemeinen nur äußerst langsam in ihre ungeordneten Lagen zurückbegeben. In besonderen Fällen, vielleicht bei Phosphoren mit relativ einfachem Aufbau der Zentren, scheint die Rückdrehung der polarisierten Paare auch schneller erfolgen zu können, wie der auf S. 168 erwähnte Versuch der Herren Gudden und Pohl gezeigt hat, bei dem sie das Aufleuchten des Phosphors durch Dunkelpausen wiedererhalten konnten, wenn es schon einmal durch die Feldwirkung verschwunden war. Schaltet man das elektrische Feld noch während einer Ausleuchtung ab, d. h. wenn noch nicht alle polarisierten Paare ihre neuen Lagen im Felde eingenommen haben und legt dann wiederum nach einer kurzen Pause das gleiche Feld an, so erfolgt ein weiteres Richten der Atompaare und mit ihm ein erneutes Aufleuchten des Phosphors (vgl. hierzu B. Gudden und R. Pohl, Zeitschrift für Physik. **2**. S. 193 u. f. 1920. Tab. 1—3). Sind alle polarisierten Atompaare in einem Felde bestimmter Größe so weit gedreht, als es unter Wirkung dieses Feldes möglich ist, so werden sie bei einer Erhöhung des Feldes sofort weiter gedreht werden, und ein neues Aufleuchten des Phosphors wird die Folge sein, wie die oben erwähnten Ver-

suche der Herren Gudden und Pohl gezeigt haben. Ist die Ausleuchtung in der einen Feldrichtung vollständig verschwunden, sind also alle polarisierten Paare im Felde geordnet, so werden bei Drehung des Feldes um 180° die Atompaare sich in die neue Feldrichtung einzustellen suchen. Bei dieser Drehung haben dann die Paare wieder häufiger Gelegenheit, mit den übrigen Atomen in den Zentren zur Nähewirkung zu kommen und ein Aufleuchten des Phosphors wird die Folge sein (vgl. hierzu die Versuche auf S. 169 u. 170, und Tab. 2).

Die im elektrischen Felde sich richtenden polarisierten Atompaare werden bestrebt sein, solche Lagen einzunehmen, bei denen die von den aufspeichernden Atomen zu den Metallatomen zurückkehrenden Elektronen verzögert werden. Die Elektronen werden daher länger als gewöhnlich an den aufspeichernden Atomen haften. Bei Wegnahme des Feldes aber werden sie wieder in gewohnter Weise zurückkehren und dabei ein Aufleuchten des Phosphors hervorrufen (vgl. S. 169). Durch diese Vorstellung erklären sich die geringe Lichtstärke der Ausleuchtung bei vorausgegangener langer Abklingungszeit unter Feld und besonders die lange Dauer der Ausleuchtung.

In weiterer Verfolgung unserer Grundannahmen werden wir schließen müssen, daß die Intensität und die Dauer der Ausleuchtung durch ein elektrisches Feld von der Anzahl der Atome im Zentrum[1]), von der Zentrengröße, abhängen wird. Je weniger Atome im Zentrum vorhanden sind, je kleiner also das Zentrum ist (Zentrum von kurzer Dauer), desto schneller erfolgt die Drehung des polarisierten Paares, weil nur wenig Hinderung durch die geringe Zahl der übrigen Atome vorhanden ist, und desto kürzer ist die Dauer der ausleuchtenden Wirkung des Feldes. Die Intensität der Ausleuchtung wird klein sein bei den Zentren kurzer Dauer, weil das polarisierte Paar nur geringe Möglichkeit hat, mit den wenigen Atomen im Zentrum zur Nähewirkung zu kommen, sie wird groß sein, wenn viel Atome im Zentrum vorhanden sind (Zentren langer Dauer). Alles in allem kann man sagen, daß die Zentren langer Dauer im elektrischen Feld eine lichtstärkere und dauerndere Ausleuchtung zeigen werden, als die Zentren kurzer Dauer, was

1) Über die Anzahl der Atome in den Zentren verschiedener Dauer gibt die Tabelle XI in P. Lenard, Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht. IV. a. a. O., S. 13 Auskunft.

sich insbesondere mit Bezug auf die Intensität der Ausleuchtung durch die Versuche auf S. 188 in quantitativer Weise bestätigt hat.

Ganz allgemein ist das Anwachsen der Intensität der Ausleuchtung mit größer werdendem elektrischen Feld (vgl. S. 184 und Fig. 6) gemäß den bisher entwickelten Vorstellungen so zu deuten, daß die polarisierten Atompaare bei hohen Feldern eine größere Drehung erfahren, als bei kleinen Feldstärken und auf diese Weise der Nähewirkung mit den übrigen Atomen des Zentrums in verstärktem Maße unterworfen sind. Aus dem Verlaufe der Kurven in der Fig. 6 lassen sich aber noch weitere Einzelheiten über die Vorgänge im Inneren eines Phosphors bei der Ausleuchtung durch ein elektrisches Feld herausholen. Die Kurven sind zu verschiedenen Abklingungszeiten aufgenommen worden. Sie unterscheiden sich in der Zahl der zur Ausleuchtung durch ein elektrisches Feld zur Verfügung stehenden polarisierten Zentren. So sind bei der einen Beobachtungsreihe, die eine Minute nach Schluß voller Erregung aufgenommen wurde, mehr polarisierte Zentren im Phosphor vorhanden, als bei der anderen, die fünf Minuten nach der Erregung ausgeführt wurde. In beiden Beobachtungsreihen zeigt sich anfangs bei kleinen Feldern ein stärkeres Anwachsen der Ausleuchtungsintensität, als später bei höheren Feldstärken. Zur Erklärung dieser Tatsache wollen wir annehmen, daß bei kleinen Feldern nur die polarisierten Atompaare in den Zentren gedreht werden, bei höheren Feldern jedoch die Zentren zusammen mit den polarisierten Atompaaren eine Drehung erfahren. Die Zentren drehen sich dabei in der gleichen Richtung wie die polarisierten Paare. Hierdurch haben die Atompaare in den Zentren weniger Möglichkeit, zur Nähewirkung zu kommen. Infolgedessen wird die Intensität der Ausleuchtung bei hohen Feldstärken geringer sein, als bei kleinen, die Kurven steigen langsamer mit wachsender Feldstärke an. Bei kleinen Feldstärken erfolgt keine Drehung der polarisierten Zentren, weil, wie wir annehmen, sie sich gegenseitig durch die weit über das Zentrum hinausgreifenden Kraftfelder der polarisierten Paare daran hindern.[1]) Wird aber die Zahl der

1) Dies ist in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Untersuchungen Hrn. Lenards über die auslöschende Absorption der Phosphore. (P. Lenard, Lichtabsorption und Energieverhältnisse bei der Phospho-

polarisierten Zentren im Phosphor verringert, was nach längeren Abklingungszeiten der Fall ist, so wächst der mittlere Abstand der polarisierten Zentren und die Kraftwirkungen aufeinander werden geringer. Demzufolge wird schon ein kleineres Feld genügen, diese Kräfte zu überwinden und eine Drehung des Zentrums veranlassen. In den Kurven der Fig. 6 ist dies dadurch ausgeprägt, daß nach fünf Minuten Abklingungszeit der Übergang in den sanft ansteigenden Verlauf bei kleineren Feldstärken einsetzt, als nach einer Minute Abklingung. Daß das erste Sichtbarwerden der Ausleuchtung bei Gegenwart von viel polarisierten Zentren im Phosphor bei höheren Feldstärken einsetzt, als wenn nur wenig polarisierte Zentren im Phosphor enthalten sind, läßt schließen, daß auch das polarisierte Paar eines jeden Zentrums von den übrigen polarisierten Zentren an seiner Drehung gehindert wird.

Zusammenfassend kann die ausleuchtende Wirkung der elektrischen Felder während der Abklingung eines Phosphors so gedeutet werden, daß sie eine durch die Drehung der polarisierten Atompaare für sich allein oder in Verbindung mit einer Drehung des gesamten Zentrums beschleunigte Abklingung sei.

Läßt man das elektrische Feld schon während der Erregung auf den Phosphor wirken, so wird die Erklärung der Vorgänge in den Zentren bedeutend verwickelter. Man muß sich hier zunächst im einzelnen klar machen, welche Vorgänge unter der beiderseitigen Wirkung der Strahlung und des elektrischen Feldes in den Zentren überhaupt möglich sind.

Fällt erregendes Licht auf einen in einem elektrischen Felde befindlichen Phosphor, so werden aus den Metallatomen durch lichtelektrische Wirkung Elektronen befreit werden und zu den aufspeichernden Atomen wandern. Sowie die Elektronen an die aufspeichernden Atomstellen gelangen, wird die Drehung der polarisierten Paare einsetzen. Bei weiterer Einwirkung der erregenden Strahlung werden immer

---

reszenz. Sitzungsber. d. Heidelberger Ak. d. Wiss. Math.-Naturw. Kl. Abt. A. 1914. 13. Abh. S. 44 u. 45). Hr. Lenard findet, daß die bei der Absorption wirksamen Querschnitte der Zentren sehr viel mal größer sind als die Querschnitte einzelner Atome und daß außerdem benachbarte Zentren sich einander in der Absorption stören, woraus geschlossen wird, daß die die auslöschende Absorption bewirkenden elektrischen Felder der polarisierten Paare weit über dieselben hinausgreifen.

mehr Elektronen von den Metallatomen befreit werden und die Drehung der polarisierten Atompaare wird wachsen, bis ein gewisser Endzustand erreicht ist, der durch die für das betreffende phosphoreszenzfähige Metallatom eigentümliche Anzahl abtrennbarer Elektronen gegeben ist. Durch die während der Erregung erfolgende Drehung der polarisierten Atompaare ist den aufspeichernden Atomen Gelegenheit geboten, häufiger als gewöhnlich mit den übrigen Atomen zur Nähewirkung zu kommen und Elektronen zur Rückkehr zu den Metallatomen zu bringen. Darauf ist vielleicht zum Teil das stärkere Leuchten des Phosphors während einer Erregung im elektrischen Felde zurückzuführen (vgl. S. 174). Dadurch, daß bei der Drehung der polarisierten Atompaare die aufspeichernden Atome sich zur positiven Seite, die Metallatome zur negativen Seite des Feldes wenden, kommen die Metallatome in Lagen, in denen die lichtelektrische Abtrennung der Elektronen durch das äußere Feld beschleunigt werden muß. Infolgedessen könnte es möglich sein, daß durch eine Erregung in einem elektrischen Felde mehr Elektronen von den Metallatomen abgetrennt werden, als bei einer Erregung ohne eine Feldwirkung. Es entspräche dies einer Vergrößerung der Lichtsumme im ersteren Falle.

Das erregende Licht wirkt außerdem noch tilgend auf die Phosphore und zwar kommt wegen der Kürze der erregenden Wellen nur die kurzwellige Tilgung in Betracht. Diese besteht nach Hrn. Lenard[1]) in einer lichtelektrischen Wirkung auf die Gattungsatome (O, S, Se), wobei von diesen Elektronen abgetrennt werden, deren kinetische Energie zu gering ist, um bei einem Zusammentreffen mit den Metallatomen ein Leuchten derselben hervorzurufen. Die tilgende Wirkung des erregenden Lichtes kann sowohl auf die zu den polarisierten Paaren gehörigen aufspeichernden Atome, als auch auf die übrigen Gattungsatome ausgeübt werden. Die tilgende Wirkung auf die aufspeichernden Atome wird mit wachsender Dauer der Erregung im elektrischen Feld geringer werden müssen, da die aufspeichernden Atome durch das elektrische

1) P. Lenard, Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht. III. a. a. O., S. 35. Diese Auffassung Hrn. Lenards ist neuerdings durch die Untersuchungen von Hrn. Rupp (E. Rupp, Diss. Heidelberg 26. 5. 1922) experimentell bestätigt worden.

Feld in Lagen gebracht werden, in denen die lichtelektrische Abtrennung der Elektronen gehemmt wird. Die positiv geladenen Gattungsatome und diejenigen Atome, an welche sich die aus den Gattungsatomen lichtelektrisch befreiten Elektronen gelagert haben, können unter der Wirkung eines elektrischen Feldes Verschiebungen in den Zentren erleiden. Hierin besteht nach der Auffassung Hrn. Lenards[1]) die innere aktinodielektrische Wirkung[1]) bei den Phosphoren. Natürlich können diese wanderungsfähigen Atome während ihrer Verschiebungen in den Zentren durch Nähewirkung bei den aufspeichernden Atomen Elektronen auslösen und dadurch ein verstärktes Leuchten des Phosphors während der Erregung bewirken, das noch zu dem durch die Drehung der polarisierten Atompaare hervorgerufenen Leuchten hinzukommt. Haben sie aber einmal zusammen mit den polarisierten Paaren ihre neuen Lagen in den Zentren eingenommen und ist ein gewisser Gleichgewichtszustand aller Lichtwirkungen und Feldwirkungen im Phosphor eingetreten, so ergibt sich für das Zentreninnere das folgende Bild: Auf der zum negativen Pol des äußeren Feldes zugewandten Seite der Zentren haben wir einen Überschuß von Metallatomen und sonstigen positiv geladenen Atomen, auf der anderen Seite einen Überschuß von aufspeichernden Atomen und negativ geladenen Atomen.

Im Augenblick des Abstellens der Erregung sei dieser Zustand in allen Zentren des Phosphors ausgebildet. Bleibt nun das Feld noch weiter bestehen, so klingt, wie die Versuche auf S. 185 und Tab. 7 zeigen, der Phosphor in der gewöhnlichen

---

1) Hr. Lenard (P. Lenard, Über Auseuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht. III. a. a. O., S. 80 und Fußnote 326) nimmt zur Erklärung der aktinodielektrischen Wirkung bei den Phosphoren, die zuerst von ihm zusammen mit Hrn. Saeland (Ann. d. Phys. 28. S. 494. 1909) gefunden und späterhin von Öder (C. Ramsauer u. W. Hausser, Ann. d. Phys. 34. S. 445. 1911), von F. Schmidt (Ann. d. Phys. 44. S. 477. 1914) und von B. Gudden u. R. Pohl (Ztschr. f. Phys. 2. S. 181. 1920; 8. S. 96. 1920 u. 4. S. 206. 1921) näher untersucht wurde, an, daß durch die Belichtung der Phosphore sowohl ein Leitvermögen, als auch eine dielektrische Verschiebung in ihnen hervorgerufen wird. Beim Leitvermögen findet eine Ionenwanderung durch die gesamte Phosphormasse hindurch statt (äußere aktinodielektrische Wirkung), bei der dielektrischen Verschiebung aber nur innerhalb der Zentrenmoleküle (innere aktinodielektrische Wirkung).

Weise, als ob kein Feld während der Erregung vorhanden gewesen wäre, ab. Das ist verwunderlich, da durch die Lage der polarisierten Paare im elektrischen Feld die Rückkehr der aufgespeicherten Elektronen verzögert wird und wir außerdem gefunden haben (S. 187), daß, wenn der Phosphor im elektrischen Feld ganz abgeklungen ist, immer noch eine große Menge Elektronen aufgespeichert sein muß, die beim Abschalten des Feldes zu den Metallatomen zurückkehren und dort ein starkes Aufleuchten des Phosphors hervorrufen. Wir können uns die Sache nur durch die Annahme erklären, daß nach der Erregung eines Phosphors in einem elektrischen Feld mehr Elektronen als gewöhnlich zu den Metallatomen zurückkehren. Es entspräche dies wiederum einer Vergrößerung der Lichtsumme eines Phosphors bei einer Erregung im elektrischen Feld.

Wird das elektrische Feld vom Phosphor weggenommen, so kann in den Zentren eine Rückdrehung der polarisierten Paare in ihre ungeordneten Lagen, ein Zurückwandern der aktinodielektrischen Ionen und eine Rückkehr der vom elektrischen Feld an den aufspeichernden Atomstellen festgehaltenen Elektronen einsetzen. Der letztere Vorgang ist unter allen Umständen die Ursache des Aufleuchtens des Phosphors. Die Rückdrehung der polarisierten Atompaare und die Rückwanderung der Ionen können nur auf die Intensität und die Dauer des Aufleuchtens von Einfluß sein, indem sie die Nähewirkung auf die aufspeichernden Atome in den Zentren vergrößern und so die Rückkehr der Elektronen von den aufspeichernden Atomstellen beschleunigen. Die Rückdrehung der polarisierten Paare kommt hierfür allerdings nur in geringem Maße in Betracht, da sie, wie in den Versuchen auf S. 168 gefunden wurde, nur sehr langsam vor sich geht. Inwieweit die Rückwanderung der aktinodielektrischen Ionen zu berücksichtigen ist, kann zurzeit nicht entschieden werden, da noch keine Versuche über die innere aktinodielektrische Wirkung unternommen worden sind.[1]) Es besteht also ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Mechanismus der Ausleuchtung eines Phosphors beim Anschalten eines Feldes während der Abklingung und dem Mechanismus des Aufleuchtens

1) Bei der äußeren aktinodielektrischen Wirkung findet ein langsames Rückwandern der Ionen statt, da sie mit Nachwirkung verbunden gefunden wurde. Vgl. F. Schmidt, Ann. d. Phys. 44. S. 495. 1914.

eines Phosphors beim Abschalten eines während der Erregung und der Abklingung wirkenden Feldes. Im ersteren Falle wird die Ausleuchtung bewirkt durch die Drehung der polarisierten Atompaare im elektrischen Feld, im letzteren Falle durch das plötzliche Losgelassenwerden der durch das elektrische Feld während der Erregung und der Abklingung an den aufspeichernden Atomstellen festgehaltenen Elektronen. Dieser Unterschied in den Mechanismen der beiden Vorgänge wird sehr schön durch die Versuche veranschaulicht, die auf S. 185—188 und in der Tab. 8 beschrieben sind. Alle weiteren Erscheinungen, die beim Abschalten eines Feldes nach einer Erregung und Abklingung im Feld auftreten, können an der Hand dieser Vorstellungen leicht erklärt werden.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die experimentellen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit mit dem in diesem Abschnitt entwickelten Bilde der Vorgänge in den Zentren in Einklang stehen, das, wenn es auch in einzelnen Zügen noch unsicher ist, doch einen klaren Überblick über das vorliegende Beobachtungsmaterial gestattet und weitere Untersuchungen zu leiten geeignet ist.

Zum Schlusse ist es mir ein Bedürfnis, Herrn Geheimrat Lenard für die Gewährung der Mittel des radiologischen Instituts für diese Untersuchung und für viele Ratschläge meinen Dank auszusprechen.

Heidelberg, den 9. Juli 1922.

(Eingegangen 13. September 1922.)

2. *Über Verstärkung von photoelektrischen und Ionisationsströmen mittels der Elektronenröhre; von G. du Prel.*

A. Verstärkung photoelektrischer Ströme.

Unter den verschiedenen Arbeiten, welche sich mit dem Problem der Verstärkung schwächster Gleichströme, wie sie bei photoelektrischen oder Ionisationsströmen im allgemeinen vorliegen, befaßten [1]), stehen an erster Stelle die Untersuchungen von H. Rosenberg [2]), welcher systematisch die günstigsten Versuchsbedingungen feststellte und die Methode für exakte astrophysikalische Messungen ausbildete. Es glückte ihm, mit einer einzigen Röhre Verstärkungsgrade von über 600000 zu erzielen, eine Leistung, welche es ihm ermöglichte, die Helligkeit von Sternen schwächer als vierter Größenklasse noch bequem mit einem Zeigergalvanometer zu photometrieren und er zweifelt nicht, daß sich die neue Methode auf die photoelektrische Messung erheblich lichtschwächerer Sterne werde ausdehnen lassen, als dies bisher mit Hilfe des Elektrometers möglich war. Die Unbequemlichkeiten und Nachteile, welche der elektrometrischen Messung lichtelektrischer Ströme speziell für Sternphotometrie anhaften, sind mancherlei Art, und die Aussicht, an deren Stelle eine galvanometrische Methode setzen zu können, hat viel Bestechendes. Aber auch für viele Zwecke im Laboratorium wäre diese Art der Messung oft wünschenswert, wenn anders die Anordnung, was Empfindlichkeit und Einfachheit betrifft, dem Elektrometer als ebenbürtig angesehen werden kann.

Zweck vorliegender Untersuchungen sollte sein, unter Anlehnung an die Resultate von Rosenberg zu prüfen, ob die

1) J. Kunz, Phys. Rev. 10. S. 205. 1917; C. E. Pike, Phys. Rev. 13. S. 102. 1919; E. Meyer, H. Rosenberg u. F. Tank, Arch. des sciences phys. et nat. 2. S. 260. 1920; M. Dickmann u. A. Gebbert, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Telephonie 19. S. 55. 1922.

2) H. Rosenberg, Die Naturwissenschaften 9. S. 350 u. 389. 1921.

dort erzielten Verstärkungsgrade die äußerste Grenze des Erreichbaren bilden, oder ob sich vielleicht durch geeignete Wahl der Versuchsbedingungen — bei möglichst einfacher Anordnung — noch wesentlich höhere Verstärkungen erzielen lassen, ohne hierbei die Brauchbarkeit der Methode in Frage zu stellen.

I. Anordnung von Rosenberg.

Zur Einführung in das Problem möge zunächst kurz auf die Versuchsanordnung und Resultate von Rosenberg eingegangen werden. Die von ihm benutzte Schaltung ist in Fig. 1 skizziert. Die photoelektrische Zelle Z, eine kolloidale Rubidiumzelle, war mit ihrer Anode isoliert mit dem Gitter der Verstärkerröhre R, einer Niederfrequenzverstärkerröhre von Seddig in Würzburg, verbunden, während an der Zellenkathode der negative Pol einer Batterie B_3 von variabler Spannung lag, deren positiver Pol zum geerdeten Pol der Heizbatterie B_1 von 12 Volt Spannung der Verstärkerröhre geführt war. Der direkte, bei Belichtung der Zelle ausgelöste photoelektrische Strom konnte an dem empfindlichen Spiegelgalvanometer G_1 abgelesen werden. W_1 und W_2 bedeuten zwei variable Widerstände im Heizstromkreis, die nicht nur zur Regulierung des am Amperemeter G_2 abgelesenen Glühstromes dienten, sondern auch das Potential des Glühfadens gegen Erde in gewissen Grenzen zu ändern gestatteten. Der Anodenstromkreis mit der Anodenbatterie B_2 von variabler Spannung[1]) (zwischen 40 und 72 Volt) war als Kompensationskreis ausgebildet, um den „Nullstrom“ (Anodenstrom bei verdunkelter Photozelle), welcher von dem Meßinstrument G_3 angezeigt wurde, kompensieren zu

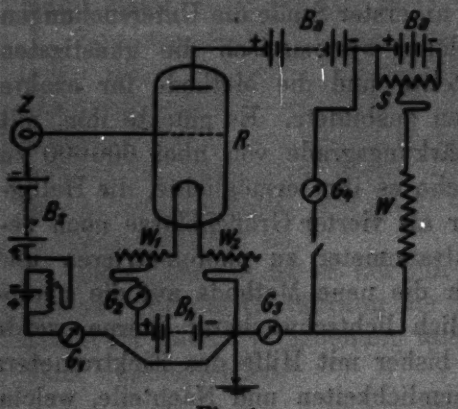


Fig. 1.

1) Unter Anodenspannung ist hier und auch im folgenden stets die Klemmenspannung der Anodenbatterie gemeint.

können. W war ein fester Widerstand von etwa 100000 Ω. Der Brückenzweig ist bei verdunkelter Zelle im Falle der Kompensation, welche mittels des Spannungsteilers S eingestellt wurde, stromlos, und das Spiegelgalvanometer G_4 tritt erst in Tätigkeit, wenn die bei Belichtung der Zelle auftretende negative Aufladung des Gitters der Röhre den Anodenstrom verkleinert und dadurch ein Brückenstrom zu fließen beginnt. Zur meßbaren Veränderung der auf die Photozelle fallenden Lichtintensität eines 4 Volt-Lämpchens dienten zwei Nicols mit senkrechten Endflächen, deren Drehungswinkel bis auf 0,1 Min. an zwei großen Teilkreisen abgelesen werden konnte. Photozelle, Verstärkerröhre sowie die beiden Widerstände W_1 W_2 waren zum Schutze gegen statische und thermische Störungen in geerdeten mit Filz umkleideten Metallgehäusen untergebracht.

Bei den systematischen Untersuchungen, welche Rosenberg mit dieser Anordnung anstellte, fand er bei Variieren der Anodenspannung ein ziemlich steiles Maximum der Verstärkungszahl bei etwa 60 Volt für verschiedene Lichtintensitäten. Behielt er diese günstigste Anodenspannung bei und änderte nunmehr den Heizstrom, so ergab sich ein weiteres erhebliches Anwachsen der Verstärkung mit abnehmendem Glühstrom. Die zwei Regulierwiderstände im Heizkreis erlaubten ihm dabei, nicht nur die Glühstromstärke beliebig einzustellen, sondern auch die infolge des verschiedenen Spannungsabfalles im Heizdrahte bei Ändern des Glühstromes auftretenden Änderungen des Potentialgefälles zwischen Gitter und Kathode zu kompensieren, bezw. den Einfluß dieser Potentialdifferenz auf die Verstärkung gesondert untersuchen zu können. Dabei zeigte sich nun, daß die Verstärkung in hohem Grade vom Heizdrahtpotential gegen Erde abhing.[1]) An und für sich wird natürlich die Wirkung der Röhre hiervon nicht berührt (die damit verbundene Änderung des Potentialgefälles zwischen Kathode und Anode kann als zu geringfügig außer Acht gelassen werden), wohl aber durch die gleichzeitig auf-

1) H. Rosenberg maß die Spannungsdifferenzen der beiden Enden des Heizdrahtes gegen Erde und setzte den Mittelwert, der also die Spannungsdifferenz der *Mitte* des Glühdrahtes gegen Erde darstellt, in seine Beobachtungen ein.

tretende Änderung des Potentialgefälles zwischen Gitter und Kathode. Rosenberg änderte mit anderen Worten durch Variieren des Heizdrahtpotentials gegen Erde die negative Gittervorspannung[1]) seiner Röhre in allerdings zunächst unbekanntem Betrage; unter Zuhilfenahme der Kennlinienschar seiner Lampe konnte er aber leicht ermitteln, welche Potentialdifferenz zwischen Gitter und Kathode sich bei Variieren des Heizdrahtpotentials einstellte. Dabei zeigte sich, daß die Verstärkung um so höher wurde, je positiver der Heizdraht gegen Erde war, je größer also die negative Gittervorspannung genommen wurde. Rosenberg mußte sich mithin überraschenderweise auf den untersten Teil der Kennlinie begeben, um möglichst hohe Verstärkungen zu erreichen. Überraschend ist dieses Resultat insofern, als hier die Kennliniensteilheit im Vergleich zu dem mittleren, gewöhnlich verwendeten Teil der Röhrencharakteristik klein ist und die Güte einer Verstärkerröhre ceteris paribus der Kennliniensteilheit proportional gesetzt werden kann. Berücksichtigt man jedoch, daß an dem untersten Teile der Kennlinie auch die Gitterströme der Röhre, auf welche im nächsten Abschnitt näher eingegangen werden soll, und die neben der Steilheit der Charakteristik bei sehr schwachen zu verstärkenden Strömen eine große Rolle spielen, klein sind, so wird diese Erscheinung verständlich. Je schwächer der zu verstärkende Strom, um so besser muß das Gitter der Röhre isoliert sein, um die Ausbildung einer möglichst hohen Potentialdifferenz zwischen Gitter und Kathode zu ermöglichen. Sind Gitterströme vorhanden, so wirken diese wie ein Nebenschluß, verkleinern dies Potentialgefälle und setzen dadurch den Wirkungsgrad der Röhre herab. Will man hohe Verstärkungen, so ist es also unerläßlich, diese Gitterströme möglichst zu vermeiden, selbst wenn hierbei eine geringe Kennliniensteilheit in Kauf genommen werden muß, wie sie im untersten Teil der Charakteristik vorliegt. Verkleinerung der Anodenspannung, des Heizstromes, sowie Vergrößerung der

1) Ein gut isoliertes Gitter einer Verstärkerröhre ladet sich bekanntlich automatisch durch das anfängliche Auftreffen der Elektronen so weit negativ auf, bis kein merklicher Elektronen-Gitterstrom mehr fließt. Verschlechtert man die Gitterisolation, so sinkt diese negative Gittervorspannung um so mehr, je mangelhafter die Isolation wird.

negativen Gittervorspannung vermindern die Gitterströme, daher auch das mächtige Anschwellen der Verstärkungszahl, welches Rosenberg bei Anodenspannungen und Heizströmen fand, die weit unter den normalen Betriebsbedingungen seiner Röhre lagen. Er hat auch den schädlichen Einfluß dieser Gitterströme auf den Verstärkungsgrad seiner Anordnung erkannt und experimentell untersucht.

II. Das Wesen der Gitterströme.

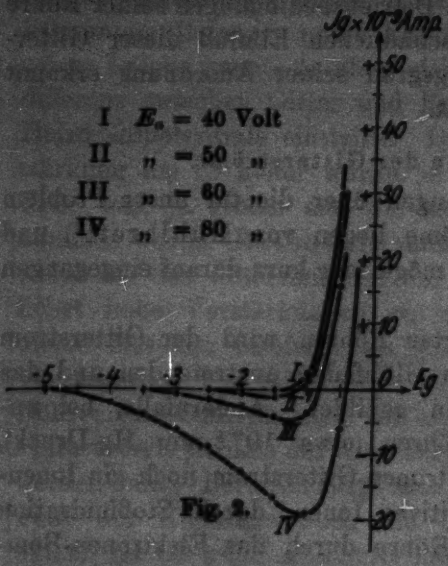
Eingehende Untersuchungen über die für unser Problem so unerwünschten Gitterströme liegen von Mühlbrett[1]) und Barkhausen[2]) vor und es möge hier kurz darauf eingegangen werden.

Bei sehr gut evakuierten Röhren wird der Gitterstrom lediglich durch die aus dem Glühfaden austretenden und das Gitter treffenden Elektronen gebildet. Andernfalls, bei ungenügend ausgepumpten Röhren (etwa 10^{-4} mm Hg-Druck), überlagert sich diesem Elektronen-Gitterstrom noch ein Ionen-Gitterstrom, wobei die positiven Ionen, durch Stoßionisation aus den Gasresten in der Röhre durch das Elektronen-Bombardement gebildet, von der positiv geladenen Anode abgestoßen werden und auf das Gitter gelangen. Während der Elektronen-Gitterstrom mit wachsender negativer Gittervorspannung exponentiell abnimmt und bei etwa — 1,5 Volt schon unmeßbar klein wird (ganz verschwindet er nicht, da aus dem Glühfaden Elektronen mit allen möglichen Geschwindigkeiten austreten und daher auch bei höheren negativen Gittervorspannungen vermöge ihrer kinetischen Energie, wenn auch in immer abnehmender Zahl, die abstoßenden Kräfte des Gitters überwinden können), tritt der Ionen-Gitterstrom gleichzeitig mit dem Einsetzen des Anodenstromes auf und ist, konstante Anodenspannung vorausgesetzt, ihm proportional. Bei der Messung des Gitterstromes überlagern sich also beide Komponenten und man erhält für den Verlauf derselben Kurven von folgender Gestalt, Fig. 2, welche die Gitterströme in einer

1) K. Mühlbrett, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Telephonie 17. S. 288. 1921.

2) H. Barkhausen, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Telephonie 18. S. 402. 1921.

Telefunken-Röhre (Type E.V.E. 173), wie sie anfänglich für die Verstärkung der lichtelektrischen Ströme benutzt wurde, bei einem Heizstrom von 0,52 Amp. und verschiedenen Anodenspannungen veranschaulicht. Die Kurven haben die typische Form, wie sie die Gitterstrommessungen an ungenügend evakuierten Röhren ergeben.[1]) Auch die tabellarischen Werte von Rosenberg zeigen ähnliche Verhältnisse seiner Röhre an. Allerdings schreibt Rosenberg das Auftreten positiver Ionen in seiner Lampe anderen Einflüssen zu — er vermutet deren Aussendung neben den Elektronen durch den Glühfaden — doch dürfte diese Ansicht der Deutung von Barkhausen nicht standhalten.



I E_a = 40 Volt
II „ = 50 „
III „ = 60 „
IV „ = 80 „

Fig. 2.

Hat man also eine schlecht evakuierte Röhre, und eine solche verwandte Rosenberg, wie aus seinen Gitterströmen hervorgeht, so ist man zur Unterdrückung derselben gezwungen, sich auf den untersten Teil der Kennlinie, d. h. zu kleinen Anodenströmen zu begeben. Bei sehr gut ausgepumpten Röhren dagegen fällt der Ionen-Gitterstrom weg, und es muß möglich sein, den Arbeitspunkt des Anodenstromes an Stellen größerer Kennliniensteilheit zu verlegen, wenn nur die negative Gittervorspannung noch hoch genug ist, ein merkliches Auftreten des Elektronen-Gitterstromes zu verhindern. Damit ist zunächst *ein* Gesichtspunkt zur ev. Steigerung des Wirkungsgrades der Anordnung gegeben. Gleichzeitig bietet der höhere Anodenstrom die Möglichkeit eines größeren, noch direkt meßbaren Helligkeitsintervalles, indem stets die obere Grenze der zu

1) Bezüglich weiterer Einzelheiten sei auf die oben zitierte Arbeit von Barkhausen hingewiesen.

messenden Intensität dadurch gegeben ist, daß das Produkt aus primärem Photostrom und der Verstärkungszahl gleich dem Nullstrom wird; größere Intensitäten bewirken dann keine Änderungen des Anodenstromes mehr. Allerdings dürfte dieser Vorteil dadurch teilweise wieder ausgeglichen werden, daß bei großen Intensitäten von einem gewissen Grenzwerte an Abweichungen von der Proportionalität zwischen Helligkeit und verstärktem Photostrom auftreten und schließlich eine gewisse Trägheit der Verstärkerröhre bemerklich wird, die sich darin äußert, daß es nach Belichten bezw. Verdunkeln der Photozelle einige Zeit dauert, bis der Anodenstrom wieder konstant geworden ist.

III. Die Plattenröhre.

Nach zahlreichen Vorversuchen mit der oben erwähnten Telefunken-Röhre sowie einer Seddig-Röhre ähnlicher Bauart, die beide die eben beschriebenen schädlichen Ionen-Gitterströme zeigten und mit denen — trotz Präparieren derselben, wie später beschrieben — keine höheren Verstärkungsgrade wie etwa 1:100000 zu erreichen waren, wurde eine Röhrentype ausfindig gemacht, die allen Anforderungen an ein ausgezeichnetes Vakuum entsprach. Es war dies die sogenannte Plattenlampe, wie sie während des Krieges im Würzburger physikalischen Institut hergestellt wurde und deren Wirkungsweise von Rüchardt[1]) eingehend untersucht worden ist. Verwendet wurde für die vorliegenden Versuche die von H. Seemann entworfene Form. Das Prinzip dieser Röhren ist wesentlich von dem der gewöhnlichen Typen verschieden: Der gespannte Glühfaden befindet sich zwischen zwei Platten von etwa 2 mm Abstand, von denen die eine Anode, die andere Steuerelektrode ist; von letzterer ist der Glühfaden nur wenige Zehntel-Millimeter entfernt. Die Steuerelektrode befindet sich also bei diesen Lampen nicht zwischen Kathode und Anode, sondern *hinter* der Kathode, steuert aber den Anodenstrom in derselben Weise, wie bei der gebräuchlichen Anordnung.

Außer dem ausgezeichneten Vakuum[2]) und einer großen Kennliniensteilheit boten diese Lampen noch die Annehmlich-

1) E. Rüchardt, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Telephonie 15. S. 27. 1920.

2) Über die Gitterströme vgl. Fig. 4.

keit, mit kleinen Anodenspannungen auszukommen, die für normalen Betrieb etwa 12 Volt beträgt, ein nicht zu unterschätzender Vorteil für die gewollte Vereinfachung der Versuchsanordnung.

Diese Plattenlampen wurden nun in folgender Weise präpariert: Die aufgekittete Fassung wurde durch vorsichtiges Erwärmen abgenommen und die in die Glashöhlung der Röhre eingedrungenen Kittreste in Chloroform aufgelöst. War jede Spur von Kitt entfernt, so wurde die Höhlung wiederholt mit warmem, destilliertem Wasser ausgespült und die Röhre schließlich im Exsikkator sorgfältig getrocknet. Sodann kam sie in einen elektrischen Ofen, wurde auf etwa 120° langsam erhitzt, in die Höhlung bestes geschmolzenes Paraffin eingegossen und nun langsam erkalten gelassen. Das Ausgießen mit Paraffin war erforderlich, um die Bildung einer Wasserhaut am Glase und dadurch allmähliche Verschlechterung der Gitterisolation zu verhindern. Versuche mit anderen, nicht präparierten Lampen gleicher Art zeigten, daß die Gitterisolation, die aus der Entladezeit eines mit dem Gitter verbundenen aufgeladenen Braunschen Elektrometers — bei geerdeten übrigen Röhrenelektroden — ermittelt wurde, durch die Lampenfassung wesentlich litt, so daß sich die Entfernung derselben als nötig erwies.

Es ist denkbar und, wie durch später zu besprechende Versuche bewiesen werden soll, auch in der Tat der Fall, daß die Leitfähigkeit des Glases an der Einschmelzstelle der Gitterzuführung bei brennender Lampe ebenfalls eine Rolle spielt, sobald es auf äußerste Gitterisolation ankommt.

IV. Versuchsanordnung.

Als lichtelektrische Zelle wurde für vorliegende Versuche eine von P. P. Koch[1]) seinerzeit im hiesigen Institut angefertigte kolloidale Kaliumzelle mit Argonfüllung verwendet, die nach dem Prinzip des schwarzen Körpers ausgebildet ist. Die kugelförmige Zelle ist innen bis auf eine kleine Eintrittsöffnung für das Licht allseitig versilbert und mit Alkalimetall überzogen. Um ein Überkriechen der Spannung zwischen den Zellen-Elektroden und damit Störungen im Gitterstromkreis

1) Vorbemerkung von P. P. Koch zu F. Goos, Zeitschr. f. Instr.-Kunde 41. S. 313. 1921.

zu verhindern, wurde um den Glasrohransatz der Photozelle, welcher den Anodenhalter birgt, in etwa 3 cm Entfernung von der Einschmelzstelle der Zuführung ein geerdeter Staniolring herumgelegt und die Glasröhre zwischen Ring und Einschmelzstelle sorgfältig paraffiniert.[1]) Photozelle und Verstärkerröhre befanden sich in einem gemeinsamen rechteckigen Kästchen aus 1 mm starken Kupferblech mit abnehmbaren Boden und Deckel, das innen durch eine lichtdichte Scheidewand unterteilt war. Der Photozellenraum war innen allseitig mit Kienruß in Schellaklösung geschwärzt, ein eingestelltes Näpfchen mit konzentrierter Schwefelsäure sorgte durch Trocknen der Luft für gute Isolation. Von der Zellenanode führte ein kurzes Drähtchen durch einen in die Zwischenwand eingesetzten, sorgfältig gereinigten Hartgummistopfen zum Gitter der Röhre. Die übrigen Zuleitungen zur Zelle und Röhre waren mittels Hartgummiröhrchen durch den Boden des Schutzkästchens eingeführt. An der Vorderwand, der Lichtöffnung der Zelle zentrisch gegenüber, befand sich eine runde Öffnung mit aufgelötetem kurzen Tubus, auf welchen eine metallische Irisblende aufgeschraubt war, deren Öffnungsverhältnis durch einen längeren Hebel, welcher auf einer am Kästchen montierten Skala spielte, im Betrage von 1:64 verändert werden konnte. Die Zelle erhielt ihr Licht von einem etwa 2 mm dicken Milchglasscheibchen, welches in die Fassung der Irisblende dicht vor deren Lamellen auf der der Photozelle abgewandten Seite mittels Springring eingesetzt war und von einem 4-voltigen Metallfadenlämpchen, das längs einer geteilten, 1,5 m langen Schiene verschiebbar aufgestellt war, beleuchtet wurde. Vor der Milchglasscheibe, über welche zwecks statischen Schutzes noch ein Messingdrahtnetz in Ringfassung gesteckt war, wurde lichtdicht ein photographischer Verschluß (Compound) aufgestellt, der mittels Drahtauslöser betätigt werden konnte. Durch Ändern des Abstandes der Lampe und der Blendenöffnung konnte die Intensität des auf die Photozelle fallenden Lichtes bequem in großem Betrage verändert werden. Die Verwendung einer Milchglasscheibe an Stelle eines Mattglases

1) Bestmögliche Isolation der Photozellen-Anode ist ebenso wichtig wie die des Gitters der Verstärkerröhre.

erwies sich als nötig, da sonst, für kleine Entfernungen Lampe-Zelle, bei Berechnung der Intensität Abweichungen vom Abstandsgesetz sowie, für größere Blenden, Unsicherheiten in der gleichmäßigen Transparenz der Mattscheibe auftraten.

Die benutzte Schaltung geht aus Fig. 3 hervor. Sie unterscheidet sich nicht wesentlich von der Rosenbergs, wenn auch Dank der Vorteile der Plattenröhre einige Vereinfachungen

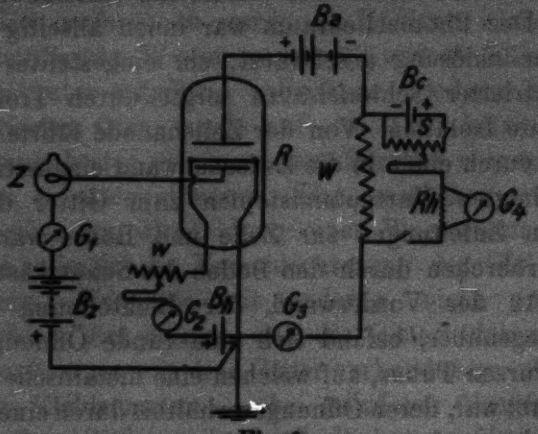


Fig. 3.

möglich waren. Als Spannungsquelle für die Photozelle diente eine kleine Hochspannungsbatterie B_2 von 210 Volt, deren Spannung unter ständiger Kontrolle stand.[1]) Der negative Batteriepol war unter Zwischenschaltung eines Siemensschen Drehspulengalvanometers G_1 mit der Kathode der Photozelle, der positive mit dem geerdeten negativen Pol der Heizbatterie verbunden. Die Ausschläge von G_1 konnten mit Fernrohr und Skala auf Zehntelmillimeter sicher abgelesen werden. Im Heizstromkreis, welcher zuletzt nur noch von *einem* Akkumulator großer Kapazität gespeist wurde, befand sich ein Präzisionsamperemeter G_3 sowie ein eigens konstruierter regulier-

1) Mit Rücksicht auf möglichst konstante Empfindlichkeit der Photozelle wurde die angelegte Spannung ziemlich niedrig, 30 Volt unter Einsetzen der Glimmentladung, gewählt. Ferner war dadurch Proportionalität zwischen Intensität und Photostrom gewährleistet, indem die Zelle keine wahrnehmbaren Ermüdungserscheinungen zeigte, wie sie sonst bei Arbeiten dicht unter der Glimmspannung auftreten. Vgl. hierzu H. Rosenberg, Zeitschr. f. Physik 7. S. 18. 1921.

barer Widerstand w von etwa 0,5 Ω. Für ev. höhere Glühstromstärken waren feste Zusatzwiderstände zur Verwendung mit zwei oder drei Akkumulatoren vorgesehen. Große Sorgfalt wurde auf einwandfreie Kontakte des Regulierwiderstandes gelegt, da die geringsten plötzlichen Glühstromschwankungen sich außerordentlich störend bemerkbar machten. Auch am Ausschalter im Glühstromkreise wurde auf sichere Kontakte geachtet, ebenso wurden die einzelnen Verbindungen, wo angängig, verlötet. Der Anodenstromkreis enthielt außer der Anodenbatterie B_a (3—6 kleine Akkumulatoren) den festen Widerstand W, bestehend aus zwei bifilar gewickelten, hintereinander geschalteten Spulen von je 12450 Ω, sowie das Milliamperemeter G_3. An die Enden des Widerstandes W war der Kompensationskreis gelegt, bestehend aus einem Akkumulator B_c mit angeschlossenem Spannungsteiler δ, sowie einem Siemensschen Drehspulen-Galvanometer G_4 mit objektiver Ablesevorrichtung. Parallel hierzu war als Nebenschluß ein Stöpselrheostat Rh geschaltet, um die Empfindlichkeit des Meßinstrumentes bei Bedarf rasch meßbar verändern zu können. Zu bemerken ist, daß sowohl der Widerstand des Spannungsteilers als auch der Shunt des Galvanometers klein sein müssen gegenüber dem Widerstand W, indem sonst die Anodenstromänderungen und damit die Verstärkungszahl zu klein gemessen wird. Dagegen spielt die Größe des Widerstandes W für die Verstärkung bei der Kompensationsschaltung keine Rolle.[1])

Während bei den ersten orientierenden Versuchen die ganze Anordnung ungeschützt im Zimmer aufgebaut war, traten mit zunehmender Verstärkungszahl immer größere plötzliche Störungen auf, deren Ursache in elektrischen Schwingungen, welche die Anordnung beeinflußten, erkannt wurde. Einsetzendes Funkenspiel an Induktorien oder Influenzmaschinen, Ein- oder Ausschalten von Elektromotoren im Institut, ja sogar die in etwa 100 m Entfernung vom Beobachtungsraum vorbei-

1) Je größer W genommen wird, um so flacher und geradliniger verlaufen die Röhrenkennlinien. Daraus könnte man u. U. zur Erzielung eines ausgedehnteren Proportionalitätsbereiches zwischen direktem und verstärktem Photostrom Nutzen ziehen. Allerdings ist dabei der Nachteil einer Anoden- und Kompensationsbatterie von höherer E.M.K. mit in Kauf zu nehmen.

fahrende elektrische Straßenbahn störten in manchmal unerträglicher Weise. Da ein provisorischer Schutz der verschiedenen Stromkreise durch geerdete Blechkästchen keine gründliche Abhilfe brachte, wurde beschlossen, die ganze Anordnung in einen großen, an mehreren Punkten geerdeten Kasten aus verlöteten Zinkblechtafeln einzubauen, dessen Dimensionen — 1,9 m Höhe, 1,2 m Tiefe und 1,7 m Breite — deshalb so geräumig gewählt wurden, um nicht nur möglichste Bewegungsfreiheit bei etwa erforderlichem Umbau der Versuchsanordnung zu haben, sondern auch dem Beobachter selber in dem Kasten Platz zu bieten. Diese Blechhütte mit gut schließender schmaler Türe mit übergreifenden Blechrändern bewährte sich in jeder Hinsicht, die Störungen waren behoben. Zu bemerken ist, daß keinerlei Drähte von außen in den Beobachtungsraum hineinführen dürfen, wenn anders dessen Schutzwirkung nicht vereitelt werden soll. Zur Beleuchtung im Kasten diente daher ein hochkerziges, von 2 Akkumulatoren gespeistes 4 Volt-Lämpchen.

V. Messungen.

Vor Verwendung der Röhren für Verstärkerzwecke wurde die Güte des Vakuums durch Messen der Gitterströme geprüft. Hierzu wurde die übliche Anordnung mit Potentiometer und Galvanometer — als solches diente G_1 — im Gitterkreis benutzt. Von vier untersuchten Plattenlampen erwiesen sich drei als brauchbar, die vierte dagegen als nicht genügend evakuiert; diese wurde für Verstärkerzwecke verworfen. Fig. 4 veranschaulicht die Gitterströme dieser Röhren 1 bis 4 bei einer Anodenspannung von 12 Volt und einem Heizstrom von 0,48 Amp.[1]) Die Ordinaten sind hier in 25 mal so großem Maßstabe aufgetragen, wie in Fig. 2. Bei Lampe 1, 2 und 3 ist kein Anzeichen eines Ionen-Gitterstromes, dafür ein kleiner Anfangskriechstrom vorhanden, auf welchen wir später noch zurückkommen werden; Röhre 4 dagegen zeigt, wenn auch schwachen, Ionen-Gitterstrom. Für Verstärkungszwecke wurden im allgemeinen geringere Anodenspannungen und kleinere

1) Von einer Wiedergabe der Anodenstrom-Kennlinien wurde abgesehen, da die günstigsten Werte von Anodenspannung und Heizstrom für jede Lampe differierten.

Heizströme als bei den Gitterstrommessungen verwendet, doch waren dann die Kriechströme wegen ihrer Kleinheit einer Messung nicht mehr zugänglich.

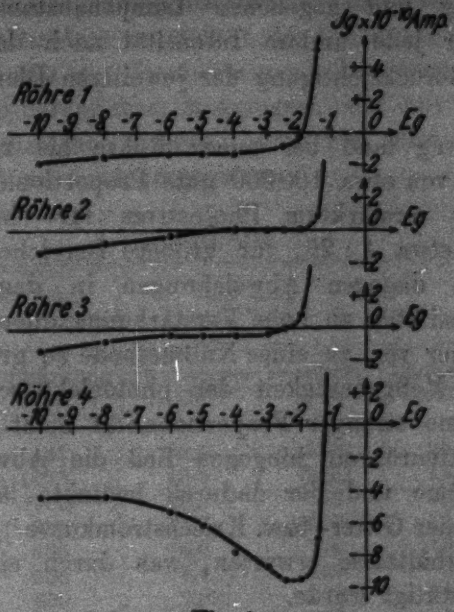


Fig. 4.

Da der primäre Photostrom nur bei großer Blendenöffnung und starker Beleuchtung der Milchglasscheibe noch meßbar war, mußte sein Wert vor jeder Verstärkungsmessung für sich festgestellt werden. Versuchte man nämlich, ihn bei eingeschalteter Verstärkerröhre zu messen, so lud sich das Gitter hierbei so stark negativ auf, daß der ganze Anodenstrom abgebremst wurde und die schon früher erwähnte Trägheit der Röhre lästig in Erscheinung trat. Es wurde daher in der Weise verfahren, daß zu diesen Messungen Gitter und Kathode der nicht brennenden Verstärkerlampe miteinander verbunden und sie so aus dem Stromkreis ausgeschaltet wurde. Dadurch sank zwar der Gesamtwiderstand des Photozellenkreises um den Betrag des Röhrenwiderstandes, da dieser aber immer noch klein gegenüber dem Widerstand der Photozelle[1])

1) Größenordnung etwa $10^{11}\ \Omega$; der Widerstand einer Photozelle ist nicht konstant, sondern steigt mit abnehmender Spannung.

war, betrug der Fehler, der hierbei in die Verstärkungszahl einging, nur wenige Prozent im Sinne einer zu geringen Verstärkung. War so der primäre Photostrom für eine bestimmte Blendenöffnung und gegebenen Lampenabstand festgestellt, konnte er für jede andere Intensität nach dem Abstandsgesetz unter Berücksichtigung der jeweiligen Blende berechnet werden.

Rosenberg fand bei seiner Röhre bis zu einer Verstärkungszahl von etwa 100000 gute Proportionalität zwischen direktem und verstärktem Photostrom für ein Intensitätsintervall von etwa 1 : 20, für größere Bereiche oder höhere Verstärkungen dagegen Abweichungen in dem Sinn, daß größeren Intensitäten zu hohe Verstärkungszahlen entsprachen. Er zog es daher vor, zu einer Nullmethode zu greifen, um die große innere Meßgenauigkeit der photoelektrischen Methode durch Annahme strenger Proportionalität nicht preiszugeben. Bei den Plattenröhren hingegen ließ die Abwesenheit der Ionengitterströme und der dadurch bedingte längere geradlinige Verlauf der Gitter- bzw. Kriechstromkurve[1]) entsprechend günstigere Verhältnisse erwarten, was durch eine Reihe von Versuchen bestätigt wurde.

Der Gang einer solchen Messung war folgender: Nachdem der primäre Photostrom bei großer Blende und bestimmtem Lampenabstand in der vorher beschriebenen Weise ermittelt war, wurde die Verstärkerröhre eingeschaltet, nach einiger Zeit der Heizstrom auf die gewünschte Stärke feinreguliert und der Spannungsteiler im Kompensationskreis bei unempfindlichem Galvanometer G_4 (kleiner Shunt) annähernd eingestellt. Während des Einbrennens der Röhre wurde die Spannung der Photozellenbatterie nachgeprüft, das Lämpchen für die Belichtung der Zelle eingeschaltet und dauernd brennen gelassen. Die Belichtung selbst geschah durch Öffnen des Compoundverschlusses, so daß konstante Intensität des von zwei Akkumula-

1) Rosenberg schreibt die Abweichungen von der Proportionalität der Krümmung im unteren Kennlinienstück zu. Wesentlicher dürfte wohl bei schlecht evakuierten Röhren der Einfluß der Gitterstromcharakteristik sein wegen ihres steilen Verlaufes am Orte des Vorzeichenwechsels, auf welchen Punkt Rosenberg seine Gittervorspannung einstellt.

toren großer Kapazität gespeisten Lämpchens auf längere Zeitdauer angenommen werden konnte. Waren nach etwa $1^1/_2$ Stdn. völlig konstante Röhrenverhältnisse eingetreten, so wurde die Irisblende auf die gewünschte Öffnung eingestellt, die Galvanometer-Empfindlichkeit vergrößert, der Kompensationskreis nachreguliert und mit den Beobachtungen begonnen.

Von den zahlreichen Messungen, die mit den einzelnen Röhren vorgenommen wurden, seien hier drei Beobachtungsreihen an Röhre 1 wiedergegeben.

Tabelle 1.

Heizstrom 0,43 Amp. Anodenspannung 8 Volt		0,46 Amp. 12 Volt		0,48 Amp. 12 Volt	
Photostrom $\times 10^{-13}$	Verstärkung $\times 10^3$	Photostrom $\times 10^{-13}$	Verstärkg. $\times 10^3$	Photostrom $\times 10^{-13}$	Verstärkg. $\times 10^3$
90,0	(1467)	90,0	(918)	90,0	(765)
40,0	(1070)	40,0	(820)	40,0	718
22,5	(950)	22,5	778	22,5	687
14,4	886	14,4	768	14,4	685
10,0	865	10,0	775	10,0	685
5,6	850	5,6	759	5,6	714
2,5	880	2,5	780	2,5	702
0,9	861	0,9	777	0,9	695
0,62	872	—	—	—	—
0,46	848	—	—	—	—
Mittel	866×10^3		772×10^3		698×10^3
mittlerer Fehler	$\pm$ 1,6%		$\pm$ 1,1%		$\pm$ 1,9%

Tab. 1 veranschaulicht für diese Röhre den Zusammenhang zwischen primärem und verstärktem Photostrom bei drei verschiedenen Heizströmen von 0,43, 0,46 und 0,48 Amp. Die jeweilig günstigsten Anodenspannungen schwankten dabei zwischen 8 und 12 Volt und wurden durch Sonderversuche für jede Röhre ermittelt. Für jede Intensität wurde dreimal beobachtet und die gemittelten Einzelwerte in die Tabelle eingetragen. Die eingeklammerten Verstärkungswerte liegen schon außerhalb des Proportionalitätsbereiches und wurden bei Berechnung der mittleren Verstärkung unberücksichtigt gelassen.

Während bei der von Rosenberg verwendeten Röhre der Einfluß einer Änderung der Anodenspannung oder des Heiz-

stromes sehr beträchtlich ist, zeigten sich die Plattenlampen infolge Abwesenheit der Ionengitterströme viel unempfindlicher dagegen. Aus dem gleichen Grunde war hier eine Vergrößerung der negativen Gittervorspannung durch Erhöhung des Heizdrahtpotentials gegen Erde[1]) für den Verstärkungsgrad fast belanglos. Dadurch entfiel auch die Notwendigkeit der Verwendung zweier größerer Regulierwiderstände und einer Batterie von entsprechend hoher E. M. K. im Heizkreis, was im Hinblick auf die gewünschte Vereinfachung der Versuchsanordnung nur zu begrüßen war.

Was nun die Proportionalität des verstärkten Stromes mit der Lichtintensität betrifft, so ist aus Tab. 1 zu entnehmen, daß auch bei diesen Röhren von einer gewissen, vom Verstärkungsgrad abhängigen oberen Grenze an zu größeren Intensitäten zu hohe Verstärkungszahlen gehören, und zwar wird die Erscheinung um so ausgeprägter, je höher die Verstärkung ist. Betrachtet man die Abweichungen der Einzelwerte von der mittleren Verstärkungszahl als Zufall, was um so berechtigter sein dürfte, als hierin kein systematischer Gang zu bemerken ist, so ergeben sich, je nach dem Verstärkungsgrade, mittlere Fehler zwischen 1 und 2 Proz., eine Genauigkeit, welche von den gewöhnlichen optischen oder photographisch-photometrischen Methoden kaum erreicht wird. Während nun Rosenberg bei seiner Röhre Proportionalität innerhalb gleicher Fehlergrenzen nur für ein Intervall von etwa 1 : 20 und nur bis zu Verstärkungen von ungefähr 100000 findet, bei höheren Verstärkungen dagegen nicht unbeträchtliche Abweichungen erhält, sind bei den hier benutzten Röhren, trotz 7 bis 8 mal so hoher Verstärkung, für ein durchschnittliches Intensitätsintervall von 1 : 30 noch keine Anzeichen systematischer Abweichungen zu bemerken; nur rückt mit zunehmender Verstärkung der Bereich konstanter Verstärkung zu immer kleineren Intensitäten. Leider konnten bei der benutzten Anordnung die Beleuchtungsstärken

1) Mit jeder Erhöhung des Heizdrahtpotentials gegen Erde nimmt auch das Gitterpotential im selben Sinne, aber geringerem Betrage, je nach Güte der Gitterisolation zu (vgl. Rosenberg, Tab. 8). Damit erhöht sich aber gleichzeitig die Potentialdifferenz an den Elektroden der Photozelle, somit deren Empfindlichkeit, wodurch u. U. höhere Verstärkungen vorgetäuscht werden können.

für die Photozelle in keinem größeren Betrage wie etwa 1 : 200 innerhalb einer Meßreihe geändert und daher die Beobachtungen nicht auf noch kleinere Intensitäten ausgedehnt werden, indem einerseits ein Übergang zu einer kleineren Blendenöffnung während einer Beobachtungsreihe als bedenklich verworfen wurde, andererseits infolge des beschränkten Raumes in der Blechhütte eine Verlängerung der Lampenschiene nicht möglich war. Dazu kam als weiterer Übelstand die bei schwachen Intensitäten eintretende Unsicherheit der Messung infolge Kleinheit der Ausschläge am Galvanometer im Kompensationskreis, dessen Empfindlichkeit nicht voll ausgenützt werden konnte.[1]) Da jedoch auch bei den kleinsten gemessenen Intensitäten keine Andeutung einer systematischen Abweichung von der Proportionalität vorhanden ist, die nach den bisherigen Erfahrungen auch nicht zu begründen wäre, dürfte die Annahme der Gültigkeit des Proportionalitätsgesetzes für noch kleinere Intensitäten wohl berechtigt sein.[2]) Damit würde sich, unter Berücksichtigung der möglichen Empfindlichkeitsgrenze des hier verwendeten Galvanometers das bisher gemessene Proportionalitätsintervall bei den vorliegenden Verstärkungsgraden auf mindestens 1 : 200 erhöhen, ein großer Vorteil dieser Röhren für Zwecke, welche die Anwendung einer Nullmethode verbieten.

VI. Mängel und Verbesserungsmöglichkeiten der Verstärkerröhren für vorliegende Zwecke.

Die Größenordnung der mit diesen Plattenröhren erreichten Verstärkungszahlen war bei allen drei Röhren die gleiche. Mit Lampe 2 ließen sich Verstärkungen bis zu 1,4 Millionen im Proportionalitätsbereich erzielen, doch erwies sich diese Röhre im Gegensatz zu den übrigen als sehr empfindlich gegen

1) Um die Einstelldauer des Drehspulengalvanometers nicht unnötig zu verlängern und aperiodisch zu bekommen, mußte ein Ballastwiderstand von 3000 Ω vor die Galvanometerspule geschaltet werden. Da eine Vergrößerung des Shunts über 1000 Ω nicht ratsam war, um der früher betonten notwendigen Bedingung — Kleinheit gegenüber dem Widerstand im Anodenstromkreis — noch zu genügen, konnte nur etwa der vierte Teil der maximalen Galvanometerempfindlichkeit benutzt werden. Verbesserungen in dieser Hinsicht waren geplant, konnten aber aus äußeren Gründen leider nicht mehr durchgeführt werden.

2) Vgl. hierüber auch S. 220.

mechanische Erschütterungen, was entweder auf ungenügende Spannung des Glühdrahtes oder auf schlechten Kontakt des Glühfadens an dessen Einklemmstellen zurückzuführen sein dürfte. Bei künftigen Spezialkonstruktionen dieser Röhren für derartige Verstärkerzwecke wäre daher auf besonders sorgfältige Montierung des Glühfadens zu achten.

Eine weitere sehr wesentliche Verbesserung von Verstärkerröhren für alle Zwecke, bei denen es sich um Verstärkung schwächster Ströme handelt, möge hier angeregt werden.

Betrachtet man die Gitterströme in Fig. 4, so fällt ein kleiner Kriechstrom auf, welcher schon vor Einsetzen des Elektronen-Gitterstroms, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen vorhanden ist und wohl nur durch eine gewisse Leitfähigkeit des erhitzten Glases an den Einschmelzstellen der Zuführungsdrähte bei brennender Lampe erklärt werden kann, nachdem durch die früher beschriebene Präparation der Röhren die Gitterisolation äußerlich soweit als möglich verbessert worden war. Damit steht auch die Tatsache im Einklang, daß Lampe 2, bei welcher dieser Kriechstrom für einen längeren Bereich der Gittervorspannung nicht mehr nachweisbar war, am besten verstärkte. Zur Entscheidung dieser Frage wurde folgender Versuch angestellt: Dicht neben eine präparierte Verstärkerröhre (Nr. 1), deren Gitterzuführung mit einem Braunschen Elektrometer — bei geerdeten übrigen Elektroden — verbunden war, wurde eine Kohlefaden-Glühlampe von 50 Kerzen gestellt und die Gitterisolation vor und nach Einschalten der Glühlampe gemessen. Die einwandfreie Isolation der kalten Röhre geht aus Tab. 2 hervor, in welcher die Entladezeiten des vor Versuchsbeginn auf 1500 Volt geladenen Elektrometers eingetragen sind.

Tabelle 2.

Ladung Volt	Entladezeit Min.	Sek.	Ladung Volt	Entladezeit Min.	Sek.
1500	—	0	900	6	20
1400	—	38	800	8	0
1300	1	20	700	9	50
1200	2	22	600	12	30
1100	3	28	500	15	25
1000	4	40			

Nun wurde die Röhre 5 Min. lang durch Einschalten der Glühlampe bestrahlt, die Isolation geprüft und weiterhin das allmählige Abklingen der Isolationsverschlechterung mit fortschreitendem Temperaturrückgang nach Abschalten der Lampe beobachtet. Folgende kleine Tabelle gibt hierüber Aufschluß.

Tabelle 3.

Spannungsabnahme am Elektrometer	Hierzu nötige Zeit in Sekunden
700 auf 600 Volt	160 Sek. vor der Bestrahlung
700 „ 600 „	11 „ nach 5 Min. Bestrahlung
700 „ 600 „	38 „ 1 Min. nach Ausschalten der Lampe
700 „ 600 „	95 „ 5 „ „ „ „ „
700 „ 600 „	140 „ 25 „ „ „ „ „

Eine beträchtliche Verschlechterung der Isolierfähigkeit des Glases durch die Erwärmung ist hiernach unverkennbar. Die „Trägheit" der Verstärkerröhren, die Rosenberg lediglich dem Ionengitterstrom zuschreibt, dürfte sich demnach ungezwungener durch die verschiedene Erwärmung und damit Isolierfähigkeit des Glases an der Einschmelzstelle der Gitterzuführung deuten lassen, die bei jeder Glühstromänderung auftritt und erst nach längerer Zeit konstant wird.[1]) Auch die Erscheinung, daß nach Einschalten der Verstärkerröhre geraume Zeit verstreicht, bis der Anodenstrom — infolge Abnahme der negativen Gittervorspannung durch die allmählig steigende Leitfähigkeit des Glases — konstanten Wert angenommen hat, steht hiermit im Einklang, ebenso die Tatsache, daß Messungen des Verstärkungsgrades kurz nach Einschalten der Röhre, die allerdings infolge des noch langsam steigenden Anodenstromes und ungenügender Kompensation nur ganz roh ausgeführt werden konnten, ganz bedeutend höhere Werte ergaben, wie nach eingetretener Konstanz der Röhre.

1) Rosenbergs Versuch, eine Verschlechterung der Gitterisolation seiner Röhre durch äußerliche Erwärmung derselben in der Bunsenflamme nachzuweisen, mußte an der zu geringen Einwirkung auf die Einschmelzstelle im Innern der als Dewargefäß wirkenden Röhre scheitern.

Damit ergibt sich aber ein weiterer Gesichtspunkt, den Wirkungsgrad einer Röhre zu steigern. Als erstes Erfordernis haben wir bereits die Notwendigkeit besten Vakuums kennen gelernt. Gelingt es uns, die Isolation des Gitters durch Verminderung der Leitfähigkeit des Glases noch weiter zu verbessern, so wird man noch höhere Verstärkungsgrade erwarten dürfen.

Hierzu bieten sich zwei Wege: Entweder man verlegt die Gitterzuführung möglichst weit von den Einschmelzstellen der übrigen Elektroden weg oder man kühlt die Röhre während des Betriebes entsprechend ab. Da mir Röhren mit gesonderter Gitterzuführung nicht sogleich zur Verfügung standen[1]), wurden inzwischen Abkühlungsversuche der Röhre vorgenommen. Hiezu wurde über diese in dem Kupferkästchen ein sie dicht umschließendes, doppelwandiges, zylindrisches, mit dickem Filz überzogenes Messinggefäß mit abnehmbarem Deckel gestülpt. Zur Füllung wurde zunächst schmelzendes Eis, sodann eine Kältemischung von Eis und Kochsalz, schließlich ein Gemisch von fester Kohlensäure und Aceton verwendet und mit den Verstärkungsmessungen jedesmal so lange gewartet, bis Temperaturgleichgewicht eingetreten war, was an dem Galvanometer im Kompensationskreis bequem verfolgt werden konnte. Fig. 5 veranschaulicht die Zunahme der Verstärkung mit Abnahme der Temperatur. Wie erwartet, ist der Abkühlungseinfluß ein sehr beträchtlicher. Selbstverständlich kann das Diagramm nur ein ungefähres Bild des gesuchten Effektes geben, da die Temperaturabnahme der in Betracht kommenden Glasstellen im Innern der Röhre während des Abkühlungsprozesses nicht gemessen werden konnte. Immerhin läßt sich aus dem steilen Anstieg der Kurve entnehmen, daß die Grenze der Verstärkungszunahme bei einer Temperatur von — 79° noch nicht erreicht ist. Für diese Abkühlung war die Verstärkung bereits auf

1) Ein Auftrag an die Fa. C. H. F. Müller in Hamburg zur Herstellung einiger derartiger Plattenröhren wurde leider unter Hinweis auf die erst längere Zeit nach Auftragserteilung bekannt gewordene Patentanmeldung von Siemens & Halske, welche für ihren Röntgendosismesser Zweigitterröhren mit gesonderter Gitterzuführung „zum Zwecke der Erzielung eines großen Oberflächenwiderstandes" verwenden, abgelehnt.

15,5 Millionen gestiegen, eine Leistung, welche es bei der hier verwendeten und auf höchste Empfindlichkeit gebrachten Photozelle ermöglichen würde, das Licht einer Hefnerkerze in etwa 10 km Abstand von der Zelle noch galvanometrisch nachzuweisen. Nimmt man an, daß das Auge noch Sterne 6. Größe

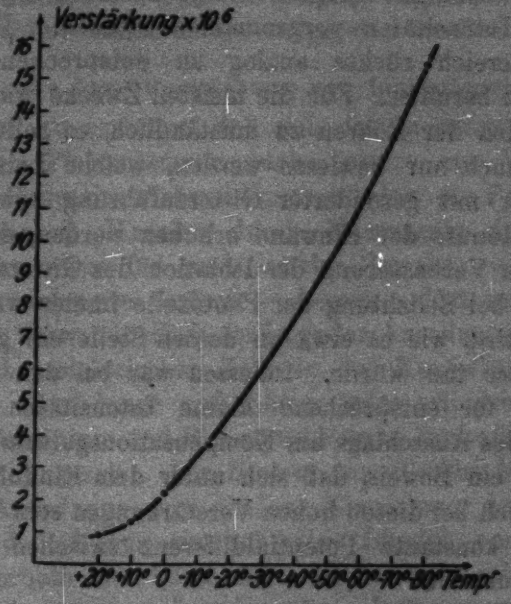


Fig. 5.

wahrzunehmen vermag, so empfängt es (bei 3 mm Pupillenöffnung) von einem solchen Stern nach Drude[1]) etwa dieselbe Energiemenge — $0{,}6 \times 10^{-8}$ Erg pro Sek. — wie von einer Hefnerkerze in 11 km Entfernung, so daß die Hoffnung berechtigt erscheint, mit Photozelle und Verstärkerröhre noch Lichtintensitäten photometrieren zu können, die an der Empfindlichkeitsgrenze des Auges liegen.

Entsprechend der Verbesserung der Gitterisolation und der dadurch bedingten höheren negativen Gittervorspannung nahm der Anodenstrom während eines Abkühlungsversuches

1) P. Drude, Lehrbuch der Optik, S. 472.

allmählich ab. Bei — 79° betrug er noch etwa 80 Proz. seines ursprünglichen Wertes bei Zimmertemperatur.

Da das Kalorimeter nur wenig Kältemischung faßte, auch längere Zeit gewartet werden mußte, bis die Abkühlung im Röhreninnern und damit die Verstärkung konstant geworden war, konnten nach eingetretener Konstanz keine ausführlichen Meßreihen, sondern lediglich einige Beobachtungen für verschiedene Intensitäten vorgenommen werden. Der Proportionalitätsbereich rückte analog zu entsprechend kleineren Intensitäten herunter. Für die meisten Zwecke wäre natürlich ein Abkühlen der Röhren zu umständlich, es sollte durch die Versuche auch nur bewiesen werden, welche Leistungen man von Röhren mit gesonderter Gitterzuführung erwarten kann. Vielleicht könnte der Einwand erhoben werden, daß mit fortschreitender Verbesserung der Isolation des Gitters sich dieses schließlich bei Belichtung der Photozelle immer weiter negativ aufladen wird, wie es etwa an dessen Stelle ein gut isoliertes Elektrometer tun würde. Indessen war bei den vorliegenden Versuchen für entsprechend kleine Intensitäten noch kein Kriechen des Ausschlags am Kompensationsgalvanometer wahrzunehmen, ein Beweis, daß sich unter dem Einfluß des Photostromes auch bei diesen hohen Verstärkungen sehr schnell eine bestimmte konstante Potentialdifferenz zwischen Gitter und Kathode ausbildet.

Die Verwendung von gut ausgepumpten Röhren ohne Ionengitterströme bringt mit sich, daß eine Veränderung der Verstärkungszahl, wie sie Rosenberg durch Variieren der negativen Gittervorspannung, des Heizstromes oder der Anodenspannung beliebig vornehmen konnte, nur in engen Grenzen möglich ist, weshalb hier ein anderer Weg eingeschlagen werden muß. Als zweckmäßig dürfte sich hierzu ein künstlicher Nebenschluß zwischen Gitter und Kathode der Röhre erweisen, welcher den Verstärkungsgrad rasch in jederzeit reproduzierbarer Weise zu ändern gestatten würde. Mit einem Satz von Nebenschlüssen verschiedener Größe, für welche sich wegen ihrer Konstanz am besten durch Kathodenzerstäubung leitend gemachte, eventuell in evakuierte Glasröhrchen eingeschmolzene Bernsteinstäbchen eignen dürften, könnte der Meßbereich der Anordnung in bequemster Weise innerhalb großer Grenzen

variiert werden.[1]) Provisorische Versuche mit Silitstäbchen als Nebenschlüsse bestätigten die Brauchbarkeit dieser Art der Verstärkungsregulierung.

Erwähnt sei noch, daß Versuche, eine Zweigitterröhre von Siemens & Halske mit Raumladungszerstreuungsgitter für vorliegende Zwecke zu verwenden, die infolge ihrer großen Kennliniensteilheit Vorteile versprach, wegen der enormen Ionengitterströme dieser Röhre aufgegeben werden mußten.

B. Versuche über Verstärkung von Ionisationsströmen.

Es stand zu erwarten, daß sich die im vorigen Abschnitt beschriebenen Plattenlampen auch bestens zur Verstärkung schwächster Ionisationsströme eignen würden, ein Problem, das von Siemens & Halske durch Herausgabe ihres neuen Röntgendosismessers für medizinische Zwecke, — also verhältnismäßig intensive Ströme — bereits gelöst wurde.[2]) Zur Prüfung der Verwendbarkeit vorliegender Anordnung wurde an Stelle der photoelektrischen Zelle in das Kupferkästchen eine kleine, etwa 9 cm lange und 2,5 cm weite zylindrische, rückwärts mit Aluminium und Blei verschlossene Ionisationskammer aus Messing eingesetzt. Ein System von Bleiblenden schützte die ganze Anordnung vor direkter Einwirkung der Röntgenstrahlen und ließ nur ein schmales Bündel von Strahlen, welche außerhalb der Blechhütte mittels einer kleinen, von einer zwanzigplattigen Lennerschen Influenzmaschine gespeisten Röntgenröhre erzeugt wurden, bei Umklappen eines Bleischirmchens in die Ionisationskammer eindringen. Um vergleichende Messungen anstellen zu können, wurde in dem Beobachtungshäuschen noch ein Saitenelektrometer nach Edelmann aufgestellt, dessen Saite an Stelle des Gitters der Ver-

1) Nach Rosenberg, der bei seinen Untersuchungen über die Ermüdungserscheinungen der Photozellen derartige Bernsteinstäbchen verwandte, bewährten sich diese als hoher konstanter Widerstand vorzüglich. Ebenso machen Siemens & Halske bei ihrem erwähnten Röntgendosismesser von solchen Nebenschlüssen zum Ändern des Verstärkungsgrades ihrer Röhre Gebrauch.

2) Inwieweit sich eine Methode von J. C. M. Brentano — beschrieben in Nature 108. S. 532. 1921 — bewährt, der eine Gegenschaltung zweier Verstärkerröhren unter Beeinflussung des Gitters von nur einer Lampe verwendet, ist mir nicht bekannt.

stärkerröhre mittels Paraffinwippen, die oberhalb der Ionisationskammer in dem Kupferkästchen Platz fanden, mit der Sonde der Ionisationskammer verbunden werden konnte. Die Intensität der Röntgenstrahlen wurde so gewählt, daß das Elektrometer bei einer Empfindlichkeit von 45 Skalenteilen pro Volt[1]) nur eine ganz langsame Aufladung zeigte.

Die Resultate waren recht befriedigend: Ein Ionisationsstrom, welcher eine Aufladung des Elektrometers im Mittel um 5 Skalenteile pro Minute verursachte, ergab mit der Verstärkerröhre gemessen einen Ausschlag von 120 Skalenteilen bei einer Empfindlichkeit des Kompensationsgalvanometers von $2{,}3 \times 10^{-9}$ Amp. Der Verstärkungsgrad betrug hierbei rund 900000. Berechnet man aus diesen Daten die Kapazität des Elektrometers inklusive Ionisationskammer, Wippen und Zuleitungen, so ergeben sich hierfür ungefähr 180 cm, ein Wert, der durchaus plausibel erscheint, wenn man die Kapazität der zwar kleinen aber eng eingebauten Wippen sowie der zwecks statischen Schutzes in geerdeten Metallröhren geführten Zuleitung zum Elektrometer berücksichtigt. Was Empfindlichkeit betrifft, war die Anordnung zweifellos schon jetzt der elektrometrischen Messung ebenbürtig: Reduziert man obigen Galvanometerausschlag von 120 Skalenteilen auf einen Ionisationsstrom, welcher ein Elektrometer gleicher Kapazität von der Empfindlichkeit 100 Skalenteile pro Volt in 1 Minute um 1 Skalenteil aufladen würde, so wären noch etwa 11 Skalenteile, bei gleichzeitiger Verkleinerung der Kapazität des Elektrometersystems auf 50 cm noch gut 4 Skalenteile Ausschlag am Galvanometer zu erwarten. Zieht man dabei in Betracht, daß die oben angeführte Galvanometerempfindlichkeit verhältnismäßig gering ist und sicher noch verzehnfacht werden könnte, daß ferner die bei elektrometrischen Messungen lästige Zeitbeobachtung hier entfällt, daß es endlich bei Verwendung eines Galvanometers von kürzer Einstelldauer[2]) möglich wäre, in

---

1) Wegen der dicken Saite im Elektrometer konnte dessen Empfindlichkeit ohne Gefahr labiler Verhältnisse nicht weiter gesteigert werden.

2) Bei dem benutzten Drehspulen-Galvanometer von Siemens & Halske betrug die kürzeste Einstelldauer etwa 15 Sek., eine verhältnismäßig lange Zeit, welche durch die Größe und Schwere des beweglichen Systems bedingt ist. Versuche mit einem Paschen-Galvanometer, das

derselben Zeit, die für *eine* elektrometrische Ablesung nötig ist, galvanometrisch mehrere Messungen vorzunehmen, bezw. eine ganze Beobachtungsreihe in Bruchteilen der bisher erforderlichen Zeit anzustellen, so erscheinen die Vorteile der neuen Methode entschieden beachtenswert. Durch Verwendung von Röhren mit gesonderter Gitterzuführung könnte die Leistungsfähigkeit u. U. noch beträchtlich weiter gesteigert werden. Ob allerdings bei dieser extremen Empfindlichkeit nicht schließlich innere Störungen sich bemerkbar machen, die im Prinzip der Elektronenröhre begründet sind, ob es ferner gelingt, die Anordnung dann noch genügend vor ihrem ärgsten Feind, den elektrischen Schwingungen zu schützen, muß vorläufig dahingestellt bleiben.

Um weitere Anhaltspunkte über die Leistungsfähigkeit der bisherigen Anordnung zu bekommen, wurde versucht, Intensitätsmessungen an Röntgenspektren damit vorzunehmen, nachdem ein solcher Aufbau anderweitig im Institut benutzt wurde und mit geringfügigen Änderungen der Verstärkermethode angepaßt werden konnte. Die bisher dort verwandte Ionisationskammer wurde übernommen und das Elektrometer durch die Verstärkerröhre ersetzt. Wenn sich auch die Empfindlichkeit der Methode schon jetzt als ausreichend erwies, gelang es in der aus äußeren Gründen beschränkten Zeit doch leider nicht, die ganze Anordnung, deren einzelne Bestandteile in zwei geerdete, durch biegsame Metallschläuche miteinander verbundene Blechkästchen eingebaut wurden, vor elektrischen Schwingungen jeder Frequenz so zu schützen, daß störungsfreies Ansprechen und einwandfreies Messen erreicht werden konnte. Eine möglichst kurze Verbindung zwischen Gitter der Verstärkerröhre und Sonde in der Ionisationskammer scheint nach den bisherigen Erfahrungen wesentlich hierfür zu sein,

---

als ein geradezu ideales Instrument bezüglich Einstelldauer und Dämpfung angesehen werden kann, scheiterten leider an dem bei hoher Astasierung zu geringen magnetischen Schutz des Instrumentes gegenüber den starken Erdströmen, unter welchen das hiesige Institut durch die Nähe der Straßenbahnen zu leiden hat. Die Verwendung eines Saitengalvanometers endlich käme nur bei völliger Störungsfreiheit der Anordnung in Betracht, da der Saite ohne Gefährdung keine großen Ausschläge zugemutet werden dürfen.

eine Bedingung, die sich wohl unschwer durch Verlegen der in jeder Lage arbeitenden Verstärkerröhre in ein Ansatzstück an der Ionisationskammer erfüllen ließe.

Zusammenfassung.

Durch Verwendung sehr gut evakuierter Verstärkerröhren wird nicht nur ihr Wirkungsgrad erhöht, sobald es sich um Verstärkung schwächster Ströme handelt, sondern auch der Proportionalitätsbereich zwischen unverstärktem und verstärktem Strom erweitert.

Hand in Hand damit geht eine Vereinfachung der Versuchsanordnung im Heizstromkreis der Röhre.

Verwendet man sogenannte Plattenröhren, so genügt eine Anodenspannung von 6 bis 12 Volt.

Durch Spezialkonstruktion der Röhren ist es möglich, den Verstärkungsgrad einer einzigen Röhre für schwächste Photo- bezw. Ionisationsströme auf mindestens 15 Millionen zu erhöhen. Für photoelektrische Messungen bedeutet dies die Möglichkeit, noch Lichtintensitäten zu photometrieren, die an dem Schwellenwert des menschlichen Auges liegen.

Ein ausgezeichneter Schutz der Anordnung vor elektrischen Schwingungen jeder Frequenz ist unerläßlich.

München, Physikalisches Institut der Universität,
September 1922.

(Eingegangen 16. Oktober 1922.)

3. *Über die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von Benzol, Aceton und Glycerin von der Temperatur;*

von W. Graffunder.

I. Einleitung.

Von der Annahme der Existenz von Polarisations- oder Verschiebungselektronen im Innern der Molekel ausgehend, soll nach Clausius-Mosotti die Größe $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d}$ eine von Temperatur, Druck und Aggregatzustand unabhängige Materialkonstante sein. Zahlreiche Untersuchungen sind zur Prüfung der Richtigkeit dieser Formel angestellt worden.[1])

Die häufigen und starken Abweichungen von der Konstanz dieses Ausdruckes führten Debye[2]) dazu, den Grund für diese Abweichungen in dem Vorhandensein permanenter elektrischer Momente im Innern der Molekel zu suchen. Debye kommt so zu dem vollständigen Ausdruck:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d}=b+\frac{a}{T}. \tag{1}$$

Hierbei ist b das von den Polarisationselektronen herrührende Glied (die Konstante der Clausius-Mosottischen Formel), das temperaturabhängige Glied a/T dagegen sucht dem Einfluß der Dipole gerecht zu werden.

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{T}{d}=a+b\cdot T \tag{2}$$

ist also eine lineare Funktion der Temperatur. Die *Neigung* der durch diese Gleichung dargestellten Geraden ist lediglich

1) Über die Literatur betreffend die Clausius-Mosottische Beziehung: Winkelmann, Handbuch der Physik IV. S. 149. Ferner: Graetz, Handbuch der Elektrizität I, S. 221.

Über die Druckabhängigkeit: G. Falckenberg, Ann. d. Phys. 61. S. 145. 1920.

2) P. Debye, Phys. Zeitschr. 13. S. 97. 1912.

bedingt durch die Verschiebungselektronen; das Glied a dagegen, der Abschnitt auf der Ordinate für $T = 0$, bestimmt die Größe des Dipolmomentes gemäß der Beziehung

$$\mu = \frac{3}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{K \cdot a}{N}} , \tag{3}$$

worin μ das Dipolmoment, N die Zahl der Moleküle pro cm³, K die Boltzmannsche Konstante bedeutet. Debye prüft die Richtigkeit seiner Theorie an dem Beobachtungsmaterial von Abegg und Seitz[1]) an Methylalkohol, Äthylalkohol, Propylalkohol, Isobutylalkohol, Amylalkohol und an Äthyläther, bei denen der Ausdruck (2) tatsächlich eine lineare Funktion der Temperatur ist. Statt der mit der Temperatur veränderlichen Dichte wird hierbei ein für den betrachteten Temperaturbereich mittlerer Wert in die Konstanten a und b genommen, eine Vereinfachung, die sich als unzulässig erwiesen hat.[2])

H. Isnardi und R. Gans[2]) zeigten nun, daß die Debyesche Theorie genaueren Messungen in weiterem Temperaturbereich, besonders an Stoffen mit großer Dielektrizitätskonstante, nicht gerecht werden kann und einer weiteren Ergänzung bedarf, welche Gans in der Berücksichtigung der zwischen den einzelnen Molekülen wirkenden Molekularfelder sieht. Im besonderen zeigte sich, daß der Ausdruck $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{T}{d}$ *keine* lineare Funktion der Temperatur zu sein braucht. Das Ergebnis der Gans-Isnardischen Theorie ist folgendes: 1. Sind in der Molekel keine permanenten Dipole, sondern nur quasielastisch gebundene Polarisationselektronen vorhanden, so gilt die Clausius-Mosottische Formel. 2. Sind außerdem noch permanente Dipole vorhanden, so besteht die Beziehung

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{d} = C + \frac{A}{T} \Phi \left(\frac{T}{B} \cdot \frac{\sqrt{1 - \gamma D}}{\sqrt{D}} \right) . \tag{4}$$

Hierin sind A, B, C und γ Konstante, jedoch ist γ nicht unabhängig von A, B und C, sondern es gilt:

$$\gamma = \frac{8}{3\pi} \left(\frac{BC}{A} \right)^2 .$$

---

1) Abegg u. Seitz, Zeitschr. f. phys. Chem. 29. S. 242. 1899.

2) H. Isnardi u. R. Gans, Physik. Zeitschr. 22. S. 280. 1921. Ferner: Zeitschr. f. Phys. 9. S. 158. 1922.

Φ ist eine von R. Gans[1]) in seinen analogen Überlegungen zur Theorie des Paramagnetismus eingeführte und tabellarisch niedergelegte Funktion.

In der Gleichung (4) ist C der Anteil der Verschiebungselektronen in dem Ausdruck $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{d}$. C läßt sich aus optischen Dispersionsmessungen bestimmen gemäß der Gleichung:

$$C = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right), \tag{5}$$

wobei λ_0 die Wellenlänge der ultravioletten Eigenschwingung bedeutet. A, B und C sind aus molekularen Konstanten zusammengefaßte Ausdrücke. Es ist

$$\begin{cases} A = \dfrac{16\sqrt{\pi}\,\mu^2 \cdot N_0^2}{9\,R\,M}, \\ B = \dfrac{4\,N_0^2\,\mu^2}{3\,R}\sqrt{\dfrac{\pi}{s^3 \cdot M \cdot N_0}}, \\ C = \dfrac{4\,\pi\,N_0 \cdot g}{3\,M}. \end{cases} \tag{6}$$

Hierin bedeutet:

N_0 die Loschmidtsche Zahl ($6{,}07 \cdot 10^{23}$),
R die universelle Gaskonstante ($8{,}315 \cdot 10^7$),
s den Moleküldurchmesser,
g die Konstante der quasielastischen Bindung,
μ das Dipolmoment.

Die Ermittlung der Konstanten A, B und C aus Gleichung (4) kann durch ein rechnerisches Näherungsverfahren geschehen.

C. Bergholm[2]) bemerkt in einer Arbeit über die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten einer Reihe von Flüssigkeiten, daß er auch Messungen an Benzol gemacht habe, ohne jedoch deren Ergebnisse mitzuteilen. Diese Messungen sollten daher wiederholt und außerdem der Temperaturkoeffizient von Aceton und Glycerin bestimmt werden. Während der Ausführung der hier mitzuteilenden Messung an Benzol veröffentlicht H. Isnardi[3]) ebenfalls Untersuchungen über den

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 50. S. 163. 1916.
2) C. Bergholm, Ann. d. Phys. 65. S. 129. 1921.
3) H. Isnardi, Die Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten in ihrer Temperaturabhängigkeit. Zeitschr f. Phys. 9. S. 161. 1922.

Temperaturgang der Dielektrizitätskonstante dieser Flüssigkeit. Diese Arbeit, die auf Veranlassung von Herrn Geheimrat Wachsmuth ausgeführt wurde, bildet den ersten Teil einer Reihe von Untersuchungen zur Klarlegung der polaren Eigenschaften von dielektrischen Flüssigkeiten und ihren Dämpfen und ihren Einflüssen auf ihr physikalisches Verhalten, die im Anschluß an eine kritische Untersuchung von P. Lertes[1]) im hiesigen Institut auf Anregung der Hrn. Gerlach und Lertes z. Zt. noch im Gange sind.

II. Versuchsanordnung.

Es wurde unter Verwendung von Elektronenröhren eine empfindliche Schwebungsmethode zur Messung der Dielektrizitätskonstante ausgearbeitet. Es war erforderlich, mit größter Sorgfalt alle Kapazitätsänderungen durch störende Nebeneinflüsse zu ermitteln und zu beseitigen. Die Methode der Schwingungserzeugung ist aus dem Schaltungschema Fig. 1 ohne weiteres

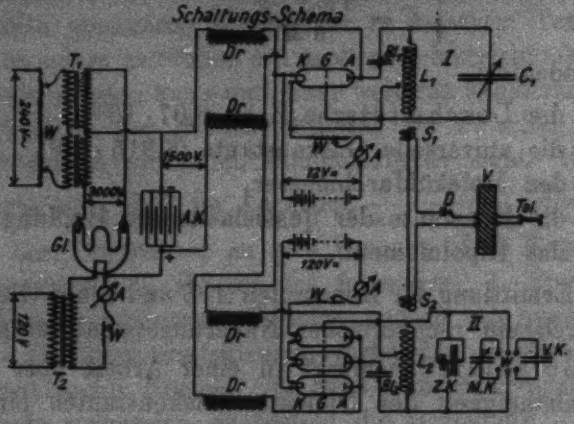


Fig. 1.

ersichtlich. In der Figur bedeuten: T: Transformator; W: Widerstand bzw. Spannungsteiler; A: Amperemeter; Gl: Glühkathodengleichrichter; $A.K$: Ausgleichkondensator von etwa 10 M.F.; Dr: Drosselspule; K, G, A: Kathode, Gitter, Anode der Elektronenröhren (Type von 75 Watt Leistung); Bl: Blockkondensator (0,25 M.F.); L: Selbstinduktionsspule: C: Kapazität; S_1 und S_2: Kopplungsspulen des Überlagerungskreises; D: Detektor; V: Verstärker; W: Quecksilberwippe; $V.K$: Versuchskon-

1) P. Lertes, Zeitschr. f. Phys. 6. S. 257. 1921 u. 8. S. 72. 1921.

densator; *M. K*: Meßkondensator; *Z. K*: variabele Zusatzkondensatoren.

I und II sind die beiden interferierenden Schwingungskreise, S_1 und S_2 die beiden Kopplungsspulen des Überlagerungskreises, die mit den beiden Selbstinduktionen L_1 und L_2 der beiden Schwingungskreise nur sehr lose gekoppelt sind. Durch den Detektor *D* werden die Schwingungen im Überlagerungskreise gleichgerichtet und über den Verstärker *V* im Telephon hörbar gemacht. — Gemessen wurde durch Substitution des Versuchskondensators *V. K.* mittels der Wippe *W* durch den geeichten Meßkondensator *M. K.* Die Einstellung der Kondensatoren, das Umlegen der Wippe und die Fernrohrablesung der Thermometer- und Kondensatoreinstellungen erfolgten aus über 2 m Abstand vom Schwingungskreis. Als Rückkopplung fand zuerst eine Spannungsteilerrückkopplung (in der Figur gezeichnet), später eine kapazitive Rückkopplung von „Telefunken" Verwendung, die eine leichte Veränderung der Wellenlänge von 300 bis 1000 m erlaubte. Die Verwendung dieser Rückkopplung bot den weiteren Vorteil, Fehler der Kapazitätsmessung durch starke Dämpfung zu vermeiden.

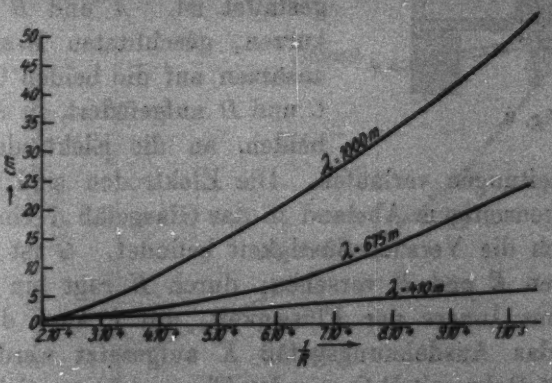


Fig. 2.

Es tritt nämlich bei wachsender Dämpfung, wie sie durch die Leitfähigkeit der Flüssigkeit im Innern des Versuchskondensators entsteht, eine Verringerung der Frequenz des Schwingungungskreises, d. h. eine scheinbare Zunahme der Kapazität ein. Diese scheinbare Zunahme ist aber für verschiedene Wellenlängen verschieden. Fig. 2 zeigt diese Kapazitätszunahme in Zentimeter

in Abhängigkeit von dem induktionsfreien Widerstand R in Ohm, der als Nebenschluß einem Luftkondensator parallel geschaltet war. Aus der Differenz der gemessenen Kapazitäten, wie sie sich bei der Messung einer Flüssigkeit mit starker Leitfähigkeit bei verschiedenen Wellenlängen ergibt, folgt aus diesen Kurven (Fig. 2): 1. die Größe des Widerstandes und somit die Leitfähigkeit der Flüssigkeit; 2. die Korrektion, die an der Kapazitätsmessung anzubringen ist, um die Dämpfungsfehler zu eliminieren. Diese Korrektionen hatten aber nur bei der Messung von Glycerin bei höheren Temperaturen beträchtliche Größe (s. u.).

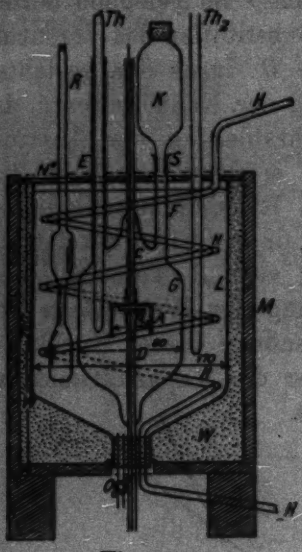


Fig. 3.

Fig. 3 zeigt einen Schnitt durch den Versuchskondensator (ungefährer Maßstab 1 : 8). A und B sind die beiden aus Messing gefertigten Elektroden, von denen die eine, A, zur Verringerung der Streuung der Kraftlinien dosenartig ausgestaltet ist. A und B sind mit kurzen, geschlitzten Messingrohransätzen auf die beiden Glasrohre C und D aufgefedert, in denen die beiden, an die Elektroden angelöteten Zuleitungen verlaufen. Die Elektroden sind mit etwa 1,5 mm gegenseitigem Abstand in das Glasgefäß G eingeblasen, in dem sich die Versuchsflüssigkeit befindet. G ist mit zwei Ansatzrohren E und F versehen; durch E ragt ein Thermometer Th ins Innere der Flüssigkeit, auf F kann durch den Schliff S das Ausdehnungsgefäß K aufgesetzt werden. Auf K ist ein U-Rohr mit P_2O_5 (in der Figur nicht gezeichnet) zum Fernhalten der Luftfeuchtigkeit befestigt. Das Kondensatorgefäß G befindet sich im Innern des gläsernen Heizgefäßes L. H ist eine Heizschlange aus Glas, durch die Wasserdampf aus einem Dampfkessel geschickt werden kann, R ein durch einen Elektromotor angetriebener Glasrührer. Als Heizflüssigkeit dient Petroleum, dessen Temperatur durch das Thermometer Th_2 gemessen wird. L befindet sich, durch Watte W gut wärmeisoliert, in

einer starkwandigen Holzkiste *M*. Die Kapazität des luftgefüllten Kondensators war $c_0 = 4{,}246$ cm, bezogen auf ε_{15} von Benzol = 2,283. Zur Abkühlung der Flüssigkeit wurde feste Kohlensäure in das Petroleumbad eingeworfen. Der Ausgleich der Temperatur der Heizflüssigkeit und der Versuchsflüssigkeit erfolgte bei Benzol und Aceton ziemlich schnell, bei Glycerin, besonders bei tiefen Temperaturen, aber nur sehr langsam, da infolge der großen inneren Reibung des Glycerins jeder Ausgleich durch Strömung unmöglich war. Vor jeder Messung wurde die Temperatur unter Beobachtung eines in der Heizflüssigkeit stehenden Beckmannthermometers bis zu drei Stunden konstant gehalten.

III. Messungen.

1. Benzol.

Zur Messung wurde reinstes, thiophenfreies Benzol von E. Merck-Darmstadt verwandt. Zwecks völliger Wasserentziehung stand es wochenlang über metallischem Natrium. Schwierigkeiten bereitete die Entfernung der im Benzol gelösten Gase, die schon unterhalb des Siedepunktes zur Bildung von Gasblasen Veranlassung gaben und dadurch die Meßreihe störten. Die

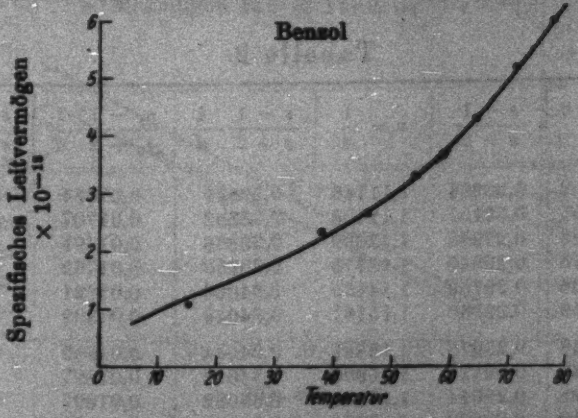


Fig. 4.

Entgasung erfolgte durch stundenlanges Auskochen im Inneren des Kondensators. Das spezifische Leitvermögen des Benzols war außerordentlich gering. Tab. 1 (Fig. 4) gibt die Änderung des Leitvermögens mit der Temperatur. Der eingeklammerte

Wert ist unsicher. Die Leitfähigkeitsbestimmungen wurden vorgenommen durch Messung der Stromstärke bei Anlegung von 250 Volt Gleichstrom an die Kondensatorplatten. Für Messung mit der Wheatstoneschen Brücke und Wechselstrom erwies sich der Widerstand als viel zu groß.

Tabelle 1.

Temp.	Widerstand in Ω	spez. Leitvermögen
15,2	$(17{,}5 \cdot 10^{10})$	$(1{,}07 \cdot 10^{-13})$
38,0	$8{,}12 \cdot 10^{10}$	$2{,}81 \cdot 10^{-13}$
45,8	$7{,}10 \cdot 10^{10}$	$2{,}64 \cdot 10^{-13}$
54,0	$5{,}68 \cdot 10^{10}$	$3{,}30 \cdot 10^{-13}$
64,2	$4{,}87 \cdot 10^{10}$	$4{,}29 \cdot 10^{-13}$
71,2	$3{,}61 \cdot 10^{10}$	$5{,}19 \cdot 10^{-13}$
77,8	$3{,}11 \cdot 10^{10}$	$6{,}02 \cdot 10^{-13}$

Tab. 2 gibt die Änderung der Dielektrizitätkonstante mit der Temperatur und die daraus berechneten Ausdrücke. Die Werte stimmen gut mit den Werten von Isnardi überein, außer bei den Temperaturen kurz oberhalb des Schmelzpunktes. Dort findet Isnardi eine unverhältnismäßig starke Zunahme der Dielektrizitätskonstante mit abnehmender Temperatur, während

Tabelle 2.

t	ε	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$	$\varphi = \frac{1}{d}$	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d}$	$\frac{\varepsilon_1-1}{\varepsilon_1+2}\cdot\frac{1}{d}$	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+u}\cdot\frac{1}{d}$
5	2,302	0,30264	1,11746	0,33819	0,01634	0,21095
10	2,295	0,30151	1,12408	0,33892	0,01707	0,21128
15	2,283	0,29955	1,18090	0,33876	0,01691	0,21095
20	2,276	0,29840	1,13773	0,33950	0,01765	0,21128
25	2,268	0,29709	1,14465	0,34006	0,01821	0,21149
30	2,259	0,29560	1,15167	0,34044	0,01859	0,21156
35	2,248	0,29378	1,15881	0,34044	0,01859	0,21086
40	2,239	0,29228	1,16606	0,34082	0,01897	0,21143
45	2,228	0,29044	1,17345	0,34082	0,01897	0,21119
50	2,219	0,28898	1,18096	0,34121	0,01936	0,21127
55	2,207	0,28690	1,18861	0,34101	0,01916	0,21092
60	2,198	0,28537	1,19640	0,34142	0,01957	0,21100
65	2,190	0,28400	1,20435	0,34204	0,02019	0,21123
70	2,180	0,28229	1,21245	0,34226	0,02041	0,21117
75	2,171	0,28074	1,22072	0,34271	0,02086	0,21128
80	2,161	0,27901	1,22916	0,34295	0,02110	0,21123

Tabelle 2 (Fortsetzung).

T	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{T}{d}$	$\frac{\varepsilon_1-1}{\varepsilon_1+2}\cdot\frac{T}{d}$	$\frac{\varepsilon-1}{d}$	$\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{d}$
278	94,016	4,5418	1,4549	0,46293
283	95,915	4,8314	1,4557	0,45807
288	96,891	4,8704	1,4509	0,45288
293	99,473	5,1706	1,4517	0,44703
298	101,339	5,4275	1,4514	0,44206
303	103,152	5,6313	1,4500	0,43677
308	104,854	5,7243	1,4429	0,43196
313	106,676	5,9365	1,4447	0,42572
318	108,379	6,0306	1,4410	0,41979
323	110,212	6,2545	1,4396	0,41458
328	111,852	6,2848	1,4347	0,40855
333	113,692	6,5157	1,4333	0,40338
338	115,608	6,8226	1,4332	0,39855
343	117,396	7,0017	1,4307	0,39301
348	119,261	7,2576	1,4295	0,38780
353	121,061	7,4475	1,4271	0,38245

bei meinen Messungen keine merkbare Änderung des Temperaturkoeffizienten zu beobachten war, obwohl das Benzol bis um 2° unterkühlt wurde.[1])

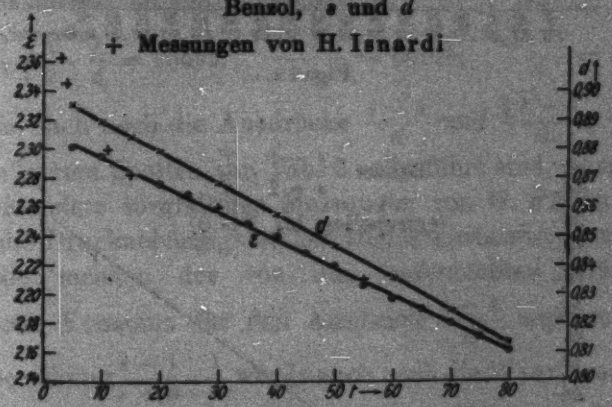


Fig. 5.

Fig. 5 zeigt den Gang von ε und d mit der Temperatur. Der Verlauf der Kurve ist vollkommen geradlinig. Der Wert

1) Den starken, von Isnardi gefundenen Anstieg hätte man durch die Annahme deuten können, daß sich oberhalb des Gefrierpunktes, vielleicht durch Assoziation oder Bildung von Molekülkomplexen ein permanentes Moment herausbildet.

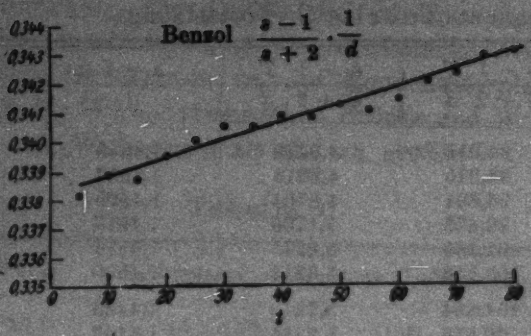


Fig. 6.

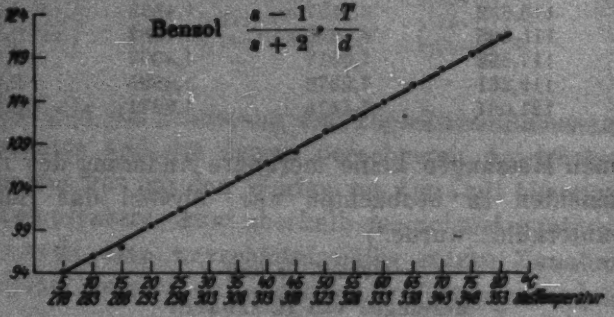


Fig. 7a.

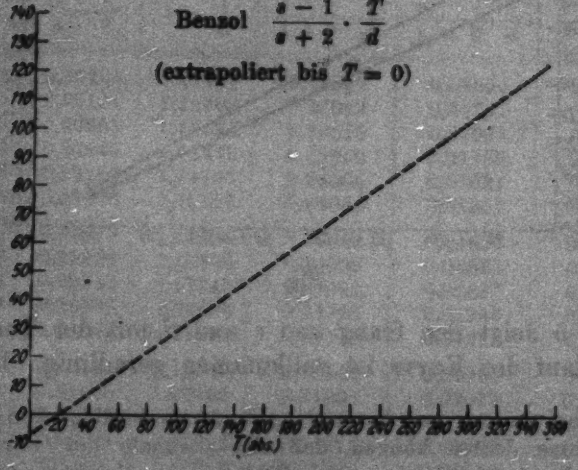


Fig. 7b.

des Clausius-Mosottischen Ausdrucks ist in Fig. 6 dargestellt. Er zeigt eine sehr geringe Zunahme mit wachsender Temperatur. Wegen des sehr großen Maßstabes der Ordinate treten die Meßfehler der einzelnen Punkte stark hervor. Fig. 7a und 7b zeigen den geradlinigen Verlauf des Ausdruckes $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{T}{d}$. In Fig. 7b ist die Gerade bis zum Schnittpunkt mit der Ordinate bei $T=0$ verlängert. Der Abschnitt auf der Ordinate ist sehr klein und negativ: Benzol hat nach der Debyeschen Theorie keine Dipole. Dasselbe Ergebnis erhielt P. Lertes[1]) aus dem fehlenden Dipolrotationseffekt. Berechnet man mit H. Isnardi aus der Dispersionskurve im sichtbaren Gebiet die Konstante C zu 0,32185, so folgt aus der fünften Spalte der Tab. 2 durch Subtraktion von C der Ausdruck $\frac{\varepsilon_0-1}{\varepsilon_0+2}\cdot\frac{1}{d}$, das ist die sechste Spalte der Tab. 2. Versucht man, mit diesen Werten die Konstanten A und B der Gansschen Beziehung (4) zu ermitteln, so ergeben sich keine endlichen Lösungen. Es sind auch nach der Theorie von Gans keine Dipole vorhanden.

Entsprechend den verschiedenen Ausdrücken für die Refraktionsformel im optischen Gebiet:

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}=\text{const};\qquad\frac{n^2-1}{d}=\text{const};\qquad\frac{n-1}{d}=\text{const}$$

wurden auch noch die Ausdrücke $\frac{\varepsilon-1}{d}$ und $\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{d}$, die in den beiden letzten Spalten von Tab. 2 aufgeführt sind, ausgerechnet. Die besonders sorgfältigen Messungen von G. Falckenberg[2]) über die Druckabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante hatten für die meisten der von ihm untersuchten Flüssigkeiten die beste Konstanz für den Ausdruck $\frac{\varepsilon-1}{d}$ ergeben. Gemäß der Beziehung $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+u}\cdot\frac{1}{d}$ wurde auch noch die Wienersche Formzahl u für Benzol berechnet und die Konstanz dieses Ausdruckes geprüft (Spalte 7). Es ergab sich $u=4{,}595$. Aus der Druckabhängigkeit bestimmte Ortvay[3]) die Wienersche Formzahl für Benzol zu 27.

1) P. Lertes, Zeitschr. f. Phys. 6. S. 56. 1921.
2) G. Falckenberg, Ann. d. Phys. 61. S. 145. 1920.
3) R. Ortvay, Ann. d. Phys. 36. S. 1. 1911.

In dem Temperaturbereich von 5 bis 80° beträgt die Änderung von

ε	d	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d}$	$\frac{\varepsilon-1}{d}$	$\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{d}$
6,30	9,55	1,40	1,93	1,89 Proz.

In demselben Temperaturbereich ergaben sich für die Temperaturkoeffizienten:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0{,}0019; \qquad \frac{dv}{dt} = 0{,}0015; \qquad \frac{d\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d}}{dt} = 0{,}0000635.$$

2. Aceton.

Die Messung geschah mit reinstem Aceton der Firma Merck. Zur Entgasung wurde es wie Benzol längere Zeit im Innern des Kondensators ausgekocht. Die Dichte betrug bei 21° C. 0,791, das entspricht nach einer Tabelle von M. Ebrog (zitiert nach Landolt-Börnstein) einem Gehalt von 100 Proz. Aceton. Das Leitvermögen war wesentlich größer als das von Benzol, zeigte aber keinen so starken Temperaturgang. Bei Zimmertemperatur betrug der Widerstand zwischen den Kondensatorplatten 2560 Ω, entsprechend einem spezifischen Leitvermögen von $7{,}32\cdot10^{-6}$ $1/\Omega$. Tab. 3 gibt die Ergebnisse der Messung der Dielektrizitätskonstante und der daraus abgeleiteten Größen. Die Volumänderung mit der Temperatur ist berechnet nach einer von Zander[1]) gegebenen Formel, die durch noch unveröffentlichte dilatometrische Messungen von H. Zschiesche im hiesigen Institut auf weniger als $^1/_2$ Promille bestätigt wurde. Die Meßgenauigkeit war bei Aceton wesentlich schlechter als bei Benzol und Glycerin, obwohl keine größeren prinzipiellen Schwierigkeiten bestanden. Fig. 8 zeigt den geradlinigen Verlauf von ε, Fig. 9 den ebenfalls geradlinigen Verlauf des Clausius-Mosottischen Ausdruckes, der eine wesentliche Zunahme mit wachsender Temperatur zeigt. Der Gang ist derselbe wie bei Benzol. Infolge der Zunahme des Clausius-Mossottischen Ausdruckes ist auch

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d}$$

(Fig. 10) nicht, wie Debye es verlangt, eine lineare Funktion

1) A. Zander, Dissert. Königsberg. Lieb. Ann. 214. S. 138. 1882.

der Temperatur. Eine Extrapolation bis $T = 0$ ist demnach nicht berechtigt und führt zu einem negativen Wert von α, der physikalisch bedeutungslos ist.

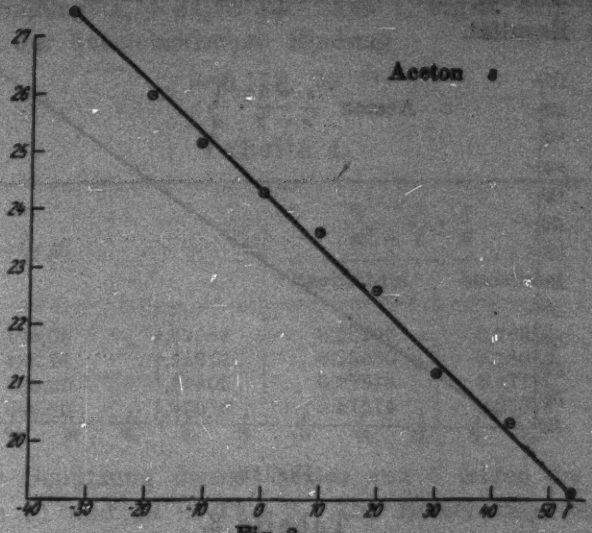


Fig. 8.

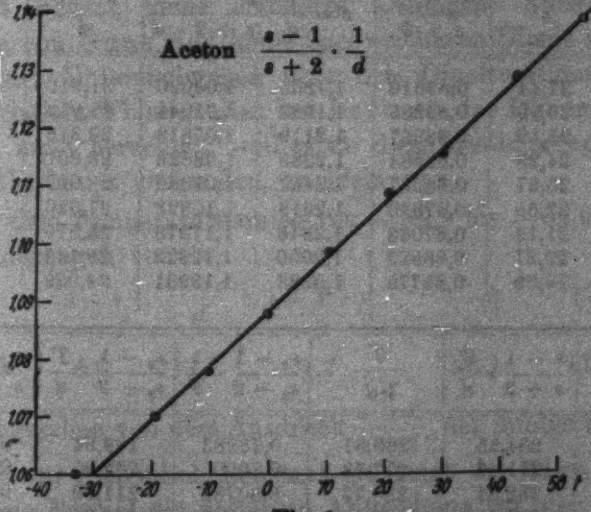


Fig. 9.

Während also Debye (vgl. S. 226) auf Grund der Messungen von Abegg[1]) zu dem Ergebnis kommt, daß permanente Momente

1) Abegg, a. a. O.

im Aceton vorhanden sein müssen, da der Ausdruck $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$ starke Abnahme mit zunehmender Temperatur zeigt, ergibt sich unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit von d das entgegengesetzte Resultat.

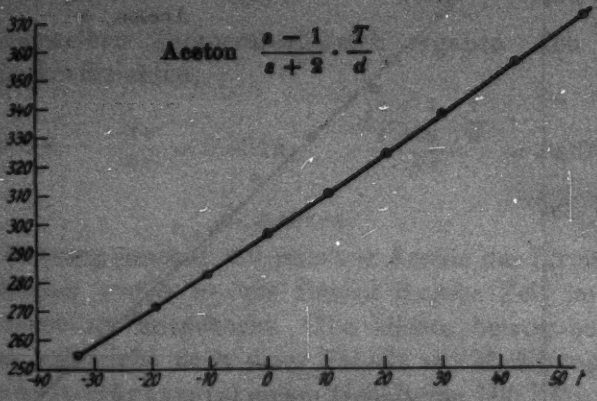


Fig. 10.

Tabelle 3.

t	ε	$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$	$v = \frac{1}{d}$	$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{d}$	$\frac{\varepsilon - 1}{d}$	$\frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{d}$
− 32,9	27,44	0,89810	1,1805	1,06020	31,213	5,0033
− 19,4	26,00	0,89285	1,1989	1,07044	29,972	4,9143
− 10,7	25,19	0,88967	1,2119	1,07819	29,316	4,8707
0	24,28	0,88584	1,2285	1,08826	28,601	4,8255
+ 9,7	23,57	0,88267	1,2447	1,09866	28,093	4,7982
+ 19,5	22,65	0,87880	1,2619	1,10828	27,320	4,7436
+ 30,2	21,19	0,87063	1,2816	1,11578	25,876	4,6184
+ 42,5	20,27	0,86529	1,3050	1,12922	25,147	4,5704
+ 54,0	19,09	0,85775	1,3288	1,13981	24,029	4,4755

T	$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{T}{d}$	$\frac{T}{\sqrt{d}}$	$\frac{\varepsilon_3 - 1}{\varepsilon_3 + 2} \cdot \frac{1}{d}$	$\frac{\varepsilon_3 - 1}{\varepsilon_3 + 2} \cdot \frac{T}{d}$	$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + u} \cdot \frac{1}{d}$
240,1	254,55	260,87	0,78983	189,64	0,86040
253,6	271,46	277,68	0,80007	202,90	0,86034
262,3	282,81	288,77	0,80782	211,89	0,86151
273,0	297,10	302,59	0,81789	223,28	0,86362
282,7	310,59	315,40	0,82829	234,16	0,86686
292,5	324,17	328,58	0,83791	245,09	0,86764
303,2	338,80	343,25	0,84541	256,33	0,86173
315,5	356,27	360,48	0,85885	270,97	0,86393
327,0	372,55	376,87	0,86894	284,14	0,86040

Aus der Dispersion für das optische Gebiet (Tab. 4) folgt nach Beobachtungen von Brühl für die Größe C in Gleichung (4) der Wert: $C = 0{,}27037$ und die Wellenlänge der ultravioletten Eigenschwingung $\lambda_0 = 91{,}56\ \mu\mu$. Aus C ergibt sich für die Konstante der quasielastischen Bindung

$$g = 6{,}178 \cdot 10^{-24}.$$

Tabelle 4.

$\lambda\ (\mu\,\mu)$	n	$\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d}$	
		beobachtet	berechnet
434,09	1,37064	0,28296	0,28298
486,14	1,36674	0,28080	0,28082
589,30	1,36409	0,27848	0,27706
656,30	1,36010	0,27574	0,27578

Unter Benutzung dieses Wertes von C folgen die Werte von Spalte 11 und 12 in Tab. 3. Die Berechnung der Konstanten A und B der Gleichung (4) mit diesen Werten gibt, wie bei Benzol, keine endlichen Lösungen: Auch nach der Theorie von Gans sind keine nachweisbaren Dipole vorhanden. Bei seinen Untersuchungen über den Dipolrotationseffekt bei dielektrischen Flüssigkeiten hat Lertes[1]) das Dipolmoment für Aceton nicht berechnet, weil es für diese Bestimmungsmethode, wenn überhaupt vorhanden, zu klein war.

In dem Temperaturbereich von $-32{,}9$ bis $+54{,}0°$ betragen die Änderungen von:

ε	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$	d	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \cdot \frac{1}{d}$	$\frac{\varepsilon-1}{d}$	$\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{d}$
35,8	4,6	11,7	7,2	26,1	11,1 Proz.

Abgesehen von dem Ausdruck $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$, der infolge des großen Wertes von ε ziemlich konstant ist, zeigt die Clausius-Mossottische Formel die geringste Abweichung von der Konstanz. Möglicherweise spielen bei den Untersuchungen Assoziationen der Moleküle eine große Rolle, die ein anderes, nach außen

1) P. Lertes, Zeitschr. f. Physik 6. S. 56. 1921.

wirkendes Dipolmoment vortäuschen können. Nach der Eötvösschen Regel des Temperaturgangs der molekularen Oberflächenspannung scheint für Aceton ($k = 1{,}8$; entnommen: W. Nernst, Theoretische Chemie) ein beträchtlicher Associationsgrad vorhanden zu sein.[1]) Dasselbe folgt aus der Troutonschen Regel.

Für die Wienersche Formzahl u ergibt sich 8,84. Falckenberg[2]) findet aus der Druckabhängigkeit für u ungefähr 41. Er weist ebenfalls auf die Möglichkeit von Polymerisation hin.

8. Glycerin.

Zur Messung gelangte reinstes Glycerin von Merck. Eine pyknometrische Dichtebestimmung ergab bei 17,5° ein spezifisches Gewicht von 1,2547. Nach Untersuchungen von G. Th. Gerlach[3]) entspricht dies einem Gehalt von > 97 Proz. Die Bestimmung des Brechungsexponenten n_D bei 17,5° ergab:

vor und nach der Untersuchung $n_D = 1{,}4701$.

Danach ist nach Gerlachs Messungen (a. a. O.) der Gehalt an Glycerin 98,3 Proz. Die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von dem Proz.-Gehalt ist sehr groß, so daß eine Änderung von 0,1 Proz. deutlich nachweisbar gewesen wäre. Die Firma Merck hatte den Gehalt mit etwa 98 Proz. angegeben.

Für die Ausdehnung des Glycerins gibt Emo[4]) folgende Formel:

$$v_t = v_0\,(1 + 0{,}_204853\,t + 0{,}_504895\,t^2).$$

Eigene Messungen ergaben eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit dieser Formel, wie Tab. 5 zeigt, wobei das Volumen bei 0° = 1,00 gesetzt ist. Auf Grund dieser sehr guten

---

1) Man muß unterscheiden zwischen der Frage nach dem elektrischen Moment eines Moleküles und der Frage nach dem dielektrischen Verhalten der Flüssigkeit. Daß Associationen im flüssigen Zustande z. B. die Existenz von permanenten Dipolen gänzlich verschleiern können, folgt sehr klar aus den Messungen von Jona an Methylalkohol*dampf* (Existenz von Dipolen) und den Messungen an flüssigem Methylalkohol, aus denen (Isnardi, a. a. O.) keinerlei Schlüsse auf Dipole zu ziehen sind.

2) G. Falckenberg, a. a. O.

3) G. Th. Gerlach, Zeitschr. f. analyt. Chemie. 24. 1885.

4) A. Emo, Ber. chem. Ges. 16. S. 1857. 1883.

Übereinstimmung wurde zur Berechnung der Dichteänderung die Emosche Formel herangezogen.

Tabelle 5.

t	v berechnet	v gemessen
25	1,012438	1,012488
35	1,01758	1,0176
45	1,02283	1,0228
55	1,02817	1,0282
65	1,03361	1,0336
75	1,03914	1,0391
85	1,04479	1,0448

Die große Zähigkeit des Glycerins, sirup- bis wachsartige Konsistenz bei tiefen Temperaturen, machte einen Wärmeausgleich durch Strömung unmöglich, so daß die Temperatur außerordentlich lange konstant gehalten werden mußte, um Temperaturgleichgewicht zu garantieren. Andererseits mußten die Messungen selbst sehr schnell ausgeführt werden, um eine Erwärmung durch die starken Dämpfungsverluste zu vermeiden. Wegen der Dämpfung bei hohen Temperaturen wurden zunächst zwei, schließlich drei Elektronenröhren parallel geschaltet. Die Leitfähigkeit nahm, entsprechend der Beweglichkeit, mit wachsender Temperatur rapid zu; sie betrug bei 20° C $2{,}6 \cdot 10^{-9}$ $1/\Omega$. Die Messungen bei tiefen Temperaturen wurden hauptsächlich deshalb angestellt, um die nach der Debyeschen Theorie[1]) der anomalen Dispersion zu erwartende Umkehr des Temperaturganges der Dielektrizitätskonstante zu beobachten. Durch Messung bei drei verschiedenen Wellenlängen wurde zweifelsfrei festgestellt, daß es sich tatsächlich um anomale Dispersion handelt, die sich infolge des großen Reibungskoeffizienten bis in das Gebiet so großer Wellenlängen verschiebt.

Rechnet man auf Grund der Debyeschen Dispersionstheorie den Verlauf von ε unter Berücksichtigung des Absorptionsindex $\varkappa$ aus der Formel[2]) für den Brechungsexponenten n für die verschiedenen Wellenlängen aus, so ergibt sich die in

1) P. Debye, Verhandl. d. D. Phys. Gesellsch. S. 770. 1913.
2) P. Debye, a. a. O. bes. S. 791, Formel 18.

Fig. 11 ausgezogen gezeichnete Kurve für ε und für $\varkappa$. Hierbei ist gesetzt für: die statische Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_0 = 60$, die Dielektrizitätskonstante bei schnellen Schwingungen $\varepsilon_\infty = 2{,}1$, den Molekülradius $a = 2 \cdot 10^{-8}$ cm, die absolute Temperatur $T = 290^0$, den molekularen Reibungskoeffizienten[1]) $\eta = 0{,}01$.

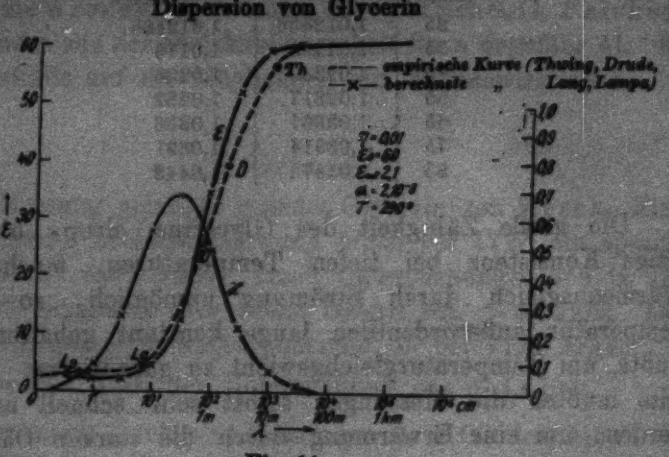


Fig. 11.

Die berechnete Kurve stimmt ziemlich gut überein mit den Beobachtungen von Lampa, Lang, Drude und Thwing, die in folgender Tabelle zusammengestellt sind. (Zitiert nach Landolt-Börnstein.)

Beobachter	Lampa[2])			Lang[3])	Drude[4])		Thwing[5])
λ (cm)	0·4	0·6	0·8	8·5	75	200	1200
ε	2,62	3,1	3,4	4,4	25,4	39,1	56,2

Besonders im oberen Teil würde die Übereinstimmung noch besser sein, wenn statt des Wertes 60 der Thwingsche

1) Die Einsetzung des gewöhnlichen inneren Reibungskoeffizienten für Glycerin verschiebt die Dispersion in das Gebiet viel zu großer Wellenlängen.

2) A. Lampa, Wien. Ber. 105. S. 587 u. 1049. 1896.

3) V. v. Lang, Wien. Ber. 105. S. 258. 1896.

4) P. Drude, Wied. Ann. 58. S. 1. 1896.

5) Ch. B. Thwing, Zeitschr. f. phys. Chem. 14. S. 286. 1894.

Wert 56,2 als statische Dielektrizitätskonstante eingesetzt würde[1]). Eine ausführliche Rechnung zeigt, daß sich bei Änderung des Reibungskoeffizienten um eine Zehnerpotenz auch das Dispersionsgebiet um eine Zehnerpotenz nach rechts verschiebt. Der Vergleich der berechneten Dispersionskurve mit der bei tiefen Temperaturen beobachteten Dispersion gestattet abzuschätzen, daß der molekulare Reibungskoeffizient bei $-20°$ 10^3 mal und bei $-35°$ 10^3 mal so groß ist als der Wert bei Zimmertemperatur. Diese Werte dürften jedoch nicht viel mehr als der Größenordnung nach zutreffend sein, entsprechend der nur qualitativen Gültigkeit der Debyeschen Theorie (vgl. hierzu Schrödinger, a. a. O.) und den willkürlich eingesetzten Konstanten.

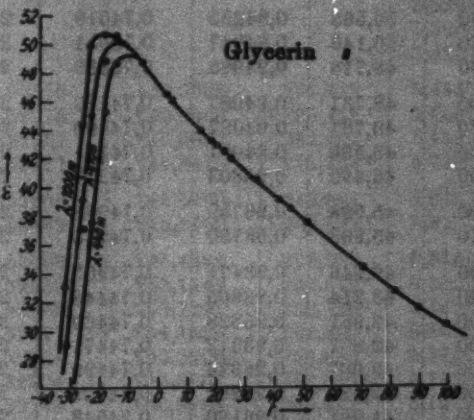


Fig. 12.

Tab. 6 (S. 244 u. 245) gibt die Ergebnisse der Messung der Dielektrizitätskonstante und die daraus berechneten Ausdrücke. Fig. 12 zeigt den Gang der Dielektrizitätskonstante und die Aufspaltung für verschiedene Wellenlängen im Dispersionsgebiet, Fig. 13 den Verlauf des Clausius-Mosottischen Ausdruckes, der mit wachsender Temperatur sehr schwach zunimmt.

Diese nur sehr geringe Zunahme hat zur Folge, daß die Kurve $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{T}{d}$ fast geradlinig ansteigt (Fig. 14). Eine Extra-

1) Auch die hier eingesetzten numerischen Werte ε_∞ und α sind nicht frei von Willkür.

Tabelle

t	λ	ε	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d}$	T	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{M}{d}$
−32,2	1000	32,992	0,91426	0,71238	240,8	171,541
−32,0	670	29,084	0,90348	0,70407	241,0	169,681
−31,8	400	19,80	0,8591	0,6697	241,7	161,866
−26,4	1000	44,856	0,93528	0,73006	246,6	180,034
−26,0	670	39,124	0,92705	0,72376	247,0	178,770
−25,6	400	37,186	0,92344	0,72107	247,5	178,464
−23,4	1000	49,864	0,94216	0,73645	249,6	183,819
−22,9	670	45,093	0,93630	0,73203	250,1	183,082
−22,5	400	37,446	0,92395	0,72252	250,5	180,998
−18,2	1000	50,858	0,94303	0,73695	254,8	188,288
−18,3	670	48,781	0,94092	0,73725	254,7	187,780
−18,1	400	45,197	0,93644	0,73382	254,7	187,053
−14,4	1000	50,565	0,94293	0,74019	258,6	191,415
−14,5	670	50,149	0,94247	0,73981	258,5	191,241
−14,5	400	48,716	0,94085	0,73853	258,5	190,912
− 5,6	1000	48,737	0,94087	0,74169	267,4	198,330
− 5,6	670	48,737	0,94087	0,74169	267,4	198,330
− 5,5	400	48,596	0,94071	0,74161	267,5	198,382
+ 3,2	400	46,490	0,93803	0,74271	276,2	205,189
4,4	1000	45,998	0,93750	0,74268	277,4	206,008
4,4	670	45,998	0,93750	0,74268	277,4	206,008
14,4	400	43,946	0,93471	0,74405	287,4	213,841
17,8	400	43,214	0,93365	0,74448	290,8	216,495
18,9	400	42,961	0,93328	0,74460	291,9	217,350
19,6	400	42,857	0,93312	0,74471	292,6	217,903
19,9	400	43,007	0,93334	0,74499	292,9	218,209
22,2	400	42,528	0,93262	0,74529	295,2	220,010
24,3	400	41,991	0,93180	0,74543	297,3	221,162
38,6	400	40,454	0,92934	0,74688	306,6	228,996
41,1	400	39,118	0,92703	0,74794	314,1	234,893
45,1	400	38,511	0,92595	0,74865	318,1	238,147
50,8	400	37,487	0,92401	0,74931	323,8	242,627
70,1	—	34,31*)	0,91738	0,75147	343,1	257,823
81,0	—	32,69*)	0,91352	0,75277	354,0	266,483
89,2	—	31,56*)	0,91061	0,75374	362,2	273,007
99,2	—	30,38*)	0,90735	0,75519	372,2	281,084

*) Aus je drei verschiedenen Messungen bei verschiedener Wellenlänge

polation des geradlinigen Teiles bis $T = 0$ liefert einen negativen Abschnitt auf der Ordinate: Nach der Theorie von Debye sind keine Dipole im Glycerin vorhanden.

6.

$\frac{1}{d}$	$\frac{\varepsilon-1}{d}$	$\frac{\varepsilon_1-1}{\varepsilon_1+2}\cdot\frac{1}{d}$	$\frac{\varepsilon_1-1}{\varepsilon_1+2}\cdot\frac{T}{d}$	$\frac{T}{\sqrt{d}}$	$\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{d}$	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+u}\cdot\frac{1}{d}$
0,77919	24,928				4,4072	
0,77928	21,885				4,1297	
0,77952	14,265				3,3347	
0,78058	33,842				5,1897	
0,78072	29,765				4,8206	
0,78085	28,256				4,6972	
0,78167	38,195				5,4641	
0,78184	34,474				5,1917	
0,78200	28,501				4,7211	
0,78360	38,912				5,5219	
0,78355	37,440				5,4163	
0,78364	34,635				5,2097	
0,78500	38,908				5,5266	
0,78497	38,580				5,5080	
0,78497	37,455				5,4223	
0,78831	37,632	0,52375	140,0508	237,416	5,4467	0,71782
0,78831	37,632	0,52375	140,0508	237,416	5,4467	0,71782
0,78836	37,522	0,52367	140,0807	237,421	5,4389	0,71766
0,79170	36,015	0,52477	144,9415	245,754	5,3397	0,71774
0,79215	35,637	0,52469	145,5490	246,897	5,3137	0,71724
0,79215	35,637	0,52469	145,5490	246,897	5,3137	0,71724
0,79603	34,186	0,52600	146,4662	248,388	5,2166	0,71768
0,79739	33,661	0,52653	153,1149	259,678	5,1808	0,71769
0,79784	33,479	0,52665	153,7291	260,730	5,1682	0,71768
0,79809	33,406	0,52677	154,1329	261,400	5,1638	0,71771
0,79820	33,530	0,52704	154,3700	261,685	5,1733	0,71806
0,79914	33,183	0,52734	155,6708	263,891	5,1496	0,71809
0,79999	32,792	0,52748	156,8198	265,911	5,1219	0,71788
0,80369	31,708	0,52890	162,1730	274,860	5,0481	0,71832
0,80682	30,750	0,53000	166,4730	282,134	4,9810	0,71844
0,80852	30,329	0,53071	168,8189	286,032	4,9520	0,71872
0,81092	29,588	0,53136	172,0544	291,585	4,8984	0,71859
0,81915	27,285	0,53352	183,0507	310,529	4,7271	0,71803
0,82404	26,114	0,53483	189,3298	321,354	4,6388	0,71781
0,82774	25,295	0,53580	194,0668	329,538	4,5758	0,71759
0,83231	24,453	0,53725	199,9645	339,569	4,5115	0,71773

ermittelter Wert.

Aus der Dispersionskurve im optischen Gebiet, Tab. 7 nach Beobachtungen von Listing (zitiert nach Landolt-Börnstein), folgt für C der Wert $C = 0{,}21795$ und für die

Wellenlänge der ultravioletten Eigenschwingung

$$\lambda_0 = 84{,}52\ \mu\mu.$$

Aus dem Wert von C ergibt sich die Konstante der quasielastischen Bindung zu $g = 7{,}886 \cdot 10^{-23}$.

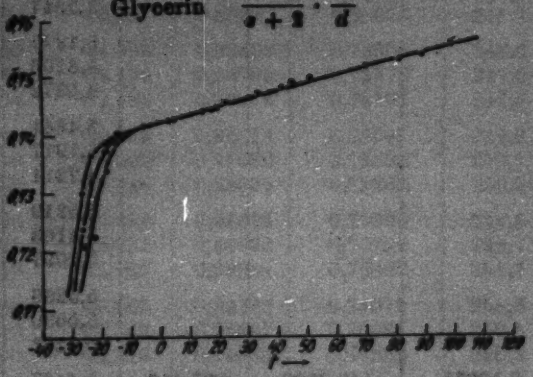


Fig. 13.

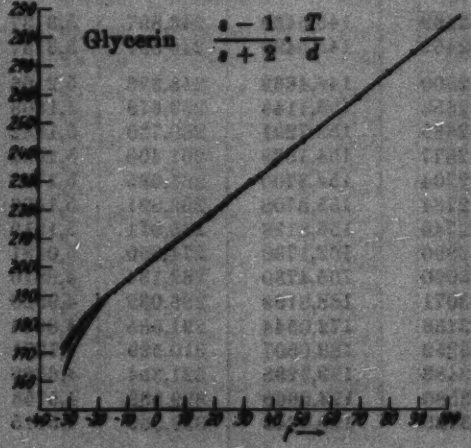


Fig. 14.

Die Anwendung der Theorie von Gans-Isnardi auf Glycerin ist nur möglich in dem Gebiet außerhalb der anomalen Dispersion, da sie im Absorptionsgebiet ihre Gültigkeit verliert. Dementsprechend sind in Tab. 6 die Ausdrücke

$\frac{\varepsilon_3 - 1}{\varepsilon_3 + 2} \cdot \frac{1}{d}$ (Spalte 10) und $\frac{\varepsilon_3 - 1}{\varepsilon_3 + 2} \cdot \frac{T}{d}$ (Spalte 11) nur für den Temperaturbereich $-5{,}6$ bis $+99{,}2^0$ ausgerechnet.

Tabelle 7.

λ ($\mu\mu$)	n	$\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{D}$	
		beobachtet	berechnet
396,86	1,48532	0,22832	0,22832
486,14	1,47656	0,22479	0,22474
589,30	1,47109	0,22258	0,22255
656,30	1,46877	0,22164	0,22164

Die weitere Durchrechnung nach der Theorie von Gans-Isnardi gibt jedoch für die Konstanten A und B der Gleichung (4) keine endlichen Ausdrücke. Demnach ist auch nach der Gansschen Theorie kein nachweisbares, permanentes Moment im Glycerin vorhanden. Dem widerspricht mit großer Wahrscheinlichkeit die beobachtete anomale Dispersion.[1]) Schrödinger[2]) hat allerdings darauf aufmerksam gemacht, daß es *möglich* ist, ohne die Annahme permanenter Dipole, sondern lediglich unter Voraussetzung aperiodisch gedämpfter Elektronen im Innern der Molekel zu formal denselben Gleichungen zu gelangen, wie Debye in seiner Theorie der anomalen Dispersion. Die Annahme derartiger aperiodisch gedämpfter Elektronen scheint aber nicht sehr naheliegend. Es ist deshalb anzunehmen, daß auch hier die Polymerisation der Moleküle ein anderes, nach außen wirkendes Dipolmoment vortäuscht, als in Wirklichkeit dem einzelnen Molekül zukommt.

Um ihre Konstanz zu prüfen, wurden ferner die Ausdrücke $\frac{\varepsilon - 1}{d}$ (Spalte 9 in Tab. 6) und $\frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{d}$ (Spalte 13) ausgerechnet. Die Wienersche Formzahl u ergab sich zu 3,688.

1) Auch P. Lertes findet Wahrscheinlichkeit für ein Dipolmoment, welches jedoch sehr klein sein soll. (P. Lertes, Zeitschr. f. Phys. 6. S. 56. 1921.)

2) E. Schrödinger, Verhandl. d. D. phys. Ges. 13. S. 1167.

Im Temperaturbereich von -5 bis $+99{,}2°$ betrugen die Änderungen:

von ε:	37,7 Proz.
$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$:	3,56 „
d:	5,58 „
$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{d}$:	1,78 „
$\frac{\varepsilon-1}{d}$:	35,0 „
$\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{d}$:	17,42 „

Die Clausius-Mosottische Beziehung ist also am besten erfüllt.

IV. Zusammenfassung und Ergebnisse.

Mit einer empfindlichen, zu diesem Zweck ausgearbeiteten *Schwebungsmethode* wird die Dielektrizitätskonstante und ihre Änderung mit der Temperatur von Benzol, Aceton und Glycerin gemessen. Eine Änderung der Dielektrizitätskonstante um $5 \cdot 10^{-3}$ war meßbar.

Bei *Benzol* in flüssigem Zustande wird gute Übereinstimmung mit den Messungen von H. Isnardi gefunden, außer bei den Temperaturen kurz oberhalb des Schmelzpunktes, wo Isnardi einen plötzlichen starken Anstieg der Dielektrizitätskonstante beobachtet, von dem selbst bei Unterkühlung keine Andeutung gefunden wurde. Es sind keine Dipole vorhanden.

Die Auswertung der Messungen an *Aceton* in flüssigem Zustande zeigt: Weder nach der Theorie von Debye noch nach der Theorie von Gans-Isnardi lassen sich Dipole nachweisen. Dieses Ergebnis kann vorgetäuscht sein durch Assoziation der Moleküle.

Messungen an *Glycerin* in flüssigem Zustande liefern weder nach der Debyeschen Theorie noch nach der Theorie von Gans-Isnardi die Möglichkeit, das Dipolmoment zu berechnen. Auch das kann ein durch Assoziation vorgetäuschtes Ergebnis sein. Die Existenz eines Dipolmomentes bei Glycerin ist trotzdem infolge der beobachteten anomalen Dispersion außerordentlich wahrscheinlich.

Es ist aus dem Temperaturgang der Dielektrizitätskonstante in flüssigem Zustand, zum mindesten wegen der Möglichkeit von

Polymerisation, allein nicht eindeutig möglich den Entscheid über den Dipolcharakter einer Flüssigkeit zu fällen oder gar das Dipolmoment quantitativ zu berechnen.

Die vorliegende Arbeit wurde im physikalischen Institut der Universität Frankfurt a. M. ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, dem Direktor des Institutes, Hrn. Geheimrat Professor Dr. R. Wachsmuth sowie Hrn. Professor Dr. E. Madelung und Hrn. Professor Dr. W. Gerlach für ihr der Arbeit stets entgegengebrachtes reges Interesse und ihre Hilfe mit Rat und Tat bei der Ausführung der Arbeit herzlichst zu danken.

Frankfurt a. M., August 1922.

(Eingegangen 4. September 1922.)

4. *Ein Verfahren, um graphisch gewonnene Schallaufnahmen auf dem üblichen glyphischen Wege (Sprechmaschine) wieder hörbar zu machen (Paka-Verfahren);*

von G. Panconcelli-Calzia.

(Aus dem Phonetischen Laboratorium der Universität Hamburg.)

Schallaufnahmen auf Wachsplatten mit Berliner-Schrift werden mit einer besonderen Schalldose gemacht. Diese besteht aus einem Gehäuse aus Metall, aus einer Glasmembran und aus einem steifen Schreibstift, der an dem Gehäuse und an der Membran so angebracht ist, daß er wagerecht zur Wachsplatte schreibt. Dieser Stift endigt in einem möglichst scharf gespitzten Saphir. Die Schalldose kann bei der Aufnahme entweder stehen oder liegen. Mit Hilfe eines Schalltrichters werden die Schallwellen gegen die Membran geführt, die dadurch in Schwingungen versetzt wird. Die Schwingungen werden von dem Stift in das Wachs hineingeritzt. Dieses Verfahren, Schallschwingungen aufzuschreiben, nennt man *glyphisch*.*) Nach der Aufnahme wird die Wachsplatte graphitiert und von ihr auf galvanoplastischem Wege eine Matrize gewonnen, wovon wiederum Abzüge auf einer Hartgußmasse angefertigt werden. Diese Abzüge (vulgo: Sprechmaschinenplatten) können auf jeder käuflichen Maschine mit einer Stahlnadel abgehört werden.

Wir haben in der Experimentalphonetik eine andere Kategorie von Apparaten, wobei man anstatt den Schall *in* den Stoff, also glyphisch, zu schreiben, ihn nur *auf* den Stoff fixiert. Die dazu nötige Schreibvorrichtung besteht grundsätzlich betrachtet aus denselben Teilen wie die obige für glyphische Aufnahmen, aber mit dem Unterschiede, daß der Schreibhebel etwas länger und biegsamer ist, in einer feinen Feder, z. B. aus Horn, endigt, und die sich drehende berußte Trommel eines Kymographions berührt. Anstatt eines Hebels kann man sich auch eines Lichtstrahls bedienen. Das Verfahren, den Schall so aufzuschreiben, nennt man, im Gegensatze zu dem glyphischen, *graphisch*.*)

Die glyphischen Apparate haben den graphischen gegenüber den Vorzug, daß sie eine akustische Wiederbelebung, also ein Abhören des Aufgenommenen, ermöglichen. Die graphischen Apparate aber haben den glyphischen gegenüber wiederum den großen Vorteil, daß sie nicht allein eine genetische,*) sondern auch eine genemische*) Untersuchung von phonetischen Vorgängen gestatten.

Um die Vorzüge der graphisch tätigen Apparate mit denen der glyphischen zu vereinigen, stellte ich 1920, von September bis Dezember, Versuche an. Ich übereilte mich nicht mit deren Bekanntmachung, weil ich abwarten wollte, ob sie nach längerer Zeit vor meiner eigenen Kritik noch standhalten würden. Da dieses nach zwei Jahren aber der Fall ist, so finde ich keine Bedenken, sie zu veröffentlichen. Hrn. Oberwerkmeister Schneider, der mir bei den Versuchen behilflich war, sei hier mein verbindlichster Dank ausgesprochen.

Eine Aufnahmeschalldose für glyphische Zwecke änderte ich in der Weise, daß der Stift biegsam gestaltet (Strohhalm) und anstatt mit einem Saphir mit einer feinen Feder aus Horn versehen wurde. Anstatt eine Wachsplatte als Aufnahmefläche zu benutzen, lötete ich auf den Teller des Aufnahmeapparates eine sauber geschliffene Scheibe aus Metall, deren obere Schicht versilbert war. Nach Berußung der Scheibe machte ich eine Sprachaufnahme.

Die Scheibe wies nun dieselben Spiralen wie eine gewöhnliche Sprechmaschinenplatte auf, mit dem Unterschied, daß sie nicht *in* den Stoff, sondern *auf* den Stoff geschrieben worden waren. Da, wo die Feder berührt hatte, sah man den weißen Untergrund der versilberten Scheibe wieder; schon makroskopisch waren die Schallschwingungen klar und deutlich. Ich entfernte den Teller nebst Scheibe vom Aufnahmeapparat und ließ daraus in einer Klischieranstalt auf dem üblichen photochemischen Wege ein Klischee aus Kupfer (Strichätzung) in Originalgröße anfertigen und zwar so, daß die schwarz gebliebenen Teile der Scheibe tief geätzt wurden; die Schallschwingungen erschienen also im Relief. So gewann ich eine Matrize, von der ich eine Hartgußplatte in einer Schallplattenfabrik herstellen ließ, um sie auf einer Sprechmaschine abspielen zu können.

Was meine obige Aufnahme anbelangt, so hatten sich bei dem Versuch aber zwei Fehler eingeschlichen:

1. Die Drehungsgeschwindigkeit des Tellers war aus Versehen so groß gewählt worden, daß sie auf keiner gewöhnlichen Wiedergabemaschine erreicht werden konnte; eine Wiedergabe der aufgenommenen Laute war wohl zu hören, da aber die Umdrehungsgeschwindigkeit nicht ausreichte, so blieb sie zu tief und unverständlich.

2. Das von der Klischieranstalt benutzte Kupfer hatte nicht die für eine zum Stanzen bestimmte Platte nötige Beschaffenheit.

Trotz dieser zwei Fehler halte ich meine Aufgabe, eine graphisch gewonnene Aufnahme auf dem üblichen glyphischen Wege hörbar zu machen, für grundsätzlich gelöst.

Ich überlasse nun der Technik und der Industrie, dieses von mir *Paka* genannte Verfahren weiter auszubauen und weise am Ende auf die Vorzüge hin, die es gegenüber der bisher üblichen Fixierung von Schallschwingungen in den Stoff besitzt:

1. Es macht die teueren, zerbrechlichen und schweren Wachsplatten überflüssig.

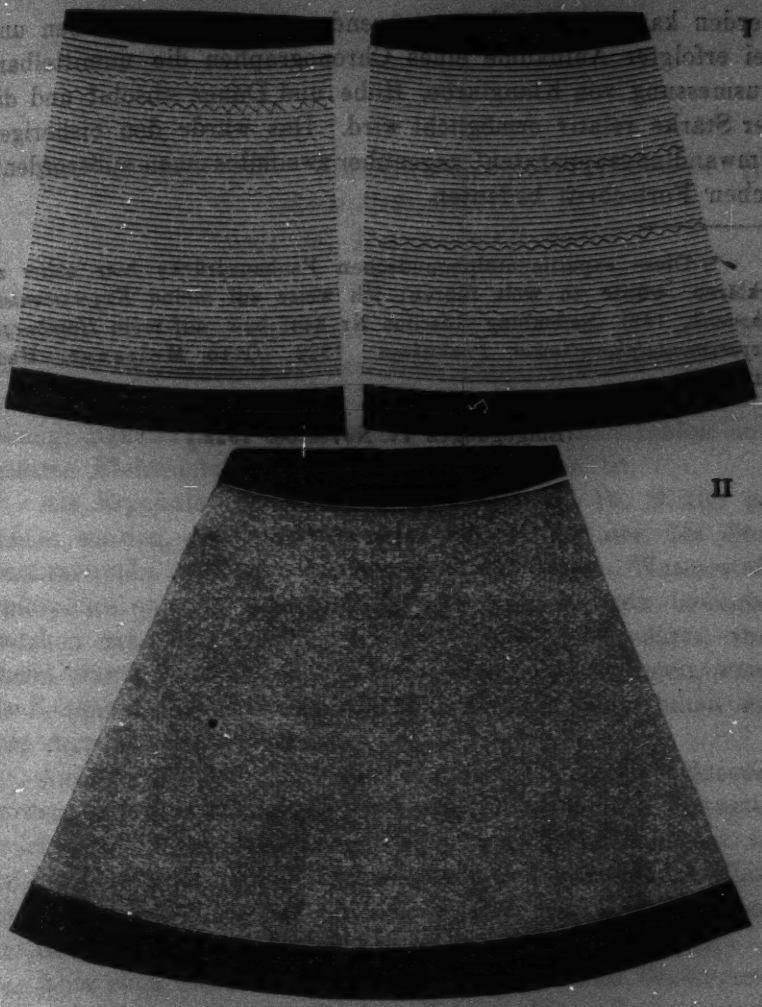
2. Es beseitigt das galvanoplastische Matrizierverfahren.

3. Es ermöglicht, Aufnahmen auf Platten von 50—60 bis 100 cm und mehr Durchmesser zu machen, und so den Inhalt drei- bis viermal länger zu gestalten. Der Durchmesser der Wiedergabeplatte kann dann bei dem Vervielfältigungsverfahren auf photochemischem Wege auf 25 cm (das ist heute der übliche Durchmesser der im Handel erhältlichen Sprechmaschinenplatten) reduziert werden. Eine so gewonnene Hartgußplatte würde also ca. 9—12 Minuten Spieldauer im Gegensatz zu den bisherigen Platten, deren Spieldauer bei einem 25 cm Durchmesser nur 3 Minuten und bei einem 30 cm Durchmesser ca. 4 Minuten aufweist, haben.

4. Es ermöglicht — wie schon aus 3. hervorgeht — bei der Vervielfältigung eine beliebige mechanische Regulierung der Stärke der Wiedergabe.

5. Es erfordert keine Änderungen an den im Umlauf befindlichen Wiedergabeapparaten, da die nach diesem Verfahren gewonnenen Platten Furchen aufweisen, und so auf jeder käuflichen Sprechmaschine spielbar sind. Höchstens bedürfte es einer neuen Art von Nadel, weil — wenigstens bei meiner Versuchsplatte — die Ränder der Glyphen verschieden von denen der jetzt üblichen Platten sind.

6. Es hat neben diesen praktischen Vorzügen auch einen wissenschaftlichen Wert insofern, als aus der Matrize (Klischee) ein Druckabzug der Schallschwingungen (vgl. Fig.) gewonnen



Die Originalmatrize von zwei Schallaufnahmen ließ ich auf einem Holzblock befestigen. Da die, die Schallschwingungen enthaltenden Spiralen auf der Matrize im Relief erscheinen, so hatte ich auf diese Weise Klischees gewonnen. Druckabzüge derselben zeigen die Schallschwingungen schwarz auf weiß; ihre Deutlichkeit ist von der Aufnahme abhängig.

Obige Bilder sind ein Bruchstück von Druckabzügen und stellen in *Originalgröße* die Schallschwingungen nach dem Paka-Verfahren (I) bzw. nach der üblichen Aufnahmemethode (II) dar. Auf (I) sind die Schwingungen ohne weiteres, auf (II) dagegen nur bei einer 6—10 fachen Vergrößerung sichtbar.

werden kann, so daß bei genügender Amplitude derselben und bei erfolgter Aufnahme eines Chronographen die unmittelbare Ausmessung von Klangfarbe, Höhe und Dauer absolut und die der Stärke relativ ermöglicht wird. Das würde den bisherigen Umwandlungsapparaten*) gegenüber zweifellos einen außerordentlichen Fortschritt bedeuten.

---

*) Diese experimentalphonetischen Fachausdrücke hier näher zu erklären, würde zu weit führen; ich weise auf meine *Experimentelle Phonetik*, 1921 (Sammlung Göschen Nr. 844) bzw. auf mein *Hamburger Experimentalphonetisches Praktikum*, 1922 (Otto Meissner, Hamburg) hin.

(Eingegangen 17. November 1922.)

5. *Zur Frage des Umladungsmechanismus im Kanalstrahl;* *von H. Baerwald.*

Hrn. W. Wien verdanke ich den Hinweis auf eine unrichtige Folgerung aus meinen Messungen über die Sekundärstrahlung von Kanalstrahlen in Gasen, über die in einer Mitteilung: „Quantitative Bestimmung der von Kanalstrahlen ausgelösten Elektronenmengen“ [1]) berichtet worden ist.

Als Ergebnis der Messungen war in Nr. 16, S. 183 gefunden worden, daß im Wasserstoffkanalstrahl, der, bei einer Funkenstrecke von 5 mm erzeugt, in einer Wasserstoffatmosphäre von 0,1 mm Hg Druck verläuft, auf ein bewegtes Teilchen rund 350 ruhende Molekel, auf ein sekundäres, vom Strahl erzeugtes Elektron 180 ruhende Molekel kommen, wenn als Zeitdauer der Wirkung die Sekunde, als Raumeinheit das ccm zugrunde gelegt wird.

Aus der letzten Zahl war in Nr. 17, S. 184 geschlossen worden, daß die Häufigkeit der Zusammenstöße von bewegten Teilchen mit ruhenden Gasmolekeln rund 200 mal größer ist als die Häufigkeit der Zusammenstöße mit sekundären Elektronen, ein Ergebnis, das für eine Theorie der Umladung von Kanalstrahlen in Betracht zu ziehen war.

Aber eben dieser Schluß auf die Häufigkeit der Zusammenstöße mit Elektronen enthält einen Fehler. Die stillschweigende Voraussetzung für ihn ist die, daß sowohl für die Molekel des ruhenden Gases, wie für die sekundären Elektronen der Fall des stationären Gleichgewichtes in dem vom Kanalstrahl durchsetzten Raum gegeben sei. Dies ist wohl für die Molekel des Gases, nicht aber für die ausgelösten Elektronen der Fall. Denn während in jedes vom Strahl durchquertes Raumelement pro Sekunde ebenso viele Gasmolekel aus den Nachbarbereichen

1) H. Baerwald, Ann. d. Phys. 65. S. 167—188. 1921.

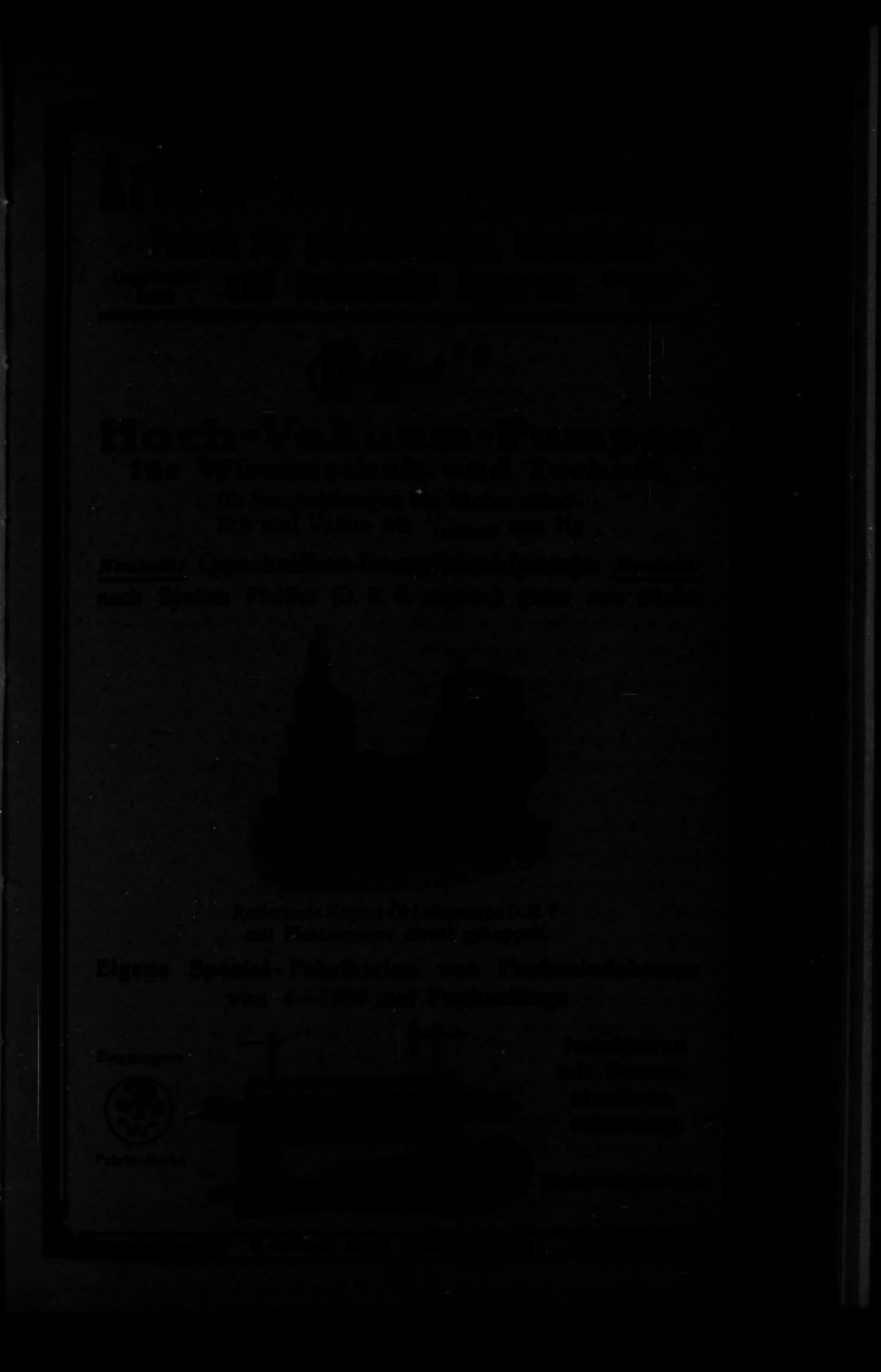
eintreten, wie aus ihm in die Nachbarbereiche übergetreten sind, enteilen die in ihm sekundlich erzeugten Elektronen mit rund 10^8 cm/sec. Geschwindigkeit, ohne daß aus der Umgebung ihm ein Ersatz zuströmte. Für die Zusammenstöße der Elektronen mit Kanalstrahlteilchen kommt vielmehr nur der Teil von ihnen in Betracht, welcher durchschnittlich in der Sekunde im Erzeugungsraum verbleibt. Nimmt man der Einfachheit wegen an, daß alle Elektronen dieselbe Geschwindigkeitsrichtung haben, so verteilen sich die sekundlich in einem Element des Strahlenraumes erzeugten Elektronenmengen N über einen Zylinder, dessen Grundfläche der Querschnitt des betrachteten Raumelementes, und dessen Höhe die Geschwindigkeit v der Elektronen ist. Dem Raumelement selber verbleiben mithin nur N/v Elektronen, welche für die sekundliche Häufigkeit der Zusammenstöße in Ansatz zu bringen sind.

Daher kommen auf ein Elektron im Raumelement des Strahls nicht rund 200, sondern etwa $200 \cdot v = 2 \cdot 10^{10}$ Molekel des ruhenden Gases, und die Häufigkeit der Zusammenstöße eines Strahlteilchens mit Molekeln und Elektronen verhält sich nicht wie 200 : 1, sondern wie $2 \cdot 10^{10} : 1$. Die durch Zusammenstoß mit Elektronen im Kanalstrahl bewirkte Umladung ist also praktisch vollkommen zu vernachlässigen.

Darmstadt, Dezember 1922.

(Eingegangen 7. Dezember 1922.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



1923. № 4.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 70.

1. *Experimentaluntersuchung über die Glimmlichtverstärkerröhre;* *von Erich Marx.*

§ 1. Einleitung.

1. In einer Abhandlung[1]) „Charakteristik und Theorie der Lautverstärkung in Entladungsröhren mit höherem Gasdruck" wurde von mir Schaltung und Theorie einer Lautverstärkerröhre angegeben. Die Theorie wurde auf Grundlage der experimentell erhaltenen Kurve der Abhängigkeit der Anodenstromstärke von der Klemmenspannung der Steuerelektroden entwickelt. In folgendem wird auf die experimentelle Bearbeitung und die Konstruktionseinzelheiten näher eingegangen. Zunächst sollen einige Worte über das Problem selbst vorausgesandt werden.

2. Die Lautverstärkerröhren hatten in ihrer ersten Form, der „Liebenröhre", höheren Druck und Glühelektroden. Die Entwicklung führte in der Folge dahin, tunlichst unter Vermeidung von Ionenstoß möglichst reine Raumladungscharakteristik in höchstem Vakuum herzustellen. Die Verhältnisse werden in diesem Falle experimentell und theoretisch relativ einfach und durchsichtig. Die in der Liebenröhre und in gleicher Weise in den neueren Hochvakuumröhren benutzte Glühelektrode bedingt aber eine auf Strom beanspruchte Heizbatterie, also Akkumulatoren von einer, gegenüber der Relaisbatterie des Anodenkreises hohen Ladekapazität. Technisch erscheint eine solche Batterie unter Umständen als schwerwiegender Nachteil der Verstärkeranordnung. Dies war vor allem bei den Anordnungen der Fall, welche nicht fest aufgestellt werden können, wie beim Nachrichtendienst im Felde; aber auch sonst ist die Beschaffung und Haltung von auf Strom beanspruchten Batterien häufig technisch nachteilig gegen-

1) E. Marx, Ann. d. Phys. 67. S. 78—125. 1922.

über der Möglichkeit, lediglich auf Spannung beanspruchte, mit wenigen Milliamperen belastete Batterien zu benutzen.[1])

Als Ersatz für die aus der Glühelektrode frei werdenden Kathodenstrahlen liegt es nahe, Alkalielektroden und Edelgasfüllung zu benutzen, um die erforderliche Batteriespannung auf ein Minimum zu bringen. Die technische Einführung dieser Konstruktionselemente für Lautverstärker findet sich zuerst in einer Patentanmeldung des Hrn. Schröter[2]), dem ja die Technik in verschiedensten Anwendungen die Nutzbarmachung des niedrigen Kathodenfalls in Edelgasröhren verdankt. Unabhängig von Hrn. Schröter hat der Verfasser, Hr. Nienhold, Hr. Kossel und andere, Lautverstärkeranordnungen angegeben, welche Edelgas und Alkalielektroden benutzen. Technische Einführung hat bisher keine dieser Anordnungen gefunden.

Will man die praktisch erforderliche Entladespannung noch weiter erniedrigen, so kann man dies dadurch erwirken, daß man ungedämpfte Schwingungen, die möglichst außerhalb des Hörbereichs in ihrer Frequenz liegen, der Entladungsbahn überlagert, worauf jedoch hier nicht näher eingegangen werden kann.[3])

§ 2. Allgemeine Übersicht über die Konstruktionsprinzipien.

3. Während man bei den Glühelektrodenröhren prinzipiell mit *einem* Zwischennetz, also mit 3 Elektroden auskommen kann, liegen die Verhältnisse bei Röhren mit Alkalielektroden anders. 2 Elektroden, von denen eine netz- oder diaphragmaartig ist, sind zur Lieferung der Elektronen an Stelle der aus der Glühelektrode entstehenden erforderlich; *mindestens* eine weitere Netzelektrode muß als Steuerelektrode eingeführt werden. Hierzu kommt dann die Anode, so daß sich

---

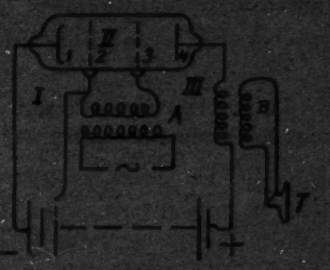
1) Namentlich im Felde machte sich die Heizbatterie als großer Nachteil geltend; Hr. Dr. Löwenstein, z. Zt. Hauptmann in einem Bayr. Pion.-Reg., regte mich zur Bearbeitung des Problems der Verstärkerröhre ohne Heizbatterie an, und verschaffte mir von der Heeresverwaltung als Vergleichsverstärker Anordnungen der deutschen Firmen. — Die von mir auf Grund dieser Arbeit angegebene Konstruktion ist in den Besitz von A. E. G., S. & H. und Telefunken zu gewerblicher Herstellung übergegangen und durch die D.R.P. 351 285, 305 557, 331 417 sowie 76 309 geschützt.

2) F. Schröter, D.R.P. 299 654.

3) E. Marx, D.R.P. 349 784.

als Minimum der Elektrodenzahl 4 ergibt. Alle Versuche, auch die oben erwähnten von Hrn. Schröter, mit nur 3 Elektroden auszukommen, haben meines Wissens in keinem Falle zu wirksamen Verstärkeranordnungen geführt.

Das Prinzip der Lautverstärkung beruht bei den folgenden Versuchen ganz allgemein darauf, die zu verstärkende E.M.K. auf Relaiselektroden so einwirken zu lassen, daß ein Minimum der Schwächung dieser E.M.K. eintritt. Durch die Relaiselektroden wird alsdann ein Lokalstromkreis, der „Anodenkreis" so beeinflußt, daß eine starke Stromschwankung im Anodenkreis erzeugt wird. Diese Stromschwankung muß, um zur Lautverstärkung verwendbar zu sein, der zu verstärkenden E.M.K. proportional werden. Verwendet man 4 Elektroden, so kann, etwa wie in Fig. 1, geschaltet werden.



Schaltung der Vier-Elektrodenröhre.

Fig. 1.

Hier bedeutet I den Erzeugungskreis der Elektroden, der aus einer Alkalielektrode 1 als Kathode und einer netzförmigen oder diaphragmaförmigen Anode 2 besteht; II den Kreis der „Relais-" oder „Steuer"-Elektroden, welcher den Transformator *A* enthält. Auf diesen wirkt der zu verstärkende Wechsel- bzw. Undulationsstrom ein; III den „Anodenkreis". Elektrode 2 ist hier Anode des Kreises I und, soweit kein Durchgriff aus I stattfindet, Kathode des Kreises III.

Die über den Transformator *A* auf die Elektroden 2 und 3 wirkende, zu verstärkende elektromotorische Kraft soll dann eine Stromschwankung im Anodenkreise III hervorrufen, die eine vielfach verstärkte elektromotorische Kraft im Transformator *B* erzeugt. — Da möglichst wenig Energie in II verbraucht werden soll, wird die Beeinflussung der Primärelektronen, welche von der Elektrode 1 ausgehend, durch das Netz 2 in den Stromkreis III gelangen, eine im wesentlichen elektrostatische, d. h. ihre Geschwindigkeit verzögernde oder beschleunigende sein müssen, und es wird sich unter Umständen sogar empfehlen, nur eine der beiden Elektroden, entweder Elektrode 2 oder Elektrode 3, mit der Sekundärspule des Transfor-

mators zu verbinden, um ein Minimum der Energie des zu verstärkenden Kreises zu verbrauchen.

Eine möglichst große Stromschwankung im Anodenkreise wird allgemein dann auftreten, wenn die Steuerelektroden an solcher Stelle der *Entladungsbahn liegen, an der eine maximale Beeinflussung der Stromspannungscharakteristik* der Entladungsröhre durch die geschilderte elektrostatische *Verschiebung der Elektrizitätsträger in der Entladungsbahn eintritt*, wobei aber die Bedingung innezuhalten ist, daß nach Aufhören der Einwirkung der zu verstärkenden Spannung, sich der Anfangszustand wieder herstellt, also ein völliges Umklappen der Charakteristik, eine vollkommene Labilität, vermieden wird.

§ 3. Die zwei Arten der elektrostatischen Beeinflussung der Elektrizitätsträger der Entladung durch die Steuerelektroden.

4. Die elektrostatische Beeinflussung der Elektrizitätsträger braucht sich bei Röhren mit höherem Druck keineswegs allein auf die aus dem Erzeugungskreis I hervorgehenden Elektrizitätsträger zu beschränken, sondern kann dadurch außerordentlich gesteigert werden, daß die vor der Anode des Kreises III liegende Steuerelektrode (in Fig. 1 also die Elektrode 3) auf die mehr oder weniger sichtbar ausgebildete, positive Schichtung, welche vor der Anode liegt, elektrostatisch einwirkt.[1]) Bei geeigneter Potentialverteilung im Entladungsrohr kann diese zweite elektrostatische Einwirkung eine Stromschwankung bewirken, welche die durch die beiden Relaiselektroden 2, 3 hervorgerufenen beträchtlich überragt.

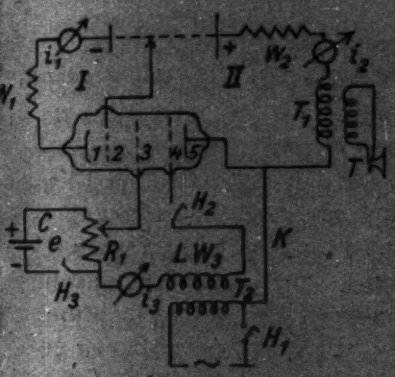
§ 4. Die verwendeten Röhren und ihre Schaltung.

5. Bei den meisten der folgenden Versuche habe ich nicht 4 Elektroden, wie in Fig. 1, sondern deren 5 verwendet. Es geschah dies deshalb, weil die Einstellung auf maximale Wirkung, die dann sowohl im Sinne von § 2, 3 als auch auf die Schichtung vor der Anode (§ 3, 4) stattfindet, sich bei Verwendung einer weiteren Netzelektrode viel leichter einstellen läßt. Außerdem aber wird in diesem Falle die Anbringung einer Potentiometerschaltung, die sogleich beschrieben wird, wesentlich übersichtlicher. Ein Vorteil dieser Potentiometer-

1) E. Marx, Gasrelais f. undulierende Ströme. D.R.P. 331 417.

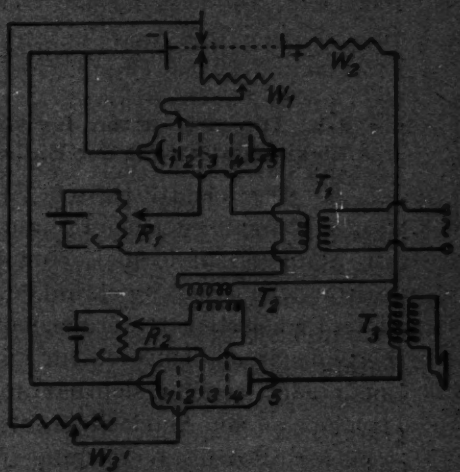
schaltung besteht darin, daß bei Änderung des Gasdrucks im Rohre die einmal eingestellte Erzeugungsspannung des Kreises I bzw. der Anodenspannung des Kreises III (Fig. 1) nicht geändert werden muß, um die maximale Wirkung der Röhre wieder zu erlangen, sondern nur die Potentiometereinstellung; während dies geschehen muß, wenn keine Potentiometerschaltung verwendet wird.

Wenn es der Technik gelingen sollte, die Röhren so herzustellen, daß sie völlig konstanten Gasdruck während des Betriebes und während des Lagerns behalten, so wird man mit



Schaltung der Fünf-Elektrodenröhre.

Fig. 2.



Parallelschaltung zweier Verstärkerröhren.

Fig. 3.

4 Elektroden und ohne besondere Potentialregulierung der Steuerelektroden auskommen. Auf die derzeitigen Schwierigkeiten, diese Bedingung zu erfüllen, wird weiter unten eingegangen. Hier sei bemerkt, daß Kaliumelektroden nicht gasfrei gemacht werden können, und Wasserstoff sowohl abgeben, als auch chemisch binden und adsorbieren können, ohne daß man die Bedingungen beherrscht. Hierdurch wird die Konstanz der Gasfüllung auf längere Zeit sehr erschwert. Für die Laboratoriumsversuche, über die ich berichte, ist die Benutzung von 5 Elektroden und Potentiometerschaltung sicher praktischer.

Die so aus der Schaltung der Fig. 1 entstehende Schaltung ist in Fig. 2 wiedergegeben. Das Wesentliche aus ihr ist

im Schema in der Fig. 1 der Theorie der Röhre[1]) bereits enthalten. Der Kopplungsdraht K dient zur Unterdrückung von Eigenschwingungen.

In Fig. 3 ist die Hintereinanderschaltung solcher 5-Elektroden-Röhren wiedergegeben.

Wird der Potentiometerkreis e offen gelassen, so ergab sich für eine bestimmte Röhre als günstige Spannung: 80 Volt zwischen 1 und 2 und 140 Volt zwischen 2 und 5. Als Vorschaltwiderstand W_2 kommen etwa 20—30 000 Ohm, bei höheren Spannungen bis 80 000 Ohm in Anwendung, für W_1 einige 1000 Ohm. Die Transformatorspule T_2 in Fig. 2 hat 70 000 Windungen eines 0,07 mm dicken, mit dünnster Seide isolierten Drahtes und 29 000 Ohm. Gegenüber diesen kommen die etwa 100 Ohm von R_1 nicht in Betracht. — Die Kapazität und Selbstinduktion der an den Steuerelektroden liegenden Spule dieses Transformators läßt sich nach den gangbaren Methoden nicht messen, da die Höhe des Widerstandes und der Selbstinduktion einerseits, die Durchschlagsschwäche der Isolation andererseits die üblichen Anordnungen ausschließt. Die in der Theorie bereits angegebenen Konstanten sind durch eine Methode bestimmt, über welche gesondert berichtet wird.[2]) — Wird der Potentiometerkreis geschlossen, so ergeben sich andere Vorschaltwiderstände als günstig. Hierauf wird weiter unten zurückgekommen. Wird als Elektrode 2 ein Diaphragma verwendet, an Stelle eines Netzes, so wird die benötigte Spannung um einige Volt geringer.

Die Figg. 4 und 5 zeigen 2 Ausführungen solcher Röhren. Der Elektrodendurchmesser beträgt für die Kaliumelektrode 2,5 cm. Die Fig. 4 ist eine für Versuchszwecke geeignetere Form. Die vor den Netzelektroden 2 und 3 nach der Kathode hin eingezeichneten Blenden sind aus Glimmer. Sie sind dicht auf den Netzelektroden durch kleine Drähte befestigt und sind angebracht, um den von der Kaliumelektrode kommenden Kathodenstrahl von den Glaswänden fernzuhalten.

Ein Potentialfall, der von der Elektrode 1 zur Elektrode 5 hin ansteigt, besteht selbst, wenn keine Potentiometerspannung anliegt, weil weder der Widerstand der Sekundärspule des Transformators T_2 der Fig. 2, bzw. T_1 und T_2 der Fig. 3, der

1) E. Marx, Ann. d. Phys. 67. S. 78. 1922.
2) E. Marx u. A. Carolus, Phys. Zschr. 1923.

etwa 29000 Ohm beträgt, noch die Gasstrecke selbst ohne Spannungsabfall sind. In der rein schematischen Zeichnung in der Abhandlung über die Theorie der Röhre (Fig. 1, S. 78) habe ich diesen Potentialabfall wegen seiner prinzipiellen Wichtigkeit durch Zeichen angedeutet.

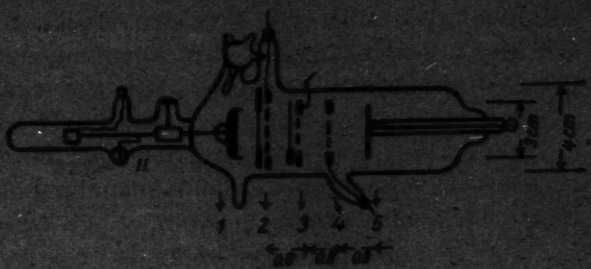


Fig. 4.

In Fig. 4 ist eine Vorrichtung angedeutet, welche anzeigt, wie das in einen angeschmolzenen Kolben hinein destillierte Alkalimetall aus demselben auf die Elektrode 1 gegossen wurde. Diese Elektrode

Fig. 5.

enthält auf ihrem Boden eine verquickte Aluminiumscheibe. Ist das Alkali aufgegossen und hat es sich plan eingestellt, so kann man mit einem Magneten den Sperrhaken H lösen und die Elektrode in beliebige Entfernung von der Elektrode 2 bringen. Der Stiel der Elektrode ist gezahnt.

§ 5. Die Aufnahme der Charakteristik.

Die Messung der Charakteristik erfolgte in folgender Weise: Es wurde durch den Widerstand R_1 (Fig. 2) die an 3 und 4 eingeführte Spannung verändert und der Strom i_3 im Kreise der Relaiselektroden 3, 4 gemessen. Dann ist $W_3 i_3 = y$ die an den Relaiselektroden wirksame Spannung.

Die Abhängigkeit des Anodenstromes i_2 von der Klemmenspannung y der Relaiselektroden 3, 4, bei konstanter Anodenspannung E und konstanter Erzeugungsspannung der Elektronen im Kreise I, ist in Fig. 6 aus der Abhandlung über die Theorie der Röhre noch einmal wiedergegeben. (Vgl. auch weiter unten § 9.)

Die Kompensationsspannung ist bei Aufnahme der Charakteristik als Gegenspannung gegen das Potentialgefälle der Anodenbatterie wirksam.

Der Anodenstrom nimmt von $2{,}17 \cdot 10^{-3}$ Amp. beginnend, bei zunehmender Gegenspannung (Richtung des Pfeiles) bis zum Erlöschen des Stromes ab, dies erfolgt bei etwa 6 Volt Gegenspannung.

Die Klemmenspannung der Steuerelektroden 3, 4 wird mit abnehmendem Anodenstrom (zunehmender Potentiometer-Gegenspannung) auf dem Ast II der Charakteristik negativ. Unter den in § 4 angegebenen konstanten Erzeugungsspannungen der Kreise A und B nimmt die Klemmenspannung der Elektroden 3 und 4 auf etwas über $-0{,}01$ Volt ab. Der Anodenstrom überwindet diese Gegenspannung der Relaiselektroden und hat am unteren Ende des Astes II noch $1{,}9 \cdot 10^{-3}$ Amp., nimmt aber dann schnell mit Ast III und IV weiter ab, unter Anwachsen der Klemmenspannung zwischen Elektrode 3 und 4 auf positive Werte, wenn die Potentiometerzuschaltung erhöht wird. Dies zeigt das Diagramm der Fig. 6.

Die kinetische Deutung dieses Stromspannungsverlaufes ist in § 3 meiner Abhandlung über die Theorie der Röhre enthalten. Die auf Ast III, IV erfolgende Zunahme der Klemmenspannung der Steuerelektroden bei abnehmender Stärke des Anodenstromes i_2 stellt eine fallende Charakteristik der Gasstrecke zwischen 3 und 4 dar.

Für statische Einstellungen des Potentiometers ergibt sich für alle Einstellungen, durch welche die Kurve in Fig. 6 erzeugt wird, *ein einziger stabiler Wert der Ordinaten der Kurve Fig. 6, für die Klemmenspannungen zwischen 3 und 4.* Diese Stabilität

bei Einführung einer Gleichstromspannung ist auch für den fallenden Ast IV, welcher durch Gegenschaltungen von 2,8—4 Volt erzeugt wird, vorhanden, während *für Wechselspannungen Ast IV labil ist* (vgl. „Theorie §§ 11, 12 S. 96): Wird eine Wechselstromspannung den Elektroden 3, 4 aufgedrückt, während die statische Einstellungsspannung an diesen Elektroden auf dem fallenden Aste liegt, so ist die dort herrschende Klemmenspan-

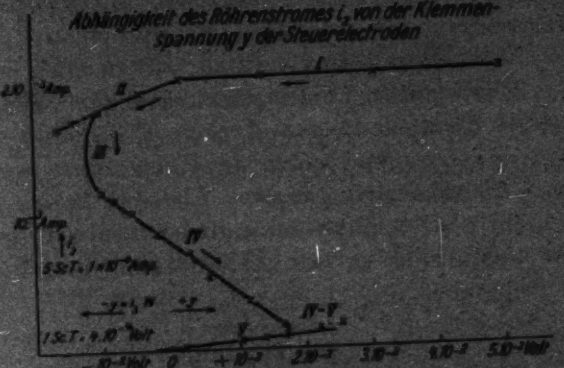


Fig. 6.

nung nicht allein die aus Schwingungsamplitude des eingeführten Wechselstromes und statischer Einstellung resultierende; vielmehr setzt dann bei plötzlicher Einführung des Wechselstromes eine *Aufladung* der Elektroden ein (eine „Zündung"), welche so lange ansteigt, bis der normale Ast III oder V der Charakteristik für die Gasstrecke 3—4 erreicht ist.

Durch diese Aufladungen werden also, trotz der statischen Einstellung der Elektrodenspannung auf den Ast IV, nicht die Potentialdifferenzen des fallenden Astes IV, sondern die des Astes II bzw. des Astes V so lange für die Elektroden 3 und 4 maßgebend, bis die durch die Zündung erworbenen Aufladungen durch die Gasstrecke wieder abgeflossen sind; dauern doch die Aufladungen nur so lange an, als fallende Charakteristik besteht, hören aber mit Erreichung des normalen Astes auf. Der Abfluß der Aufladungen erfolgt dann auf dem normalen Aste, der Ast II oder Ast V sein kann.

Ist dann die durch die zeitliche Aufladung erreichte, zeitlich andauernde Überspannung bis zur Einstellungsspannung gesunken, so stellt sich die ursprüngliche fallende Charakteristik im

Rohre als die ohne Sonderladung einzig stabile Einstellung, automatisch wieder her. Hierbei erfolgt, wie in der Theorie des Vorgangs[1]) quantitativ gezeigt wurde, von neuem Zündung, d. h. Aufladung der Elektroden 3, 4, so daß der Einleitungsvorgang stationär wird. *Die beim Übergang von fallender zu steigender Charakteristik auftretenden starken Stromschwankungen addieren sich, wie der Vergleich der Beobachtung mit der Rechnung zeigt, zu denjenigen durch die normalen Wechselstromschwankungen verursachten*, ohne dadurch die Sprachlaute, außer bei extremster Verstärkung unkenntlich zu machen. *Es wird hiernach das Maximum der Lautverstärkung im Rohre dann erreicht, wenn zwischen Elektrode 3 und 4 beim Einschalten der Röhre eine Zündspannung auftritt, welche die Umsteuerung von fallender auf steigende Charakteristik zwischen Elektrode 3 und 4 bewirkt.*

Diese nicht ganz leicht verständliche, weil sehr kurze Darstellung ist ausführlich in der Abhandlung über die Theorie der Röhre behandelt.

§ 6. Die Zündung.

Nach der Theorie der Schwingungen ergibt sich *im Falle steigender Charakteristik* für die an den Elektroden 3, 4 auftretende Klemmenspannung y_e die Gleichung (22)[1])

$$y_e = \frac{E_0}{(x)_+ L w} \sin\left(w t - \frac{\pi}{2}\right) + y_s + \left(\frac{|E_0|}{x L w} + \bar{y}_0 - y_s\right) e^{-\frac{W}{L} t} + (-\bar{y}_0 + y_s + y_e) e^{-\frac{\pi}{0} t},$$

hierin bedeutet

$\bar{y}_0$ den aus der Charakteristik zu entnehmenden Wert der Klemmenspannung an der Begrenzung der fallenden Charakteristik (Begrenzung von Ast IV in Fig. 6), wobei $\bar{y}_0$ positiv an der Grenze IV, V ist, und negativ an der Grenze IV, III.

y_s die durch plötzliche Einführung des Wechselstromes erzeugte Klemmenspannung $-L\frac{di}{dt}$, die „Zündspannung".

y_e die aus Anodenfall und Potentiometereinstellung resultierende Klemmenspannung.

---

[1]) Vgl. Theorie der Lautverstärkung, Ann. d. Phys. 67. § 11. S. 96.

L, C sind Selbstinduktion und Kapazität der an den Elektroden 3, 4 liegenden Sekundärspule des Eingangstransformators.

$w = \frac{2\pi}{\tau}$ ist die Wechselzahl des Stromes von der Periode τ,

$E_0 \sin wt$ ist die in L induzierte elektromotorische Kraft.

$(\varkappa)_{(+)} = \frac{di}{dy}$ ist die positive Leitfähigkeit (reziproke Widerstand) der Gasstrecke im Falle steigender Charakteristik.

$(\varkappa)_{-} = \frac{di}{dy}$ die negative Leitfähigkeit für fallende Charakteristik.

Im Falle *fallender* Charakteristik ist die Klemmenspannung zwischen 3 und 4 (Gleichung 22″ der Abhandlung).

$$y_e = \frac{\vartheta}{(\varkappa)_- L w} \sin\left(wt - \frac{\pi}{2}\right) + y_e$$
$$+ \left[\frac{|E_0|}{(\varkappa)_- L w} + (\bar{y}_0 - y_e)\frac{\varkappa_{(+)}}{\varkappa_{(-)}}\right] e^{-\frac{W}{L}t}$$
$$+ \left[y_e - (\bar{y}_0 - y_e)\frac{\varkappa_{(+)}}{\varkappa_{(-)}}\right] e^{-\frac{(\varkappa)_-}{C}t}.$$

Der Faktor des letzten Exponentialausdrucks wurde von mir *„Zündungskonstante"* genannt und mit $\bar{c}_2$ bezeichnet, er wird maßgebend, wenn der Exponentialfaktor wie in der letzten Gleichung mit zunehmender Zeit schnell anwächst.

Die Zündungskonstante $\bar{c}_2$ ist, wie ersichtlich, auch bei fehlender Zündspannung y_e vorhanden. Es ist aber in § 11 der Theorie des Lautverstärkers gezeigt, daß im Momente der Einschaltung des Wechselstromes im Apparat gegenelektromotorische Kräfte vorhanden sind, die durch die statische Spannung y_e bedingt sind, welche eine Doppelschicht an den Elektroden erzeugt, welche nur dann durchbrochen wird, wenn der Wert der Aufladefunktion beim Einsetzen der Schwingung eine Größe hat, welche den Wert von 10^{-3} Volt beträchtlich übersteigt. 10^{-3} Volt aber ist die Größenordnung des Faktors $\bar{c}_2$ *ohne* vorhandene Zündspannung.

Es ist deshalb notwendig, daß bei Einschaltung einer Röhre eine besondere Zündspannung y_e erzeugt wird. Ist sie einmal erzeugt, so erfolgt die folgende Zündung einige Zeit nachher wesentlich leichter als die erste. Das Zurückspringen der Cha-

rakteristik nach Abfluß der Zündladung vom steigenden Ast auf den stabilen (fallenden) Einstellungswert genügt alsdann zu neuer Zündung (S. 98 der Abhandlung) und zwar erfolgt diese bei positiv gerichteter statischer Klemmenspannung y_s in positiver Richtung, bei negativem y_s in negativer.

Experimentell läßt sich die hiernach notwendige Zündspannung sehr einfach dadurch erzeugen, daß mit gewöhnlichem Hebelschalter bei H_1 oder H_2 plötzlich eine momentane Überspannung erzeugt wird, indem der Hebel schnell aus- und wieder eingeschaltet wird. Es gelingt dies immer in ganz kurzer Zeit; wird die Einschaltung mit besonderer Vorsicht bewerkstelligt, indem die Einschalthebel langsam zu vollem Kontakt gebracht werden, so findet man bei gleicher Potentiometer-Einstellung der Röhre keine oder nur eine schwache Lautverstärkung. — Dieses Verhalten, das sich hundertfältig wohl bei allen Röhren zeigte, ist im allgemeinen nur dann möglich, wenn zwischen einer einmal erfolgten Zündung und der nächsten einige Zeit verflossen ist. Hieraus geht aber hervor, daß eine, durch die statische Spannung y_s sich ausbildende, eine endliche Ausbildungszeit erfordernde Polarisationsschicht von der bei der Einleitung notwendigen Zündspannung überwunden werden muß. Ist einmal eine Zündung geschehen, so genügt die ohne y_s auftretende Zündungskonstante $\bar{c}_2$, um automatisch bei Abfluß der Ladung zu zünden. [Vgl. S. 100 der Abhandlung.]

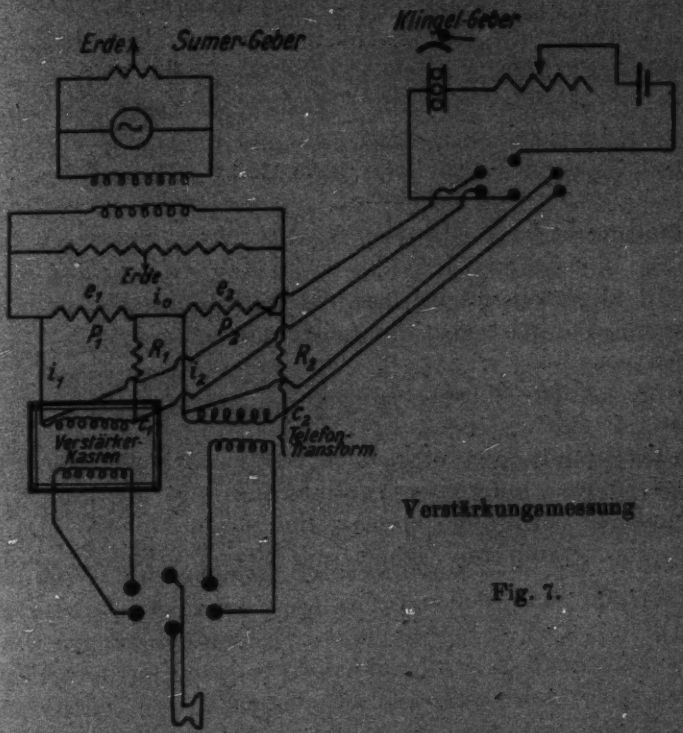
§ 7. Die Messung des Verstärkungsgrades.

Die *Verstärkung* dieser Röhren ist im allgemeinen größer wie die der einzelnen „*K*-Röhre". Der Vergleich wurde zunächst so angestellt, daß ein Lautverstärkeraggregat der A.E.G. mit 3 *K*-Röhren und einer S & H-Röhre, das mir die A.E.G. gütigst zur Verfügung stellte, mit je 2 Röhren von mir verglichen wurde. Das Mikrophon wurde durch eine Klingel erregt, der Mikrophonstrom über einen gewöhnlichen, zum Telefon passenden Telefontransformator einmal „direkt" abgehört und das zweitemal über den jeweils eingeschalteten Verstärker.

Die Klingeltongebung hat gegenüber der Verwendung des Summers den Vorteil, daß man hier ganz sicher ist, daß nicht die Erregung von Eigenschwingungen scheinbare Verstärkungen vortäuscht. Diese Tonerregung wurde auch bei den späteren quantitativen Messungen mit Summer und Spannungsteilung zur Kontrolle der eigentonfreien Verstärkung neben der des

Summers beibehalten. Beide Tonerregungen konnten dann nach dem Schema untenstehender Fig. 7 dicht hintereinander eingeschaltet werden.

Die Spannungsverstärkung ist gleich dem reziproken Werte der wirksamen Eingangsspannungen, wenn diese so abgeglichen werden, daß der verstärkte Wechselstrom die gleiche Lautstärke wie der unverstärkte hervorruft.



Verstärkungsmessung

Fig. 7.

Bezeichnet man mit

e_1, e_2 die Eingangsspannungen, an den Widerständen P_1, P_2, von denen der Verstärkerkreis (P_1) und der „direkte" Kreis (P_2) abgeht,

i_0 die Stromstärke des Gebers,

i_1 die Eingangsstromstärke im Verstärkerkreise,

i_2 . . . . . direkten Kreise,

c_1, c_2 die wirksamen Eingangswiderstände der primären Transformatorspulen,

R_1, R_2 die Ballastwiderstände der beiden Kreise,

dann ergibt sich für die Spannungsverstärkung

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{(R_2 + c_2)(P_1 + R_1 + c_1)}{(P_2 + R_2 + c_2)(R_1 + c_1)}$$

und für die Stromverstärkung

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{P_1 + R_1 + c_1}{P_2 + R_2 + c_2}.$$

Die Wirkungsverstärkung wird dann

$$\sqrt{\frac{e_2 i_2}{e_1 i_1}} = \frac{P_2}{P_1} \frac{(P_1 + R_1 + c_1)}{(P_2 + R_2 + c_2)} \sqrt{\frac{R_2 + c_2}{R_1 + c_1}}.$$

Wenn R_1 und P_1 klein gegen c_1 und R_2 und P_2 klein gegen c_2 ist, so wird

$$\sqrt{\frac{e_2 i_2}{e_1 i_1}} = \frac{P_2}{P_1} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}.$$

Im allgemeinen wird man die vollständige Formel benutzen müssen. Dann ist also die Leistungsverstärkung

$$\sqrt{\frac{e_2 i_2}{e_1 i_1}} = \frac{P_2 (P_1 + R_1 + c_1)}{P_1 (P_2 + R_2 + c_2)} \sqrt{\frac{R_2 + c_2}{R_1 + c_1}}.$$

Die Bestimmung der wirksamen Eingangswiderstände c_1 und c_2 erfolgt, indem man eine Veränderung von P_1 und R_1 bzw. P_2 und R_2 vornimmt, ohne i_0 und i_1 zu ändern. Dann ist, wenn die veränderten Größen mit Strich versehen werden:

$$i_1 = \frac{i_0 P_1}{P_1 + R_1 + c_1} = \frac{i_0 P_1'}{P_1' + R_1' + c_1}$$

oder

$$c_1 = \frac{P_1 R_1' - P_1' R_1}{P_1' - P_1},$$

$$c_2 = \frac{P_2 R_2' - P_2' R_2}{P_2' - P_2}.$$

Es ist demnach die Verstärkung

$$N = \sqrt{\frac{e_2 i_2}{e_1 i_1}} = \frac{P_2 (P_1 + R_1 + c_1) \sqrt{c_2 + R_2}}{P_1 (P_2 + R_2 + c_2) \sqrt{c_1 + R_1}},$$

wo c_1 und c_2 den vorigen Gleichungen zu entnehmen sind. Die Messung ergab $c_1 = 700$, $c_2 = 85$.

Bei Variierung des Abzweigungsverhältnisses von 1:1 bis 1:8 ergaben die Messungen in sich hinreichende Übereinstim-

mung des so gemessenen Verstärkungsgrades. Es wurde in Abständen von 10 Min. gemessen, z. B. ergab die Röhre 29 am 6. VIII. 1919 die Zahlen:

19; 18,1; 18,3; 16,5; 19,6; 17,5.

Die einzelne „*K*-Röhre" hatte eine Verstärkung von etwa 10.

§ 8. Die Änderungen des Verstärkungsgrades der Röhren. Haltbarkeit und Regenerierung.

Diese Messung erfolgte an einer Röhre, die während mehrerer Wochen zu Versuchen gedient hatte. Die Potentiometerschaltung war nicht angebracht.

Dieser Verstärkungsgrad bleibt im allgemeinen erhalten, wenn die Röhre etwa 4 Wochen lang täglich etwa 2 Stunden eingeschaltet wird. Nach dieser Zeit läßt sie nach. Viel schneller ist dies der Fall, wenn eine ununterbrochene Dauerbelastung von vielen Stunden oder wenn eine Überlastung mit starker Zerstäubung oder Verdampfung des Kaliums stattfindet. Hat die Röhre aus einem dieser Gründe nachgelassen, so kann man sie dadurch regenerieren, daß man sie in ihrem Mittelteil sehr stark unter Drehen in der Flamme erhitzt, bis auch die letzte Spur Kalium von den Mittelelektroden wegdestilliert ist. Die Entfernung des Kaliums von den Zwischenelektroden ist hierbei aber nicht allein für die Regeneration ausschlaggebend. Herr Dr. Schröter, dem ich gelegentlich diese Regeneration zeigte, äußerte zuerst die Ansicht, daß bei der Stärke der Erhitzung die freiwerdenden Gase wesentlicher wären, als die Entfernung des Alkalis aus dem Zwischenteil der Röhre. Auf Grund eigener Messungen hatte er beobachtet, daß in Edelgasen unter 10 mm Druck der Kathodenfall der Alkalielektroden durch kleine Verunreinigungen *heruntergesetzt* wird. — Ich konnte daraufhin in der Tat zeigen, daß auch die Zulassung von Wasserstoff, ohne Erhitzung, eine Röhre, welche durch die Benutzung an Empfindlichkeit eingebüßt hatte, regeneriert. Versuche, welche dies beweisen, werden weiter unten in § 11 noch ausgeführt werden. Mir scheint bei der Regeneration durch Wasserstoff wesentlicher als die Beeinflussung des Kathodenfalles, daß das Einsetzen der positiven Schichtung durch Beimischung von H_2 zum Edelgase erleichtert wird. Der zugelassene Wasserstoff wird dann durch das Kalium allmählich z. T. chemisch gebunden, z. T. adsorbiert und verschwindet so wieder aus dem

Gase. Erst durch die Beimengung des H_2 bildet sich zwischen Anode und Elektrode 4 eine merkliche positive Schicht, welche die Verstärkung wesentlich erhöht. Daß aber nicht allein im Gaszusatz die wesentliche Bedingung der Regeneration liegt, wird eindeutig durch das Experiment des § 11 bewiesen.

Als Beispiel für die Regeneration durch Erhitzung möge folgender Versuch an einer Röhre angeführt werden, deren Verstärkungsgrad bis auf 1 heruntergegangen war. Die Röhre wurde sehr stark im Mittelteil erhitzt, wobei die Kaliumelektrode selbst ganz bis zum Aufsitzen auf die linke Glaswand durch magnetische Lösung des Sperrhebels zurückgelassen wurde (Fig. 4). Nach dem Erkalten ergab die Messung der Verstärkung: $N = 22$. Die Röhre wurde *bei offenem Potentiometerkreis* gemessen. Nach einigen Messungen stieg dieser Wert bis auf

$$N = 29$$

und blieb dann annähernd während mehrerer Betriebsstunden in den folgenden Tagen konstant. Hierbei betrug die Spannung I 176 Volt, II 8 Volt, der Vorschaltwiderstand 30 700 Ohm.

Dieser Verstärkungsgrad ließ sich nun beträchtlich *durch* die Einstellung mit der *Potentiometerschaltung erhöhen*. Eine Einstellung, die eine sehr gute Sprachwiedergabe ergab, zeigte

$$N = 38{,}9\,.$$

Hierbei war die Spannungsverteilung: I = 17,4 Volt,
II = 14,7 Volt,
die Potentiometerabzweigung 0,9 Volt.

Der Anodenstrom betrug ohne Potentiometereinschaltung etwa $2 \cdot 10^{-3}$ Amp., mit derselben $5 \cdot 10^{-4}$ Amp. Der Strom im Potentiometerkreise (i_3 in Fig. 2) betrug $18{,}8 \cdot 10^{-7}$ Amp. und nahm bei Einschaltung der maximal wirkenden Potentiometerschaltung auf etwa $-2{,}7 \cdot 10^{-7}$ Amp. ab. Die Stromrichtung *kehrte sich* also im Potentiometerkreise *um*.

§ 9. Potentiometerzuschaltung und Klemmenspannung.

Die Abhängigkeit der beobachteten Verstärkung von der Potentiometergegenschaltung ist in der Fig. 2 S. 79 meiner Abhandlung über „Charakteristik und Theorie der Lautverstärkung..." wiedergegeben. *Es ist aber von vornherein ersichtlich, daß dieser Potentiometerzuschaltung an die Elektroden 3 und 4 keine*

direkte physikalische Bedeutung zukommt. Denn wenn mit ΔV diese Zuschaltung bezeichnet wird, so entspricht einem endlichen ΔV keineswegs notwendig eine endliche Änderung der Größe der Klemmenspannung Δy an den Elektroden 3 und 4. Denn durch die Zuschaltung einer äußeren Spannung kann die Potentialverteilung im Entladungsrohr, welche durch die Anodenspannung verursacht wird, sich so ändern, daß die Zuschaltung, die von außen durch das Potentiometer erfolgt, durch eine Abnahme des gleichzeitig vorhandenen Anodenbatteriegefälles zwischen den Elektroden kompensiert oder überkompensiert wird. *Physikalisch wesentlich ist deshalb nicht die Potentiometerzuschaltung ΔV, sondern die Klemmenspannung Δy, welche aus Potentiometerschaltung und Anodenbatteriespannung an den Elektroden 3 und 4 resultiert.*

Erst diese, allerdings naheliegende Erkenntnis führt zur Einführung der Parameter, als deren Funktion sich die Abhängigkeit der Verstärkung von der Spannungseinstellung berechnen läßt. *Die Messung der wirklichen Klemmenspannung* zwischen den Elektroden 3 und 4 erfolgt durch die Strommessung i_3. Der Ohmsche Widerstand der an 3, 4 anliegenden Spule ist $W = 29\,000$ Ohm, so daß $i_3 W$ die an den Elektroden 3, 4 anliegende Spannung ergibt.

In Fig. 6 ist die Abhängigkeit des Anodenstroms, also des Empfangsstroms im Telefontransformator von der Klemmenspannung wiedergegeben. In Richtung der Pfeile geht die Potentiometerschaltung. Die Spannungsverteilung ist die folgende:

Im Kreise I (Fig. 2) etwa 174 Volt und etwa 5000 Ohm Ballast Widerstand W_1, $i_1 \sim 2{,}5$—3 Milliamp.

Im Kreise II etwa 15 Volt und etwa 30 700 Ohm Ballast Widerstand.

Die Stromstärke i_2 ist als Ordinate in der Kurve Fig. 6 wiedergegeben. Sie nimmt von $2{,}2 \cdot 10^{-3}$ bis auf 0 Amp. bei wachsender Gegenschaltung des Potentiometers von 0—6 Volt ab.

Die folgende Tabelle gibt die Beobachtungszahlen, welche die Kurve Fig. 6 bestimmen:

Potentiometerzuschaltung	Klemmenspannung y_e der Steuerelektroden	Anodenstrom i_a	ν	N beob.	N ber.	N
0 Volt	+ $50 \cdot 10^{-3}$ Volt	$2{,}17 \cdot 10^{-3}$		4,3	2,58	4,5
0,5	+ 47 „	2,14 „		4,5	2,58	4,5
0,6	— 0,37 „	2,04 „		4,6	2,58	4,5
1	— 2 „	2 „		5	2,58	4,5
1,2	— 9 „	1,8 „		6,3	2,58	4,5
1,9				8		
2,4	— 13,2 meta- $-9 \cdot 10^{-3}$ stabil	1,68 „	0,8	8		
2,6	— 16 stabil $-8 \cdot 10^{-3}$ stabil	1,58 „		60, 70, 40		
2,7	— 8 „	1,08 „		43, 52	194	
2,8	— 7 „	1,04 „	7,1	43, 52		
2,9	— 5,8 „	0,96 „	10		25	
3	— 4,7 „	0,94 „		19,1	20	
	— 3,7 „	0,9 „			19,3	
	— 3,2 „		13,7		19,1	
	— 2,7 „		14,2		Min. 18, 37	
3,35	— 2 „ + 24 meta-	0,85 „			18,9	
3,4	+ 1 stabil + 21 stabil	0,75 „	5,9	26	18,9	
3,5	+ 5	0,65 „		31	32,7	
3,6	+ 9 „	0,45 „	3,9	28	32	
3,7	+ 17 „	0,17 „	0,8	30	30	
4,2	+ 16 „	0,05 „		26, 40, 15	57	
4,5	+ 14 „	0,043 „		5	2,58	4,5
5	+ 11,5 „	0,036 „		1	2,58	...

$N_{beob.}$ ist die beobachtete Verstärkung. $N_{ber.}$ ist nach der Formel (30), (32) und (33) der S. 110 und 120 der Theorie der Röhre berechnet, und zwar ist

$$N = c_2 - \frac{d_1}{\nu} - \frac{d_2}{\nu} y_e,$$

wo c_2, d_1, d_2, ν keine ad hoc eingesetzten Konstanten sind, sondern sich lediglich aus Selbstinduktion, Frequenz, Widerstand usw. ergeben. Es ist

$$\nu = 23{,}3 + 10{,}5 \log (2{,}31 \cdot 10^{-2} - y_e),$$

wo y_e die gemessene, in der Tabelle angegebene Klemmenspannung ist, welche in dem Teil der Charakteristik vorhanden ist, welcher rechts von der Ordinate liegt, d. h. für den Teil, in welchem die Klemmenspannung y_e positive Werte hat.

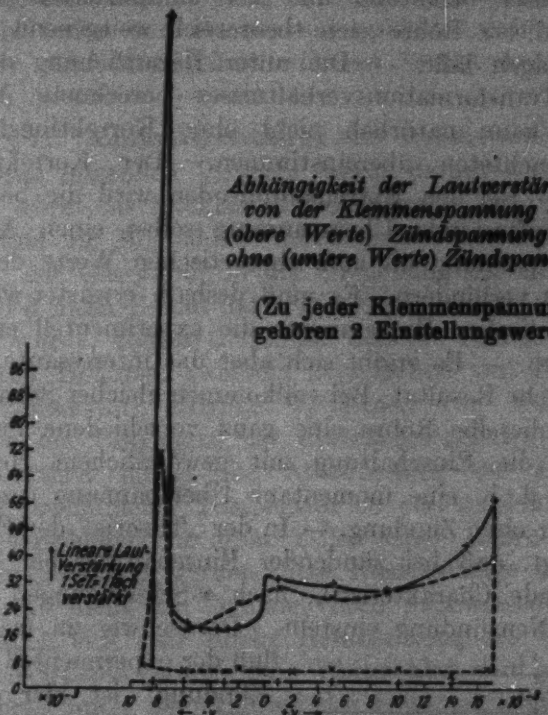
Für die Werte mit negativ eingestellter Klemmenspannung y_e, also für den Teil der Charakteristik, welcher links von der Ordinate liegt, ergibt die Theorie

$$N_{\text{ber.}} = 2{,}58 + \frac{268{,}3}{\nu} - \frac{1{,}87 \cdot 10^{-4}}{\nu} y_e,$$

wo

$$\nu = 37{,}5 + 10{,}5 \log (y_e + 8{,}69 \cdot 10^{-3})$$

ist Die Formel ist auf Grundlage der aus der beobachteten Charakteristik entnommenen Parameter theoretisch abgeleitet,



Abhängigkeit der Lautverstärkung von der Klemmenspannung mit (obere Werte) Zündspannung und ohne (untere Werte) Zündspannung

(Zu jeder Klemmenspannung gehören 2 Einstellungswerte)

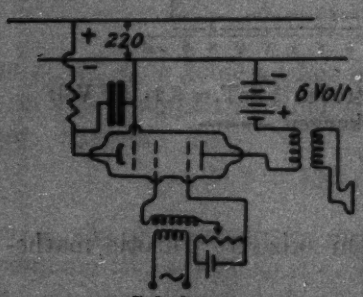
y Klemmenspannung der Relaiselektroden 1 Sc T. = $0{,}2 \cdot 10^{-3}$ Volt
\+ Berechnete Verstärkungen ——
× Beobachtete „ – – –

Fig. 8.

indem die oben in § 5 ohne Formeln skizierte Theorie mathematisch formuliert wurde.

Zu Fig. 9 der „Theorie" (hier als Fig. 8 noch einmal wiedergegeben) wurde bereits darauf hingewiesen, daß beobachteter und berechneter Verlauf im großen und ganzen übereinstimmt und daß namentlich die starken Maxima an der Begrenzung der fallenden Charakteristik durch die Formel erhalten werden.

Daß infolge der Zündung nicht die Extremamplituden voll erreicht werden, ist hier als unwesentlich fortgelassen. Eine weitgehendere Übereinstimmung zwischen Berechnung der Extrema der Verstärkung und der Beobachtung ist bei der Inkonstanz des Verstärkungsgrades sicherlich nicht zu erwarten. Was gezeigt werden sollte und erreicht wurde, ist, daß das Wesen dieser Schaltung und der komplizierten Verstärkerfunktion dieser Röhre sich theoretisch weitgehend übersehen und verfolgen läßt. — Die unter Heranziehung des theoretischen Transformationsverhältnisses berechnete Normalverstärkung kann natürlich nicht ohne Korrektionsfaktor mit der beobachteten übereinstimmen. Der Korrektionsfaktor ist 1,8. — Bei den Extremamplituden wird die beim Stromwechsel auftretende Überspannung selbst einen Anstieg der Klemmenspannung bis zum theoretischen Werte der Extremamplitude verhindern. Es muß deshalb erwartet werden, daß die theoretischen Extremwerte die experimentell erreichbaren übersteigen. — Es ergibt sich aber das interessante und lange unerklärliche Resultat: Bei vollkommen gleicher Schaltung zeigt ein und dieselbe Röhre eine ganz verschiedene Funktion, je nachdem die Einschaltung mit gewöhnlichem Hebelschalter zündend, d. h. eine momentane Überspannung erzeugend erfolgt, oder ohne Zündung. — In der „Theorie" der Erscheinung ist gezeigt, daß bei zündender Einschaltung bei Einstellung auf fallende Charakteristik, nach ν-Schwingungen sich automatisch Neuzündung einstellt. Der schwer zu fassende Einfluß der experimentell wirksamen „Zündung" ist hier quantitativ in Übereinstimmung mit der Beobachtung gebracht durch theoretische Ausnutzung des Wechselstromansatzes mit negativer „Leitfähigkeit" di/dy.



Schaltung
an das städtische Netz
Fig. 9.

§ 10. Verwendung von Kollektorspannung an Stelle der Batterie.

Wenn man an Stelle der Batterie, unter Verwendung eines Blockkondensators das städtische Gleichstromnetz, für den Kreis I benutzt, so braucht man nur wenige Volt Zuschaltung für Kreis II, um die Röhren in Betrieb

zu setzen (Fig. 9). Bei der Röhre, an welcher die oben beschriebenen quantitativen Versuche gemacht wurden, ergab sich eine klare Verstärkung bis $N = 34$. Das Kollektorgeräusch ist allerdings dem Ton als gleichmäßiges Summen überlagert, aber nicht so störend, daß es wesentlich die übermittelte Sprache beeinträchtigt. Vielleicht läßt es sich durch Wagnersche Siebkettenschaltung ganz fortbringen. In der Vermeidung von Heizbatterien und Hochspannungsakkumulatoren ist vielleicht hier eine Möglichkeit weiteren technischen Interesses vorhanden.

§ 11. Kaliumzerstäubung und Regeneration.

Die nun folgenden Versuche waren darauf gerichtet, festzustellen, worin das Nachlassen der Röhre in ihrer Verstärkerwirkung und die Möglichkeit der Regeneration durch positive Erhitzung der Glaswände in der Umgebung der Relaiselektroden 3 und 4 ihren Grund hat. Die Regeneration, die (§ 8) beschrieben wurde, konnte 3 Gründe haben. Erstens Befreiung adsorbierten Heliums, zweitens Freimachen von Nebengasen, speziell Wasserstoff, drittens Entfernen von Kaliumniederschlag von der Umgebung der Zwischenelektroden.

Bekanntlich haben die Alkalimetalle die Eigenschaft, schon bei gewöhnlicher Temperatur zu verdampfen und merkliche Niederschläge auf allen Teilen einer Röhre zu bilden. Bei Stromdurchgang werden diese Niederschläge so beträchtlich, daß sie nicht nur lichtelektrisch nachweisbar werden[1]), sondern auch eine sehr starke Herabsetzung des Gefälles der so belegten Metalle verursachen. Weiter aber wird aus Kaliumverbindungen unter dem Einfluß der Glimmentladung metallisches Kalium frei. Es wurde verschiedentlich, auch von anderen Beobachtern, die mit meinen Röhren arbeiteten, gefunden, daß Röhren, deren Verstärkungsgrad ganz gering geworden, oder überhaupt aufgehört hatte, kurze Zeit eine vorzügliche Verstärkung zeigten, wenn die Kaliumelektrode zur Anode, die Elektrode 5 zur Kathode gemacht wurde, ohne daß die Batteriespannungen stark erhöht werden mußten. Ich konnte einen solchen Fall quantitativ verfolgen. Es ergab sich bei einer überanspruchten Röhre für die Kaliumelektrode als Kathode bei den Spannungen 189 Volt in I, 18 Volt in II eine Verstärkung von $N = 1{,}3$. Wurde aber Elektrode 5 als Kathode

1) Vgl. Elster u. Geitel. z. B. Phys. Ztschr. 21. S. 364. 1920.

genommen, und die Kaliumelektrode als Anode, so erhielt ich bei 210 Volt in I und 15 Volt in II, eine Verstärkung von $N = 85$. Dieser Verstärkungsgrad nahm in diesen Fällen schnell ab, und betrug schon nach 5 Minuten nur noch 15. Nach einer viertel Stunde war die Röhre in beiden Richtungen ohne wesentliche Verstärkung.

Da in diesem Falle der Gasinhalt der gleiche war, so scheint aus dem Versuche hervorzugehen, daß die Elektroden auf den der Kaliumelektrode zugekehrten Flächen sich anders verhielten, wahrscheinlich also stark einwirkende Kaliumbelegung hatten, welche die Veränderung der Potentialverteilung im Rohre hervorrief. Die Regeneration durch sehr starke Erhitzung, wie oben beschrieben, würde hiermit im Einklang sein. Der veränderte Gasinhalt kann hier nicht Ursache des Versagens sein.

§ 12. Kaliumlegierungen als Kathoden und Gasfüllung.

Um die Verdampfung resp. Zerstäubung des Kaliums möglichst herunterzusetzen, wurde eine *K-Pb*-Elektrode her-

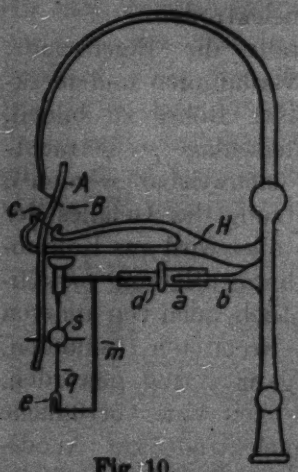


Fig. 10.

A ist ein Aluminiumstreifen;
B ein Glasfaden am Ende der Spirale;
C der aus 2, *A* umschließenden, gedrehten Kokonfäden bestehende Drehpunkt für *A*;
H Glashalter für *C*;
S ein Spiegelchen mit angekitteten Glasfäden, gegen welche eine Kante von *A* drückt;
q ein Quarzfaden, der durch eine Schraube gespannt werden kann;
m der Messinghalter, welcher in *d* gedreht werden kann und auf *b* aufgekittet ist;
e Röhrchen, das auf dem Draht angekittet wird.

gestellt. Der Schmelzpunkt ist bis zu 3,2 Gew.-Proz. K = 15 Atomprozenten, nach Smith[1]) 275°, und steigt bis zu 14,3 Gew.-Proz. K = 47 Atomprozenten auf 379°. Die gewählte Legierung dürfte etwa 5 Gew.-Proz. K enthalten haben. Sie wurde im Ansatzkölbchen der Röhre selbst hergestellt, indem

1) Smith, Ztschr. f. An. Chem. 56. S. 109. 1908.

zunächst die reinen Bleikörner in das Kölbchen gefüllt wurden und danach das Kalium hineingebracht wurde. Um die Zusammensetzung des Gases zu ändern, wurde die Vorrichtung Fig. 11 angebracht, welche ermöglichte, Helium, Wasserstoff, Argon und Neon dem Rohre zuzuführen und wieder abzupumpen.

Die Röhre wurde an der Pumpe belassen und es konnte der Heliumdruck mit Hilfe eines Glasspiralen-Manometers abgelesen und variiert werden. Das Glasspiralen-Manometer war unter evakuierter Glasglocke angebracht. Die Anordnung, die sich auch später bewährte, ist in Fig. 10 wiedergegeben und stellt eine Modifikation der Bourdon-Ladenburgschen Spirale dar.

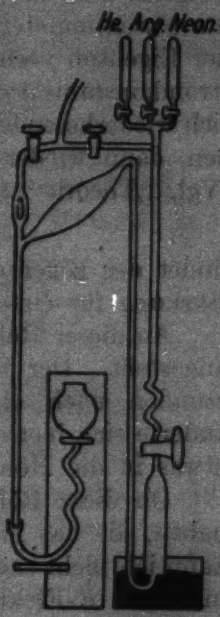


Fig. 11.

Die Empfindlichkeit betrug 21,25 Sk.-T. für 1 mm Druck. Die Eichung mit dem McLeod ergab strenge Linearität. Das Helium konnte jederzeit abgepumpt und durch glühendes Kalzium im Quarzkolben gereinigt werden. Die Anordnung ist in Fig. 11 wiedergegeben.

Das Helium in der Proberöhre zeigt keine Schichtung und in einem Zeißschen Taschenspektroskop nur noch ganz schwach die rote und grüne H_2-Linie. Das He ist unter diesen Umständen wesentlich reiner als in den bisher verwendeten Röhren. Das Manometer zeigt 25″ Ausschlag = 1,2 mm Druck, der Verstärkungsgrad ~ 1, bei 1,6 mm Druck noch wesentlich schlechter, auf 2 mm Druck, Verstärkungsgrad ~ 1, wie oben, 0,78 mm ganz schwache Verstärkung ~ 1,3, 0,5 mm keine Verstärkung. Jetzt wird Wasserstoff zu dem He hinzugelassen und zwar so viel, daß der Druck in der Röhre von 0,81 mm auf 1,07 mm steigt: Verstärkung = 6,9. Bei Erhöhung des Druckes bei etwa gleichem Mischungsverhältnis zwischen H_2 und He auf etwa 2 mm wird die Verstärkung ausgezeichnet und schwankt um

$$N = 50 .$$

Als Elektrode 2 wurde kein Netz, sondern ein Diafragma von 8 mm Durchmesser verwendet. Hierbei ist die Potentio-

meterspannung 2,8 Volt so geschaltet, daß der – Pol an Elektrode 4 liegt, die Spannung I 229 Volt $W_1 = 5000$, die Spannung II 16 Volt.

Wird die Potentiometerspannung jetzt etwas weiter auf 3 Volt kontinuierlich gesteigert, so nimmt die Verstärkung rapid zu und läßt sich bis

$$N = 80$$

steigern. Sie hält aber bei der hier erforderlichen Einstellung des Potentiometers immer nur wenige Minuten an; dann wird der Eigenton vernehmbar, welcher nicht Funktion der Wechselstromkonstanten des Kreises ist, sondern durch die rhythmisch sich wiederholenden Sprünge vom fallenden Ast auf den steigenden, dann wieder auf den fallenden und so fort, bedingt ist. (Vgl. „Theorie" § 19, S. 114.) Bei

$$N = 65$$

findet der Eigenton nicht statt und diese ausgezeichnete Verstärkung für eine einzelne Röhre ist völlig einwandfrei.

An dieser Röhre wurden eine große Anzahl von Messungen angestellt. Der Verstärkungsgrad war nach etwa 50 Betriebsstunden noch etwa $N = 42$. Die Kompensationsspannung änderte sich hierbei etwas und auch die Betriebsspannung ging etwas in die Höhe.

Ob diese Röhren mit *K-Pb*-Elektrode eine Betriebsdauer haben, die das mehrfache der hier angegebenen überschreitet, kann ich nicht sagen; verbessert ist sie jedenfalls gegenüber der mit einer *K*-Elektrode. Die Betriebsspannung ist etwas höher und die Röhre selbst noch schwieriger herzustellen.

Alle Röhren mit *K*-Elektroden, welche ich verwendete, änderten sich auch bei Nichtbenutzung. Röhren, welche ausgezeichnete Verstärkung zeigten, aber $^1/_2$ Jahr unbenutzt liegen blieben, zeigten, ohne äußerlich erkennbaren Grund, oft gar keine mehr. Die Regeneration durch Erhitzen stellte sie dann oft, aber nicht immer, wieder her.

§ 13. Besondere Beobachtungen.

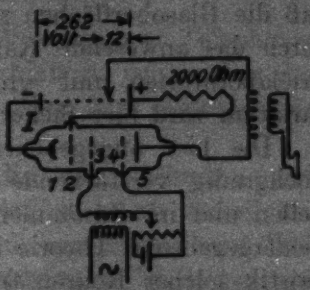
Elektrode 5 auf Gegenpotential.

Wurde bei dieser Röhre mit Kaliumblei-Kathode und Diafragma als Elektrode 2 die Schaltung so verändert, daß relativ sehr hohes Potential zwischen 1 und 2 angelegt wurde und die Elektode 5, wie es Fig. 12 zeigt, auf niedrigerem Po-

tential gehalten wurde, als die Elektrode 2, so ergab sich z. B. bei einer He-H_2-Füllung von etwa gleichen Teilen und einem Gasdruck von angenähert 2 mm, dann eine sehr gute Verstärkung von etwa

$$N = 50$$

(In einem Proberohr ist die Iduktor-Entladung stark geschichtet und zeigt stärker die rote H_2-Linie als die rote He-Linie. Die Elektode 5 ist gegen die Elektrode 2 um eine Potentialdifferenz von 12 Volt negativ geladen, es tritt also bei dieser Schaltung durch Elektrode 5 eine Verzögerung der durch das Diaphragma 2 hindurchflutenden Elektronen ein. Wird die Gegenspannung von −12 Volt auf −4 Volt heruntergesetzt, so setzt im Verstärkerrohr bereits Glimmentladung ein. Die Entladung ist hier also sehr stark labil.



Gegenschaltung der Anode bei hoher Spannung im Kreise I

Fig. 12.

Verschiedene Gasgemische.

Die bisherigen Versuche hatten bereits gezeigt, daß ein relativ sehr gut gereinigtes Helium, d. i. bei dieser Anordnung ein Gas, bei dem die rote H_2-Linie nur noch ganz schwach sichtbar war, viel schlechtere Verstärkung zeigte, als ein Gas, das einige Proz. He enthielt. Das He und Argon stellte ich mir nach dem Verfahren von Elster und Geitel her.

Ich habe dann Versuche mit Argon und Neon gemacht. In Argon erhielt ich sehr ähnliche Resultate wie in Helium, während in reinem Neon das ich der Freundlichkeit von Hrn. Dr. Schröter von der Firma J. Pintsch verdanke, gar keine Verstärkung, in Neongemisch nur schlechte Verstärkung beobachtet wurde. Die Versuche wurden aber bald abgebrochen. Die Versuche wurden in einer Röhre mit *K*-Elektrode angestellt, wie sie oben angegeben ist und später in einer Röhre wiederholt, bei welcher die *K*-Elektrode in einem Ansatzrohr, das senkrecht zu den übrigen Elektroden in einem Ansatzrohr angebracht war, und das ich gleichfalls der Freundlichkeit des Hrn. Dr. Schröter und der Firma Julius Pintsch verdanke.

Der Zweck war, zu verhindern, daß Kalium zwischen die Elektroden 3 und 4 zerstäubt, da hierin nach § 8 eine Quelle des Nachlassens der Röhre vermutet wurde. Es läßt sich aber nicht sagen, ob die Anordnung in Hinsicht der Lebensdauer der Röhre zweckmäßig ist, da ich mit der Röhre keine Verstärkungen von der Größe erhielt, wie mit den früheren.

Es ist aber überhaupt nicht möglich, eindeutig anzugeben, daß selbst zwei genau in gleicher Weise geblasene Röhren unter scheinbar genau den gleichen Bedingungen gleich gut als Verstärkerröhren wirken. Es ist vielleicht nicht ausgeschlossen, daß die Glasoberflächen sich nicht stets gleich verhalten oder durch das anwesende Kalium sich verändern. Nur in Industrielaboratorien mit großen Mitteln angestellte Versuchsvariation wird hier Sicherheit schaffen können.

Die hier angegebenen Versuche zeigen die Möglichkeit, hochgradig verstärkende Röhren ohne Heizelektrode herzustellen und im Zusammenhang mit der in der vorigen Arbeit wiedergegebenen Theorie ist ersichtlich, daß man die Charakteristik solcher Röhren trotz der durch hohen Gasdruck und die vielfache elektrostatische Beeinflussung komplizierte Trägerbewegung qualitativ verstehen und ihr Verhalten als Verstärkerröhre auf Grund dieser Charakteristik quantitativ mathematisch verfolgen kann.

Zum Schlusse dieser Untersuchung habe ich, der s. Zt. Bayr. Militärverwaltung und der A.E.G. für Überlassen mehrerer in die Praxis eingeführter Verstärkeranordnungen, Hrn. Dr. Schröter und der Firma J. Pintsch für Herstellung einiger Röhren mit Neon-Füllung und meinem l. Kollegen Hrn. Prof. Schnee für wertvolle Mitberatung bei der Theorie der Röhre bestens zu danken.

Leipzig, Abt. für Radiophysik des Phys. Inst.
September 1922.

(Eingegangen 12. Oktober 1922.)

2. *Zur experimentellen Untersuchung von Telephonen;*

von W. Hahnemann und H. Hecht.

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Signal Gesellschaft m. b. H., Kiel.)

Vor einiger Zeit[1]) sind von uns Messungen an Telephonen mitgeteilt, die zum Ziel hatten, Aufschluß zu geben über den mechanisch-akustischen Aufbau und über den Wirkungsgrad des Telephons.

Der Wirkungsgrad, mit dem die vom Telephon aufgenommene Energie nutzbar umgesetzt, d. h. als Schall auf das Ohr des Hörenden übertragen wird, besteht aus zwei Teilwirkungsgraden: dem mechanisch-elektrischen Wirkungsgrad, der angibt, welcher Prozentsatz der zugeführten elektrischen Energie in mechanische Form umgewandelt wird, und dem akustisch-mechanischen Wirkungsgrad, der ein Maß für den Anteil der akustischen, auf den Gehörgang übertragenen Energie an der gesamten mechanischen Energie ist. Da mit der Umwandlung der zugeführten elektrischen Energie in mechanische und deren Übertragung auf den Gehörgang des menschlichen Ohres die eigentliche Aufgabe des Telephons erfüllt ist, so bleibt die weitere Frage unerörtert, wie die vom Gehörgang aufgenommene Energie sich auf das Trommelfell und die übrigen Teile des Gehörganges verteilt, und weiterhin, mit welchem Wirkungsgrad die vom Trommelfell absorbierte Energie durch das Mittelohr zum inneren Ohr überführt und zur Wirkung gebracht wird.

Die experimentelle Ermittelung der beiden Teilwirkungsgrade des Telephons knüpft an die Aufnahme von Resonanzkurven an. Hierbei sind Telephone zugrunde gelegt, die aus einem oder mehreren mechanischen Schwingungsgebilden be-

1) W. Hahnemann u. H. Hecht, Ann. d. Phys. 60. S. 454. 1919 u. 63. S. 57. 1920.

stehen, die ihrerseits miteinander gekoppelt, mehr oder weniger gedämpft und auf das Frequenzgebiet abgestimmt sind, das empfangen werden soll. Solche Telephone werden *Tontelephone* genannt. Es ist in den genannten Arbeiten erwähnt, wie man die Aufnahmen und Untersuchungen solcher Telephone auch auf Frequenzen außerhalb des Resonanzgebietes ausdehnen kann, was für ihre Benutzung als Sprachtelephon zum Empfange von Sprechströmen nötig ist.

Die Resonanzkurve stellt die Abhängigkeit der Leistungsaufnahme eines Telephons bei konstanter erregender Kraft und veränderlicher Frequenz dar. Sie wird im allgemeinen durch Messung der Watt- und wattlosen Widerstände erhalten, aus denen sie durch Rechnung hervorgeht. Die Unempfindlichkeit der technischen Wattmeter zwingt zu dieser indirekten Methode als Ersatz der Wattmetermethode, bei der man an einem Meßinstrument die Leistungsaufnahme direkt abliest.

Der erste oder mechanisch-elektrische Teilwirkungsgrad wird aus der Resonanzkurve des am Ohr einer Versuchsperson liegenden Telephons erhalten. Durch Konstruktion oder direkte Aufnahme der Verlustlinie bei festgebremstem Schwingungsgebilde findet man aus der Resonanzkurve ohne weiteres diesen Teilwirkungsgrad.

Die Bestimmung des zweiten oder akustisch-mechanischen Teilwirkungsgrades knüpft an die Bestimmung und Zerlegung der Dämpfung an. Die gesamte Dämpfung bei Ohrlage des Telephons besteht aus Nutzdämpfung, hervorgerufen durch die abbremsende Kraft des Ohrkanals, und aus schädlicher Dämpfung, hervorgerufen im wesentlichen durch Reibung im Membranmaterial und durch Gasreibung in dem zwischen Membran und Hörmuschel liegenden niedrigen Raum. In den oben zitierten Arbeiten wurde die experimentelle Zerlegung der Dämpfung in der Weise vorgenommen, daß außer der Resonanzkurve bei Ohrlage auch die Resonanzkurven bei offener und geschlossener Schallöffnung aufgenommen wurden. Es wurde angenommen, daß das Mittel der Dämpfung der beiden letzteren Kurven die schädliche Dämpfung bei Ohrlage genau genug wiedergäbe, so daß die Nutzdämpfung als Differenz der Dämpfung bei Ohrlage und des Dämpfungsmittels aus den Kurven bei offener und geschlossener Schallöffnung erhalten

wurde. Aus Nutzdämpfung und schädlicher Dämpfung erhält man den akustisch-mechanischen Wirkungsgrad.

Spätere Überlegungen ließen uns an die Stelle der wenig exakten Methode der Bestimmung der zur Ohrkurve gehörigen schädlichen Dämpfung durch Mittelbildung aus den Kurven bei offener und geschlossener Schallöffnung eine einwandfreiere Methode und Messung setzen, die die Veranlassung zu dieser Veröffentlichung gab.

Der Raum zwischen Telephonmembran und Hörmuschel bildet mit dem Ohrkanal des Hörenden zusammen die beiden Teilräume eines Tonraumgebildes[1]), dessen Schwingungsöffnung durch den engsten Verbindungsquerschnitt dieser beiden Teilräume gebildet wird. Es liegt somit der Fall eines akustischen Schwingungssystems vor, das aus zwei gekoppelten Gebilden besteht und zwar aus einer Membran in Kopplung mit einem Tonraum. Die Resonanzfrequenzen der beiden Schwingungsgebilde liegen bei den üblichen zum Ton- oder Sprachempfang dienenden Telephonen im allgemeinen weit auseinander, und zwar beispielsweise bei dem früher untersuchten Telephon etwa bei 1000 und 2000 Per./sek. Die tiefere Frequenz entspricht dabei dem Schwingungsgebilde der Membran, und die höhere dem Tonraumgebilde. Infolge der Verschiedenheit der Abstimmungen der beiden Schwingungsgebilde vor der Kopplung prägt sich in den Resonanzkurven, die in dem durch die Membran gebildeten Schwingungsgebilde aufgenommen werden, im allgemeinen nur die der Membran zugehörige Resonanzstelle aus, die bei Tontelephonen fast stets als Arbeitsfrequenz benutzt wird. Die später mitgeteilten Resonanzkurven von Tontelephonen sind daher auch nur auf dieses Hauptresonanzgebiet beschränkt.

Die Nutzdämpfung des aus Membran und Tonraum bestehenden Schwingungssystems wird durch die nachgiebigen Wände des einen Teilraumes, des Ohrkanals, hervorgerufen. Man kann die Nutzdämpfung im Experiment zu Null machen und damit die schädliche Dämpfung allein messen, wenn man den Ohrkanal durch einen dem Volumen und der Form nach entsprechenden Kanal mit harten, unnachgiebigen

1) Phys. Zeitschr. 22. S. 353. 1920.

Wänden ersetzt. Dies wurde bei den Versuchen dadurch erreicht, daß aus einem Metallklotz ein im Metall endender zylindrischer Kanal von etwa 3 cm Länge und 0,5 cm Durchmesser herausgebohrt wurde, dessen Anfang in einen Konus von etwa 0,5 cm Höhe und 2 cm Durchmesser auslief. Die Verbindung mit dem Telephon geschah durch einen der Öffnung angepaßten, etwa $^1/_2$ mm starken Gummiring. Wir nennen dieses, Energie nicht absorbierende Gebilde „das harte Ohr", im Gegensatz zum natürlichen, schallaufnehmenden Ohr.

Aus der Resonanzkurve am natürlichen Ohr erhält man die Summe von Nutz- und schädlicher Dämpfung, aus der Resonanzkurve am harten Ohr die schädliche Dämpfung allein und somit aus beiden Kurven den akustisch-mechanischen Wirkungsgrad.

In den Figg. 1 und 2 sind die Resonanzkurven zweier Telephone mitgeteilt, und zwar in den *a*-Kurven für die Aufnahme am Ohre einer Versuchsperson und in den *b*-Kurven

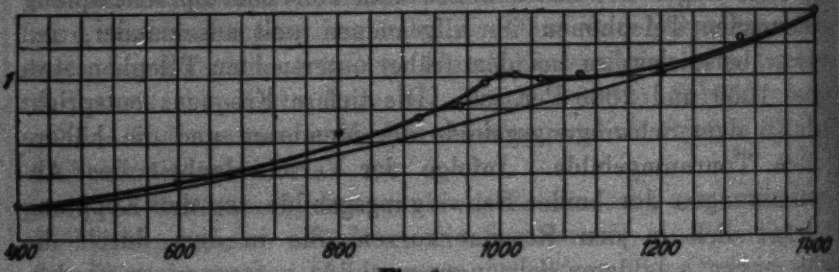


Fig. 1a.

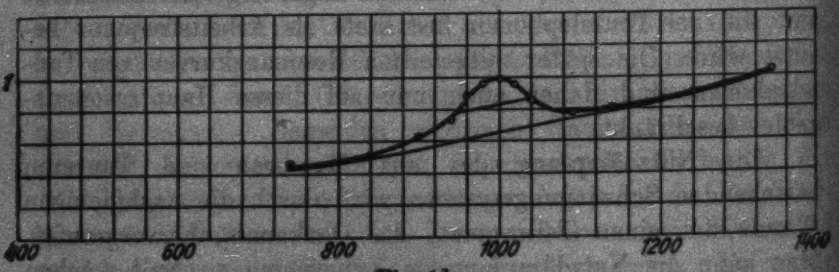


Fig. 1b.

bei Ersatz des menschlichen Ohres durch das sogenannte „harte Ohr". Die Fig. 1 bezieht sich auf ein Telephon, wie es bisher als eines der besten Telephone für die Zwecke der Signalübertragung in der Telegraphie mit elektrischen und

Unterwasserschallwellen benutzt wurde. Das Telephon, dessen Kurve in der Fig. 2 mitgeteilt wird, ist ein Telephon, das in längerer Entwicklungsarbeit im Laboratorium der Signal-Gesellschaft m. b. H., Kiel, entstanden ist.[1]) Die Abszissen stellen

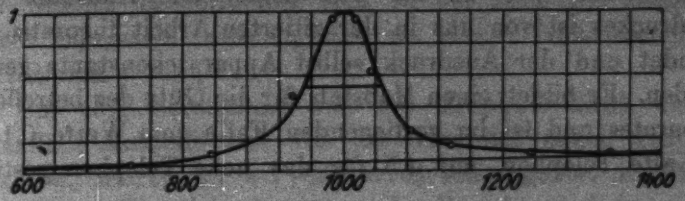


Fig. 2a.

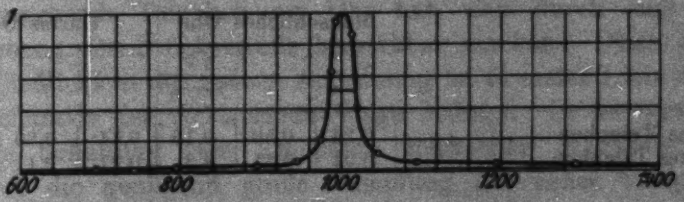


Fig. 2b.

die Frequenz der Erregung und die Ordinaten, die aus den Watt- und wattlosen Widerständen berechneten aufgenommenen Leistungen, bezogen auf die Leistung bei der Resonanzfrequenz als Einheit, bei Erregung mit konstanter Kraft dar. Hierbei sind nur die Eisenverluste und nicht auch die Kupferverluste berücksichtigt, da es, wie in den schon zitierten Arbeiten näher ausgeführt, zweckmäßiger ist, die Resonanzkurve nur auf die Eisenverluste zu beziehen und die Wirkung der Kupferverluste an dem aus der Resonanzkurve sich ergebenden Wirkungsgrad als Korrektur anzubringen.

In der Tabelle 1 sind die sich aus den Resonanzkurven ergebenden Werte für das alte und das neue Telephon zusammengestellt, und zwar sowohl für die Lage am menschlichen wie harten Ohr. Die mit η bzw. δ bezeichneten Kolumnen enthalten die Werte für die betreffenden Wirkungs-

1) Bei diesen Arbeiten zur Verbesserung des Telephons waren außer den beiden Verfassern die Herren B. Settegast und W. Späth in hervorragendem Maße beteiligt. Von letzterem stammen auch die Aufnahmen der Figg. 1 und 2.

grade bzw. Dämpfung. Aus der mit $\frac{\eta b}{1-\eta}$ bezeichneten jeweils letzten Kolumne erkennt man, daß dieser Ausdruck innerhalb der Meßfehler unabhängig davon ist, ob das Telephon am menschlichen oder harten Ohr liegt. Die Konstanz dieses Ausdruckes ist von uns in der zitierten Arbeit theoretisch begründet und der Ausdruck selbst Apparatekonstante genannt worden. Er bildet einen Maßstab für die Güte des betreffenden Apparates und ist im vorliegenden Falle vom Werte 0,16 für das alte Telephon, auf 4,5 für das neue Telephon gestiegen.

Tabelle 1.

	Menschliches Ohr			Hartes Ohr		
	η	b	$\frac{\eta b}{1-\eta}$	η	b	$\frac{\eta b}{1-\eta}$
Altes Telephon	0,24	0,50	0,16	0,34	0,30	$0{,}15_5$
Neues Telephon	0,94	0,31	4,8	$0{,}97_5$	0,11	4,3

Es ist bereits oben gesagt worden, daß die η-Werte nur auf die Eisenverluste und nicht auch auf die Kupferverluste bezogen sind. Aus dem Verhältnis von Kupferwiderstand zu Eisenwiderstand, das für die beiden Telephone 1,7 : 1 bzw. 1 : 1 ist, berechnet sich der auf die gesamten Verluste bezogene mechanisch-elektrische Wirkungsgrad η_s, wie er in der ersten Kolumne der Tabelle 2 für beide Telephone angegeben ist. In der zweiten Kolumne dieser Tabelle ist der aus dem Dämpfungsunterschied bei Lage des Telephons am menschlichen und harten Ohr sich ergebende akustisch-mechanische Wirkungsgrad η_a und in der dritten Kolumne das Produkt beider Wirkungsgrade, der totale akustische Wirkungsgrad η_{at} angegeben.

Tabelle 2.

	η_s	η_a	η_{at}
Altes Telephon . .	0,10	0,40	0,04
Neues Telephon . .	0,89	0,64	0,57

Mit der mehr als zehnfachen Verbesserung des Wirkungsgrades gegenüber dem älteren bekannten Modell stellt das neue

Tontelephon einen Abschluß in der Entwicklung des Tontelephons dar, da es bei praktisch genügender Dämpfung eine in Betracht kommende Steigerung des Wirkungsgrades überhaupt nicht mehr zuläßt. Es wird später Gegenstand einer ausführlichen Beschreibung sein, in der auch die Mittel und Wege angegeben werden, die zu dieser Verbesserung geführt haben.

Um eine Vorstellung von der Empfindlichkeit der angewandten Methode und von der Güte des neuen Telephons zu geben, führen wir an, daß im Resonanzgebiet bereits die kleinste unwillkürliche Bewegung der Gesichtsmuskeln und gelegentlich auch die Atemzüge der Versuchsperson, die das zu untersuchende Telephon am Ohr hat, sich durch eine Verschiebung des Brückennulls bemerkbar machen. Diese große Empfindlichkeit der ganzen Anordnung ist in erster Linie durch die Methode der elektrischen Wage bedingt. In der gewöhnlichen Schaltung zum Empfange schwacher Wechselströme sichert die genügend große Dämpfung des neuen Telephons am Ohre des Beobachters eine ausreichende Konstanz bzgl. Abstimmung und aufgenommener Leistung.

Die Methode, die das Energie verzehrende Tonraumgebilde durch ein solches mit starren, Energie nicht absorbierenden Wänden, ersetzt, ist auch noch anwendbar, wenn der die Nutzenergie verbrauchende Teilraum durch die freie Atmosphäre gebildet wird, d. h. wenn der Tonraum in einen Helmholtzschen Resonator übergeht. In der technischen Akustik tritt dies bei den Schallapparaten für die freie Atmosphäre ein. In diesem Fall kann man die Strahlungsdämpfung, die bei diesem Apparatetyp die Nutzdämpfung ist, zu Null machen, wenn man vor die Schallöffnung einen geschlossenen Raum mit harten Wänden setzt, der keine Energie verzehrt. Damit die Abstimmung des Tonraumgebildes vom Übergang des offenen strahlenden Resonators zum geschlossenen Gebilde nicht unzulässig geändert wird, und damit die Strömungsvorgänge möglichst die gleichen bleiben, muß man den künstlichen Raum vielmals größer als den Resonatorraum machen. Andererseits muß der künstliche Teilraum in allen seinen Dimensionen klein zur halben Wellenlänge sein, damit keine stehenden Wellen in ihm, d. h. keine neuen Schwingungs-

vorgänge und damit keine neuen Verluste entstehen können. Diese Methode ist von Hrn. H. Lichte mit gutem Erfolge für Luftschallsender zur Bestimmung des akustischen Wirkungsgrades und der ausgestrahlten Schallleistung angewandt worden. Ihre Resultate sind in guter Übereinstimmung mit der Strahlungsleistung, die sich aus der in der freien Atmosphäre mit der Rayleighschen Scheibe gemessenen Schallintensität berechnet.

(Eingegangen 28. November 1922.)

3. *Mechanische Schwingungssysteme mit Stoßanregung*[1]; *von K. Krüger.*

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[2]) hat F. Harms die Anregungsbedingungen sich selbst steuernder Schwingungssysteme untersucht und in einem beim Jenaer Physikertag gehaltenen Vortrage darauf hingewiesen, daß Unabhängigkeit der Schwingungszahlen von den Erregungsbedingungen nur dann zu erwarten ist, wenn zwischen der anregenden Kraft und der Schwingung selbst eine Phasendifferenz $\pi/2$ besteht. Jede andere Phasendifferenz bedingt eine Veränderung der Schwingungszahl und beeinflußt auch die stationäre Amplitude, so daß diese beiden Größen unter Umständen nicht allein durch die Eigenfrequenzen und Dämpfungen bzw. die Stärke der anregenden Kraft bestimmt sind.

Wir wollen nun im folgenden den Einfluß untersuchen, den eine Abweichung von der Phasendifferenz $\pi/2$ auf Schwingungszahl und Amplitude eines einfachen, sich selbst steuernden Pendels ausübt. Dabei soll stets eine Stoßerregung angenommen werden, d. h. die Kraft, welche die Schwingungen unterhält, soll stets nur eine im Verhältnis zur Schwingungsdauer des Systems verschwindende zeitliche Ausdehnung haben. Entwickelt man das in der Schwingungsgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + a^2x = f(t) \tag{1}$$

auftretende Störungsglied $f(t)$ in eine Fouriersche Reihe, so kann man, so lange es sich um schwache Dämpfungen handelt, die Entwicklung mit dem ersten Gliede abbrechen, also

$$f(t) = R\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}\omega t$$

setzen. Die Lösung dieser Gleichung ist also eine Sinusfunktion. Bei starker Dämpfung dagegen kann eine solche aber

1) Erweiterter Auszug aus einem Teil der Dissertation Würzburg 1922.
2) F. Harms, Ann. d. Phys. 66. S. 26. 1921.

offenbar nicht die Lösung der Differentialgleichung sein, denn die entstehende Bewegung erfolgt wie eine gedämpfte Sinusschwingung mit einer Unstetigkeitsstelle im Augenblick des Stoßes.

1. Die Lösungen der Differentialgleichung für den Fall der schwachen Dämpfung.

Ist die Dämpfung des schwingenden Systems schwach, d. h. nähert sich eine Amplitude der vorhergehenden bis auf wenige Prozent, wenn man das Pendel sich selbst überläßt, so kann man in Gleichung (1) auf der linken Seite ein Integral $x = A_1 \sin \omega t$ bilden und rechts $f(t) = R \cos \omega t$ setzen.[1]) Dann ergibt sich für die Schwingungszahl

$$\omega^2 = \frac{a^2}{m}$$

und für die Amplitude

$$A_1 = \frac{R}{k\omega},$$

d. h. das Pendel schwingt in seiner ungedämpften Eigenfrequenz mit einer Amplitude, die dem Stoß direkt und der Schwingungszahl umgekehrt proportional ist. Hierbei ist, wie ersichtlich, zwischen der Schwingung und der anregenden Kraft eine Phasendifferenz $\pi/2$ angenommen. Zur Untersuchung der Frage, wie sich Schwingungszahl und Amplitude ändern, wenn eine andere Phasendifferenz als $\pi/2$ auftritt, setzt man

$$f(t) = R_1 \sin \omega t + R_2 \cos \omega t;$$

dann erhalten wir aus Gleichung (1)

$$A_1 [(-m\omega^2 + a^2) \sin \omega t + k\omega \cos \omega t] = R_1 \sin \omega t + R_2 \cos \omega t$$

oder, wenn man die Eigenfrequenz des Pendels $\omega_0^2 = \frac{a^2}{m}$ einführt und die Sinusglieder von den Kosinusgliedern trennt,

$$A_1 (\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{R_1}{m}$$

und

$$A_1 = \frac{R_2}{k\omega}. \tag{2}$$

1) Vgl. F. Harms, l. c.

Für die Schwingungszahl ergibt sich also

$$\omega = -\frac{1}{2}\frac{k}{m}\frac{R_1}{R_2} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}$$

oder, wenn $\frac{\omega}{\omega_0} = \Omega$ und $\frac{k/m}{\omega_0} = K$ gesetzt wird,

$$\Omega = -\frac{1}{2}K\frac{R_1}{R_2} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \quad (3)$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß die Schwingungszahl nur abhängig ist von dem Verhältnis R_1/R_2, nicht aber von den Absolutwerten, also überhaupt unabhängig von der Amplitude. Von den zwei Werten, die sich für Ω ergeben, hat natürlich nur der positive physikalische Bedeutung.

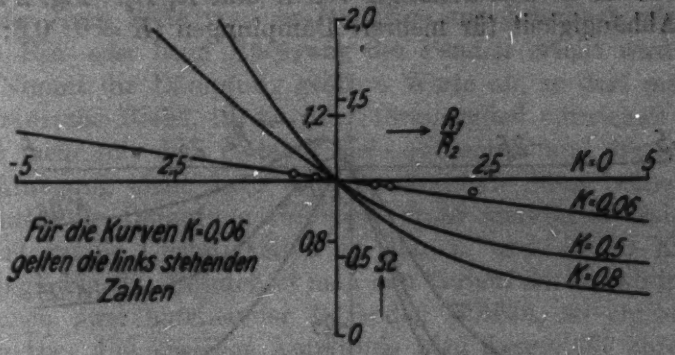


Fig. 1.

In Fig. 1 sind die für verschiedenes R_1/R_2 berechneten Werte von Ω bei konstantem K aufgetragen. Für negative Werte von R_1/R_2 ist das zugehörige Ω größer, für positive kleiner als 1. Die Kurve verläuft völlig kontinuierlich, ohne jede Maxima und Minima. Sie wird um so steiler, je größer K ist, d. h. je stärker die Dämpfung, desto augenfälliger ändert sich die Schwingungszahl bei einer kleinen Änderung der Phasendifferenz zwischen x und $f(t)$.

Zur Berechnung der Amplitude kann der vorhin erhaltene Ausdruck (2)

$$A_1 = \frac{R_2}{k\,\omega}$$

benutzt werden. Wir wollen nun die folgenden Untersuchungen auf den praktisch allein in Frage kommenden Fall beschränken, daß die erregende Kraft der Größe nach konstant

gehalten und nur ihre Phase geändert wird, daß also

$$\sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \text{const} = R \tag{4}$$

ist; dann wird

$$A_1 = \frac{1}{k\omega} \frac{R}{\sqrt{1 + (R_1/R_2)^2}}.$$

Dividiert man endlich A_1 durch die bei „rechtzeitigem" (d. h. zur Phasendifferenz $\pi/2$ gehörigen) Stoß auftretende Normalamplitude $A_0 = R/k\omega_0$, so ergibt sich als Endresultat

$$\frac{A_1}{A_0} = A = \frac{1}{\Omega \sqrt{1 + (R_1/R_2)^2}}.$$

Hier ist für Ω der aus Gleichung (3) entnommene Wert einzusetzen. A ist also abhängig von K und R_1/R_2. Fig. 2 zeigt diese Abhängigkeit für mehrere Dämpfungen ($K = 0$; 0,5; 0,8)

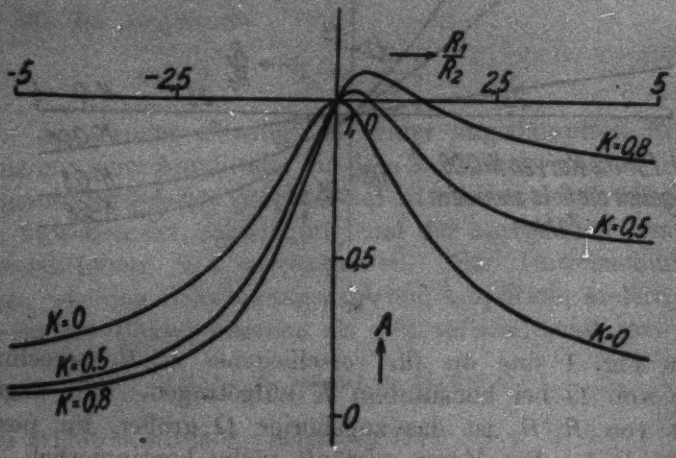


Fig. 2.

Für $K = 0$ liegt die Kurve symmetrisch zur Nullachse der R_1/R_2 und hat im Schnittpunkt mit dieser Achse ihr Maximum. Dieses Maximum bleibt auch merklich an derselben Stelle bestehen, so lange K klein bleibt. Die Amplitude ist also am größten, wenn der Stoß beim Durchgang des Pendels durch die Ruhelage erfolgt, d. h. bei schwach gedämpften Systemen hat eine Verfrühung des Stoßes qualitativ dieselbe Wirkung wie eine Verspätung.[1])

1) Vgl. E. Dorn, Ann. d. Phys. 17. S. 661. 1882.

Anders gestaltet sich das Bild, wenn man stärkere Dämpfungen betrachtet, gleichwohl zunächst aber die Annahme einer sinusförmigen Erregung beibehält. Mit wachsender Dämpfung rückt das Amplitudenmaximum immer mehr nach rechts, d. h. die Amplitude ist nicht mehr am größten, wenn der Stoß rechtzeitig, sondern wenn er später erfolgt. (Vgl. in Fig. 2 die Kurven für $K = 0{,}5$ und $0{,}8$). Gleichzeitig werden die Kurven mit wachsender Dämpfung unsymmetrischer. Während sie im Gebiet der negativen R_1/R_2 (Verfrühung des Stoßes) immer steiler verlaufen, verflachen sie sich rechts und gehen nur sehr langsam gegen Null.

2. Die Lösungen für starke Dämpfung.

Wir betrachten hier zunächst den Fall, daß der Stoß nur auf der *einen* Seite von der Ruhelage aus gerechnet, also *nur* beim Hin- *oder* beim Rückgang des Pendels erteilt wird.

Nimmt die Dämpfung größere Werte an, so darf man die Fouriersche Reihe, in die das Störungsglied entwickelt wird, nicht mehr mit dem ersten Gliede abbrechen und demzufolge die Anregung nicht mehr als ungedämpften Sinus betrachten. Je mehr die Dämpfung zunimmt, desto merklicher treten an der Stoßstelle Unstetigkeiten in den x- und dx/dt-Kurven auf (vgl. Fig. 3). Betrachtet man den Verlauf der Schwingungen zwischen zwei aufeinander folgenden Stößen, so ergibt sich folgendes. Die jeweilige Amplitude wird dargestellt durch die Gleichung

$$x = e^{-\lambda t}(D \sin \omega_0 t + E \cos \omega_0 t) \tag{5}$$

und dementsprechend die jeweilige Geschwindigkeit durch

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\lambda t}[-(D\lambda + E\omega_0) \sin \omega_0 t + (D\omega_0 - E\lambda) \cos \omega_0 t]. \tag{6}$$

Zur Zeit $t = 0$, in dem Moment kurz nach dem Stoß, soll nun $x = x_1$ und $v = v_1 + \Im$ sein, wobei $\Im = 1/m \int f(\tau)\, d\tau$ den Stoß, den Impuls darstellt. Führt man diese Grenzbedingungen in die Gleichungen (5) und (6) ein, so ergibt sich

$$x = e^{-\lambda t}\left(\frac{v_1 + \Im + \lambda x_1}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_1 \cos \omega_0 t\right) \tag{7}$$

und

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\lambda t}\left[-\left(\frac{v_1 + \Im + \lambda x_1}{\omega_0}\lambda + x_1 \omega_0\right) \sin \omega_0 t + (v_1 + \Im) \cos \omega_0 t\right]. \tag{8}$$

[1]

1) Vgl. die analogen Resultate bei E. Dorn, l. c. S. 656.

Die Bedingung für den stationären Zustand geht nun dahin, daß nach Ablauf der Schwingungsdauer ϑ die Amplitude wieder denselben Wert x_1 erreicht hat und die Geschwindigkeit auf v_1 herabgesunken ist. Einführung dieser Grenzbedingungen ergibt

$$x_1 = e^{-\lambda\vartheta}\left(\frac{v_1+\Im+\lambda x_1}{\omega_0}\sin\omega_0\vartheta + x_1\cos\omega_0\vartheta\right) \tag{9}$$

und

$$v_1 = e^{-\lambda\vartheta}\left[-\left(\frac{v_1+\Im+\lambda x_1}{\omega_0}\lambda + x_1\omega_0\right)\sin\omega_0\vartheta + (v_1+\Im)\cos\omega_0\vartheta\right]. \tag{10}$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich v_1 und ϑ als Funktionen von x_1, λ, ω_0 und $\Im$ berechnen. Die stationäre Amplitude ergibt sich folgendermaßen: Nach Gleichung (8) erreicht x seinen größten Wert, wenn

$$\operatorname{tg}\omega_0 t = \frac{\omega_0(v_1+\Im)}{\lambda v_1 + \lambda\Im + \lambda^2 x_1 + \omega_0^2 x_1}$$

ist. Daraus lassen sich die zur Maximalamplitude gehörenden Werte von $\sin\omega_0 t$, $\cos\omega_0 t$ und t berechnen. Setzt man endlich die so erhaltenen Werte in Gleichung (7) ein, so erhält man die gesuchte stationäre Amplitude.

Damit ist das Problem gelöst, denn die Gleichungen (7) bis (10) gestatten die Berechnung der stationären Schwingungszahl und Amplitude aus den vorgegebenen Größen x_1, λ, ω_0 und $\Im$. Jedoch sind die Formeln in dieser Gestalt praktisch nicht brauchbar. Dagegen läßt sich aus den voraufgegangenen Überlegungen leicht eine graphische Methode ableiten, die ein direktes Ablesen der gesuchten Werte von Ω und A gestattet. Namentlich das Auffinden der zu einer bestimmten Verfrühung oder Verspätung x_1 gehörenden Schwingungszahl gestaltet sich — wenn man die stationäre Amplitude zunächst einmal vorgegeben denkt — sehr einfach. Man zeichnet die Kurve $x = a\cdot e^{-\lambda t}\sin\omega_0 t$ (in Fig. 3 ausgezogen) und parallel zur Zeitachse die Gerade $x = x_1$ (lang gestrichelt). In der Fig. ist $x_2 = UT$ die Amplitude des Pendels, x_1 diejenige Elongation, bei der das System den Stoß erhält. x_1 wird als Bruchteil von x_2 in die Figur eingetragen.

Das Vorzeichen von x_1 soll positiv gerechnet werden, wenn x_1 und x_2 auf derselben Seite, von der Ruhelage aus gerechnet, liegen, also bei verspätetem Stoß, und negativ bei Verfrühung. Kurve und Abszissenachse mögen sich in den Punkten N und

O schneiden, Kurve und Gerade $x = x_1$ in P und Q. Dann stellt das Verhältnis der beiden Strecken PQ und NO das Verhältnis der zugehörigen Schwingungsdauern[1]) dar, also

$$\frac{PQ}{NO} = \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{\Omega}, \tag{11}$$

wenn der Index 0 die Zugehörigkeit zum rechtzeitigen Stoß bedeutet.

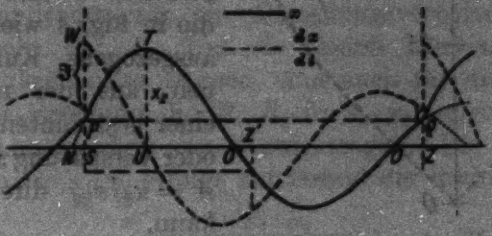


Fig. 3.

Mit Hilfe dieser graphischen Methode lassen sich also die stationären Schwingungszahlen leicht und mit beliebiger Genauigkeit bestimmen, wenn die Dämpfung λ, die Eigenschwingungszahl ω_0, die Stoßelongation x_1 und die stationäre Amplitude x_2 gegeben sind.

Ähnlich gestaltet sich die Bestimmung der stationären Amplitude x_2. Außer der x-Kurve zeichnet man noch die Geschwindigkeitskurve $v = \frac{dx}{dt} = a \cdot e^{-\lambda t}(\omega_0 \cos \omega_0 t - \lambda \sin \omega_0 t)$ (in Fig. 3 gestrichelt). Aus letzterer entnimmt man die zu einer bestimmten durch das Verhältnis $x_1/x_2 = X$ ausgedrückten Stoßelongation gehörenden Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Stoß ($v_1 = SW$) und unmittelbar danach ($v_2 = ZY$). Die Differenz dieser beiden Geschwindigkeiten stellt den Geschwindigkeitszuwachs, den erhaltenen Impuls dar

$$\Im = SW - ZY = v_1 - v_2 = ax_2 \tag{12}$$

und zwar ausgedrückt in Bruchteilen von $x_2 = UT$. Hält man nun die erregende Kraft dauernd konstant und ändert nur ihre Phase, so muß $\Im$ stets denselben Wert haben, also

---

1) Als stationäre Schwingungsdauer muß man hier natürlich die Zeit verstehen, nach welcher der Schwingungsvorgang sich identisch wiederholt, also die Zeit zwischen zwei Stößen.

$$c x_2 = c_0 x_{20}$$

und folglich

(13) $$\frac{x_2}{x_{20}} = A = \frac{c_0}{c}$$

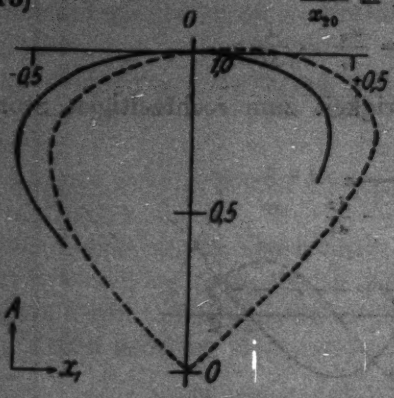


Fig. 4.

sein. Aus dieser Gleichung und der Beziehung $x_1/x_2 = X$ läßt ich nun, wenn man X zwischen 0 und 1 variiert, die in Fig. 4 wiedergegebene ausgezogene Kurve berechnen, aus der man das zu einer bestimmten Verfrühung oder Verspätung x_1 gehörende $A = x_2/x_{20}$ direkt ablesen kann.

3. Einseitiger und doppelseitiger Stoß.

Die im letzten Abschnitt über stark gedämpfte Schwingungssysteme angestellten Betrachtungen bezogen sich sämtlich auf einseitige Anregung, d. h. auf den Fall, daß der Stoß dem System nur auf der *einen* Seite, von der Ruhelage aus gerechnet, erteilt wird. Es ist jedoch leicht, die Überlegungen auch auf die doppelseitige Erregung zu übertragen, welche in der Praxis die größere Rolle spielt (z. B. bei der Multiplikationsmethode). Rein rechnerisch braucht man nur in Gleichung (9) und (10) statt der ganzen Schwingungsdauer ϑ die halbe einzuführen. Bei der graphischen Auswertung bestimmt man den Schnittpunkt Q' der gedämpften Sinuskurve mit der Geraden $x = -x_1$ und erhält dann statt (11) für die Schwingungszahl die Beziehung

$$\frac{P'Q'}{N'O'} = \frac{\tau'}{\tau_0'} = \frac{\omega_0'}{\omega'} = \frac{1}{\Omega'}$$

und statt (12) für die Amplitudenbestimmung

$$\underline{\mathfrak{Z}} = SW - Z'Y' = v'_1 - v_2' = c' x_2$$

und schließlich an Stelle von (13)

$$\frac{x_2}{x_{20}} = A = \frac{c_0'}{c'} .$$

Im übrigen gestaltet sich alles genau wie bei der einseitigen Erregung.

4. Vergleich der Ergebnisse für starke und schwache Dämpfung.

Es ist gezeigt worden, daß man bei stärkeren Dämpfungen nicht mehr die gewöhnliche Theorie der erzwungenen Schwingungen zugrunde legen kann, wenn es sich um Stoßerregung handelt. Man muß vielmehr von der einzelnen gedämpften Schwingung ausgehen und die anregende Kraft als Impuls von unendlich kurzer Dauer im Verhältnis zur Schwingungsdauer des Systems auffassen. Den Unterschied beider Berechnungsarten in bezug auf die Amplituden für ein Dämpfungsverhältnis $p = 1{,}51$ veranschaulicht Fig. 4. Um die beiden Kurven besser mit einander vergleichen zu können, sind auch für die Kurve mit sinusförmiger Erregung die R_1/R_2 in x_1/x_2 umgerechnet und dann x_2 in Abhängigkeit von x_1 aufgetragen. Die Umrechnung der R_1/R_2 in die x_1/x_2 erfolgt auf Grund der leicht ableitbaren Gleichung

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{R_1/R_2}{\sqrt{1 + (R_1/R_2)^2}}.$$

Die Kurve der sinusförmigen Erregung weicht hier schon recht erheblich von der mit Stoßerregung ab. Während für Stoßerregung das Amplitudenmaximum dann eintritt, wenn der Impuls im Momente des Durchganges durch die Ruhelage erteilt wird, stellt sich bei der sinusförmigen Anregung das Maximum erst bei einer gewissen Verspätung ein. Ferner fällt in die Augen, daß die gestrichelte Kurve bis $A = 0$ heruntergeht, während die andere auf beiden Seiten an ganz bestimmten Stellen abbricht. Die Lage dieser Abreißstellen hängt von der Dämpfung ab. Aus Fig. 3 erkennt man leicht, daß x_1/x_2 nicht beliebige Werte annehmen kann. Bei einseitiger Erregung muß für Verfrühung des Stoßes $\frac{x_1}{x_2} \gtrless \frac{1}{p}$, bei Verspätung $\gtrless \frac{1}{p^2}$ sein, für doppelseitige Erregung $\frac{x_1}{x_2} \gtrless 1$, bzw. $\gtrless \frac{1}{p}$.

5. Versuchsanordnungen.

Zur Untersuchung der von der Theorie geforderten Erscheinungen wurden zwei verschiedene Versuchsanordnungen benutzt, zunächst ein schweres sich selbst steuerndes Torsionspendel und dann ein ballistisches Galvanometer. Die erste Anordnung bestand wesentlich in folgendem: Ein einfaches Torsionspendel mit einem Trägheitsmoment von ungefähr 40 000 CGS, dessen Schenkel sich längs einer Skala drehten, trug auf beiden Seiten je eine Spule, vor deren weiter innerer

Öffnung sich ein Elektromagnet befand. Im Stromkreis der Spulen lag ein Kontakt, über den das Pendel bei seiner Bewegung hinstrich, sowie ein Galvanometer. Im Momente des Stromschlusses zogen die beiden konstant erregten Elektromagneten die Spulen über sich herüber und erteilten dem Pendel derart einen Impuls. Die Stellung der Magneten dem Kontakt gegenüber blieb stets unverändert; zwecks Variierung der Phase wurde die Ruhelage des Pendels relativ zum Kontakt verschoben derart, daß der Pendelkörper auf dem Torsionsdrahte gedreht wurde.

Diese Anordnung erwies sich als geeignet zur Bestimmung der Schwingungsdauer. Fig. 1 zeigt die aus Gleichung (8) berechnete Abhängigkeit der Schwingungszahl von der Phase für eine Dämpfung $K = 0{,}06$. Daneben sind die mit Hilfe der eben beschriebenen Anordnung gemessenen Werte von Ω als kleine Kreise eingetragen.

Zur genaueren Bestimmung der Grenzamplituden reichte diese Versuchsanordnung jedoch nicht aus. Es wurde deshalb für die weiteren Versuche ein Drehspulgalvanometer von Hartmann und Braun benutzt. Die Schwingungsdauer des Instrumentes wurde durch Auflegen von Zusatzgewichten auf den Schwingungskörper bis zu 81,9 Sek. vergrößert, um mit möglichst großer Genauigkeit den Stoß immer wieder bei derselben Elongation erteilen zu können. Zur Anregung wurde ein Kondensator benutzt, der mit Hilfe einer Wippe zunächst an einen Akkumulator gelegt und dann im bestimmten Moment über das Galvanometer entladen wurde. Die Stoßelongation x_1 wurde durch Anbringen von Marken auf der Skala festgelegt. Der Stromschluß erfolgte im Augenblick, wo Marke und Fadenkreuz zur Deckung kamen. Es wurden Beobachtungsreihen aufgenommen für zwei Dämpfungen, eine schwache ($p = 1{,}088$) und eine stärkere ($p = 1{,}51$). Bei der letzteren Dämpfung wurden die Messungen sowohl für einseitigen als auch für doppelseitigen Stoß durchgeführt.

Die Kurven Fig. 5 bis 10 zeigen die Versuchsergebnisse. Die ausgezogenen Kurven sind berechnet, die Kreise sind die beobachteten Punkte. In Fig. 8 ist gestrichelt noch diejenige Amplitudenkurve eingezeichnet, die sich ergeben würde, wenn die Rechnung statt nach Abschnitt 2 nach Abschnitt 1 ausgeführt wäre.

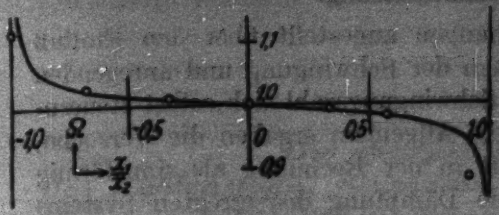


Fig. 5.

Kapazität des Kondensators 0,1 M.F.
Angelegte Spannung ca. 0,6 Volt
Dämpfungsverhältnis $p = 1{,}088$
Erregung doppelseitig

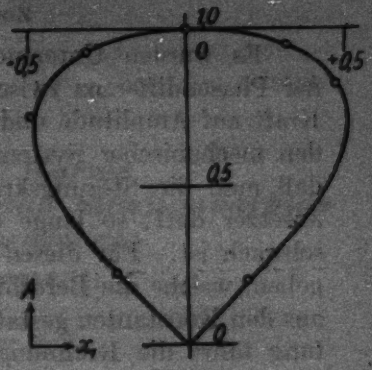


Fig. 6.

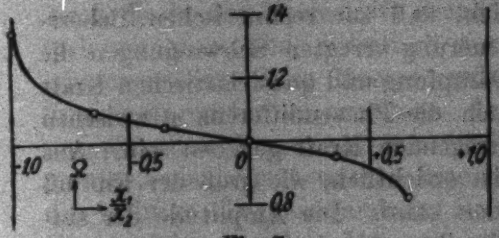


Fig. 7.

Kapazität des Kondensators 0,5 M.F.
Angelegte Spannung ca. 0,8 Volt
Dämpfungsverhältnis $p = 1{,}51$
Erregung doppelseitig

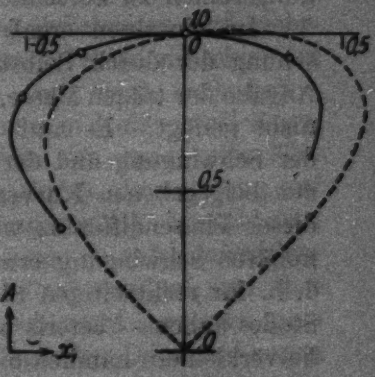


Fig. 8.

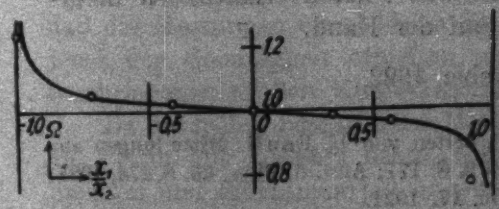


Fig. 9.

Kapazität des Kondensators 0,8 M.F.
Angelegte Spannung ca. 2,0 Volt
Dämpfungsverhältnis $p = 1{,}51$
Einseitige Erregung

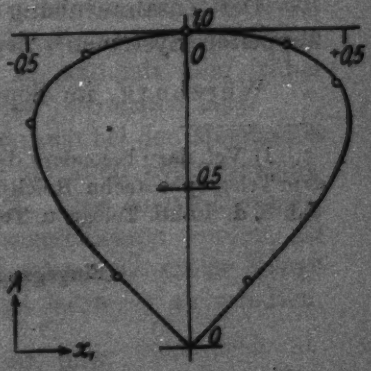


Fig. 10.

Zusammenfassung.

Es wurden Untersuchungen angestellt über den Einfluß der Phasendifferenz zwischen der Schwingung und anregenden Kraft auf Amplitude und Schwingungszahl sich selbst steuernden mechanischer Systeme. Allgemein ergaben die Versuche, daß man die Störungskraft in der Rechnung als sinusförmig ansetzer darf, so lange die Dämpfung des erregten Systems schwach ist. Für diesen Fall werden einfache Formeln angegeben, welche die Berechnung der entstehenden Schwingungen aus den Konstanten gestatten. Für den Fall der starken Dämpfung führt die Rechnung zu komplizierten Gleichungen. Es ist jedoch auch hier auf einfache Weise, nämlich mit Hilfe eines graphischen Verfahrens, möglich, die Amplituden und Schwingungszahlen zu berechnen.

Im einzelnen ergab sich, daß zur rechnerischen Beherrschung der durch Selbststeuerung erregten Schwingungen die Angabe der trägen Masse, Dämpfung und quasielastischen Kraft nicht genügt. Es muß auch die Phasendifferenz φ zwischen der Schwingung und der erregenden Kraft gegeben sein. Aus den beigegebenen Kurven ist ersichtlich, wie groß der Einfluß dieser Phasendifferenz werden kann. Die Amplitude der stationären Schwingung erreicht ihren Maximalwert für $\varphi = \pi/2$, d. h. für rechtzeitigen Stoß. Verfrühung oder Verspätung des Stoßes haben — ceteris paribus — qualitativ dieselbe Wirkung, sie verkleinern nämlich die Amplitude. Auch die Schwingungszahl wird von der Phase beeinflußt und zwar wächst sie mit zunehmender Verfrühung des Stoßes und nimmt ab mit wachsender Verspätung.

Der Zusammenhang mit den Phasenverhältnissen in gekoppelten Systemen[1]) liegt auf der Hand.

Würzburg, im September 1922.

---

1) Vgl. dazu besonders die Arbeiten von H. Pauli, Mitteilungen aus dem Telegraphentechn. Reichsamt 9. S. 171; Ann. d. Phys. 65. S. 274, 1921; Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. 17. 1921.

(Eingegangen 29. September 1922.)

4. *Die spezifische Wärme des Kohlenstoffs, Siliziums und Siliziumkarbids bei hohen Temperaturen;* *von A. Magnus.*

A. Experimenteller Teil.

Der Verlauf der spezifischen Wärmen fester Körper bei tiefen Temperaturen ist durch die zahlreichen Untersuchungen von Nernst und seinen Schülern weitgehend geklärt worden. Auch die in der Überschrift genannten Substanzen sind mehrfach gemessen und diskutiert worden. Trotzdem schien es wünschenswert, diese Messungsreihen auch noch nach hohen Temperaturen hin zu erweitern. Denn vom Kohlenstoff liegen nur die alten Messungen Webers[1]) vor, die zwar beim Diamanten, wie gezeigt werden konnte[2]), durch Umrechnung auf die richtige Temperaturskala zu einigermaßen brauchbaren Werten führen, während der Graphit keine so zufriedenstellenden Ergebnisse zeitigte. Silizium und Carborundum sind aber bei hohen Temperaturen überhaupt noch nicht gemessen worden. Eine Ergänzung der bisher vorliegenden Untersuchungen durch ausführliche Messungsreihen ließ erwarten, daß für die genannten Stoffe, besonders den sehr interessanten Graphit, neue Einblicke in ihr physikalisches und chemisches Verhalten zu gewinnen seien. Die Voraussetzung hierfür war allerdings, daß die Messungen einen bisher im allgemeinen nicht üblichen Grad der Genauigkeit erhielten, wie er sich mit dem früher beschriebenen großen Kupferkalorimeter[3]) erreichen läßt.

Da die früher beschriebene Methode sich bei den Messungen am Platin gut bewährt hatte, wurde sie auch beim Graphit, Silizium und Siliziumkarbid angewandt. Eine Neubestimmung am Diamanten konnte leider nicht angeschlossen werden, da es trotz zahlreicher Bemühungen nicht gelang, die nötige Menge kleiner Steine auch für nur kurze Zeit leihweise zu erhalten.

1) H. F. Weber, Pogg. Ann. 154. S. 367. 1875.
2) A. Magnus, Ann. d. Phys. 48. S. 983. 1915.

Diese Messungen waren ja auch wegen des leidlich guten Anschlusses, den Webers Zahlen an diejenigen anderer Beobachter gaben, am wenigsten dringlich.

Das Meßverfahren bestand in einer Bestimmung der durch eine Thermosäule von 50 Elementen Kupfer-Konstantan (früher Eisen gegen eine andere Nickellegierung) angezeigten Temperaturdifferenz zwischen einem als Kalorimeter dienenden großen Kupferblock im Innern einrs doppelwandigen, evakuierten Gefäßes und einer größeren, dieses Gefäß umgebenden Wassermenge. Die Thermosäule, deren Widerstand durch Wahl ziemlich dicker Drähte niedrig gehalten war, gab, wie durch einen Versuch festgestellt wurde, die richtige Spannungsdifferenz von 2 Millivolt für 1° Temperaturunterschied.

Da sich bei der Neuaufnahme der Versuche zeigte, daß wegen der Empfindlichkeit der Spannungsmessung, die sich mit dem Diesselhorstkompensator auf 10^{-7} Volt, also $^1/_{20000}{}^0$ mit Sicherheit ausführen ließ, schon kleine Schwankungen der Zimmertemperatur von wesentlichem Einfluß auf den Temperaturgang des Wassers waren, wurde diesem Umstande besondere Beachtung geschenkt. Es gelang auch, die Zimmertemperatur innerhalb weniger Zehntelgrade konstant zu halten, wie während der Versuche an mehreren in der Nähe des Kalorimeters aufgehängten Thermometern festgestellt wurde. Auch in der sehr regelmäßigen Änderung der Wassertemperatur, die an einem in $^1/_{100}{}^0$ geteilten Thermometer kontrolliert wurde, zeigte sich die Wirksamkeit des Verfahrens, das in mehr oder weniger weitem Öffnen der in die Nebenräume führenden Türen bestand. Da das Zimmer infolge von Wärmeverlusten des elektrischen Ofens oder des Dampfbades, in dem die zu untersuchende Substanz erhitzt wurde, während des Versuches stets wärmer war als in den Zwischenpausen, stieg die Wassertemperatur bei allen Messungen langsam an, so daß die Änderung der Thermokraft vor dem Einwurf des die Substanz enthaltenden Gefäßes in die konische Höhlung des Kupferblockes immer in demselben Sinne verlief; denn der gut isolierte, auf etwa Wassertemperatur gebrachte Kupferblock konnte seine Temperatur nicht nennenswert ändern.

Unter Berücksichtigung dieser Umstände ließ sich zur Berechnung der wahren durch die eingeworfene Substanz am Kupferblock hervorgerufenen Temperaturänderung ein neues

Extrapolationsverfahren[1]) theoretisch ableiten. Die Überlegungen, die dazu führten, sind folgende:

Es sei durch eine Reihe von Beobachtungen festgestellt, wie groß vor dem Einwurf des Gefäßes die Abnahme der Thermokraft ist. Sie betrage in der Minute konstant a Mikrovolt. Genau sechs Minuten nach Ermittlung des letzten Spannungswertes werde die Substanz eingebracht und dann noch 59 Minuten lang, zuerst nach 4, darauf in Intervallen von je 5 Minuten beobachtet. Die ersten Ablesungen nach dem Einwurf, die nur zu einer Kontrolle der Stetigkeit des Temperaturverlaufs dienen sollen, können zur Berechnung nicht verwandt werden, da ein Teil der an das Kupfer abgegebenen Wärme zunächst auf die innere Wandung des Isoliergefäßes übertritt. Deshalb muß ein stationärer Zustand abgewartet werden, der erst nach einiger Zeit eintritt. 54 Minuten nach dem Einwurf dürfte er aber sicher erreicht sein. Deshalb werden die zwei letzten Beobachtungen zur Berechnung verwandt. Sie seien e_n und e_{n-5}, wenn $n = 65$ gesetzt wird, also n die Zeit in Minuten angibt, die seit der letzten, mit e_0 bezeichneten Ablesung vor dem Einwurf vergangen ist. Wäre der Einwurf nicht erfolgt, so hätte sich die Thermokraft von e_0 auf $e_0 - na$ vermindert. Da in Wirklichkeit e_n abgelesen wird, stellt $e_n - e_0 + na$ den durch die Erwärmung des Kupferblocks allein erzielten Effekt dar. Da das über seine Umgebung erwärmte Kupfer sich ständig abkühlen muß, wird die Differenz der zwei letzten Ablesungen $e_{n-5} - e_n$, vermindert um den Gang des Wasserbades, $5a$, während dieser Zeit, die den Wärmeverlust des Kalorimeterblocks darstellt, nur von der Temperaturerhöhung des Kupfers abhängen, und zwar ihr proportional sein. Für diese Temperaturerhöhung ist der Mittelwert der zwei letzten Messungen, $e_n - e_0 + na$ und $e_{n-5} - e_0 + (n-5)a$, also $\frac{1}{2}[e_n + e_{n-5} - 2e_0 + (2n-5)a]$ einzusetzen. So wird, da während einer Minute des letzten Intervalls der Wärmeverlust des Kupfers durch $\frac{1}{5}(e_{n-5} - e_n - 5a)$ gegeben ist:

$$\tfrac{1}{5}(e_{n-5} - e_n - 5a) = k\tfrac{1}{2}[e_n + e_{n-5} - 2e_0 + (2n-5)a],$$

wenn k ein Proportionalitätsfaktor ist, der sich auf die Spannungsänderung während einer Minute bezieht. Aus dieser

1) In der früheren Arbeit wurde die Extrapolation nach einem zwar grundsätzlich ähnlichem, aber umständlicheren Verfahren ausgeführt.

Gleichung läßt sich k ausrechnen. Setzt man allgemein die Temperaturabnahme des Kupfers in der Minute seiner gerade vorhandenen Temperaturerhöhung über den Anfangswert proportional, so ist, wenn man wieder statt der Temperatur- die Spannungsänderungen einführt,

$$-\frac{de}{dt} = ke.$$

Daraus erhält man durch Integration zwischen den entsprechenden Grenzen für die wahre Spannungsänderung ε, extrapoliert auf den Moment des Einwurfs, die Gleichung:

$$\log \varepsilon = \log(e_n - e_0 + n\,a) + 0{,}4343\,k(n - \tau),$$

wenn τ den Zeitpunkt des Einwurfs, also 6 Minuten nach Beginn der Zeitrechnung bezeichnet. Diese Theorie verlangt, daß k eine Konstante ist, deren Zahlenwert nur von der Isolation des Kalorimeters abhängt. Da k bei sämtlichen Versuchen wirklich nahezu konstant im Betrage von etwa 0,0013 bis 0,0015 gefunden wurden — etwas größere oder kleinere Werte kamen nur ganz vereinzelt vor —, darf die Anwendbarkeit der Formel als erwiesen gelten.

Als Beispiel für die Berechnung der Versuche diene der in Tab. 1 angegebene, willkürlich herausgegriffene Versuch:

Tabelle 1.

Zeit	e_1	e_2	e_m	Differenz
4,35	29,6			
4,40		26,6	26,4	
4,45	22,7		22,7	3,7
4,50		19,0	19,0	3,7
4,55	15,2			
4,56	Einwurf des Platiniridiumgefäßes mit 5,584 g Graphit von 697,6°			
5,00	1509,0			
5,05		1474 0	1477 2	
5,10	1451,8		1452,9	24,3
5,15		1434,0	1434,4	18,5
5,20	1417,6		1417,9	16,5
5,25		1402,2	1402,5	15,4
5,30	1387,8		1387,8	14,7
5,35		1373,2	1373,4	14,4
5,40	1359,3		1359,4	14,0
5,45		1345,6	1345,7	13,7
5,50	1332,2		1332,2	13,5
5,55		1318,7	1318,8	13,4
6,00	1305,6			

In der ersten Spalte von Tab. 1 stehen die Ablesezeiten, in der zweiten und dritten die Kompensatorablesungen in Mikrovolt bei der durch den Index von e angegebenen Stellung des zur Elimination von störenden Thermokräften im Kompensator verwandten Doppelumschalters. Die vierte Reihe gibt die Mittelwerte aus den zwei Stellungen des Doppelumschalters. Da eine Beobachtung jeweils nur bei der einen Stellung erfolgen konnte, wurde der Wert für die andere durch lineare Interpolation zwischen der vorhergehenden und der folgenden Kompensatorablesung ermittelt. In der letzten Reihe endlich stehen die Differenzen aufeinanderfolgender Zahlen der vierten Reihe.

Von den angeführten Zahlen benötigt man zur Berechnung des Versuches nur die folgenden: $5a = 8{,}7$, $e_n = 1818{,}8$, $e_{n-5} = 1332{,}2$ und $e_0 = 19{,}0$. Aus ihnen folgt $k = 0{,}001426$ und $\varepsilon' = 1469{,}1$. Das Wasser zeige während des Versuches eine Temperatur von 22,4°; daher besaß der Kupferblock nach dem Einwurf eine um $\frac{1469{,}1}{2000} = 0{,}7°$ höhere Temperatur, also 23,1°, wie sich aus der Spannung von 2000 Mikrovolt für 1° Temperaturunterschied ergibt. Dividiert man ε' durch die von der Substanz durchlaufene Temperaturdifferenz, $t_1 - t_2 = 697{,}6 - 23{,}1 = 674{,}5$, so erhält man als mittlere Spannungsänderung für 1° Abkühlung des gefüllten Gefäßes $\frac{\varepsilon'}{t_1 - t_2} = 2{,}1779$ Mikrovolt. Zieht man hiervon den durch besondere Messungen für das leere Gefäß bestimmten Wert von $\frac{e_0}{t_1 - t_2} = 0{,}5179$ Mikrovolt ab, so erhält man $\frac{\varepsilon}{t_1 - t_2} = 1{,}6600$ Mikrovolt als Betrag für den Graphit allein. Diese Zahl dividiert durch die Masse $m = 5{,}584$ g des Graphits gibt 0,29728 Mikrovolt. Dividiert man weiter durch 0,9050 den aus Wassereichversuchen ermittelten Wert der von 1 cal. verursachten Spannungsdifferenz, so erhält man als mittlere spezifische Wärme des Graphits im angegebenen Temperaturintervall $\bar{c}_p = 0{,}32848$ und die von 1 g Graphit bei der Abkühlung um 674,5° abgegebene Wärmemenge $Q = 221{,}56$ cal.

Im folgenden sollen zunächst die Messungsergebnisse zusammengestellt werden, die alle auf Grund in genau der gleichen Weise ausgeführter Versuche erhalten wurden. Diese Messungen zerfallen in drei Teile: Die Versuche mit den

leeren Gefäßen (Tab. 2), die Eichversuche (Tab. 3) und die eigentlichen Messungen (Tabb. 4—6). Was die Eichversuche anlangt, ist zu bemerken, daß wie früher (a. a. O.) ein mit einer gewogenen Wassermenge gefülltes, zugelötetes Silbergefäß (im folgenden als Nr. 1 bezeichnet) in einem dampfumspülten Kupferrohr bis zum Wassersiedepunkt erhitzt und in das Kalorimeter eingeworfen wurde. Daß das Gefäß wirklich die aus dem Barometerstande sich ergebende Siedetemperatur des Wassers besaß, wurde an einem das Gefäß berührenden, in 0,01° geteilten Thermometer kontrolliert. Die mittlere spezifische Wärme des Wassers zwischen dem Siedepunkte und Zimmertemperatur wurde ebenso wie früher als 1 cal. den Messungen zugrunde gelegt.

Da die eigentlichen Messungen nicht wie seinerzeit beim Platin (a. a. O.) nur von Temperaturen über 500° ausgehend vorgenommen, sondern auch in tieferen Temperaturgebieten ausgeführt wurden, mußten, wollte man in diesen auch die nötige Genauigkeit erhalten, größere Substanzmengen ver-

Tabelle 2.

t_1	t_2	ε_0	$\frac{\varepsilon_0}{t_1 - t_2}$ beob.	$\frac{\varepsilon_0}{t_1 - t_2}$ ber.
		Leeres Wassergefäß: Nr. 1		
99,10	17,40	117,4	1,437	
98,94	17,30	117,5	1,439	
98,85	17,60	116,7	1,436	1,437
98,71	17,22	116,4	1,437	
Leeres Platiniridiumgefäß: Nr. 2. $\frac{\varepsilon_0}{t_1 - t_2}$ ber. $= 0{,}4900 + 4\ 10^{-5}\, t_1$				
499,3	19,3	245,0	0,5104	0,5100
500,9	16,5	246,7	0,5096	0,5100
698,6	16,6	353,3	0,5183	0,5180
700,2	16,7	354,1	0,5180	0,5180
898,3	19,0	463,6	0,5273	0,5260
701,3	16,9	463,8	0,5244	0,5260
905,8	21,5	466,0	0,5270	0,5262
		Leeres Silbergefäß: Nr. 3		
98,93	17,72	183,8	2,263	2,260
98,94	17,20	184,5	2,257	
281,4	17,5	598,3	2,267	2,280
281,3	17,8	604,4	2,294	
		Leeres Silbergefäß: Nr. 4		
99,28	17,38	180,7	2,206	
299,2	17,9	630,4	2,241	

wandt werden können, als das kleine Platiniridiumgefäß (im folgenden als Nr. 2 bezeichnet) faßte. Diesem Zweck dienten zwei in einer früheren Arbeit[1]) beschriebene Silbergefäße (in den Tabellen mit Nr. 3 und Nr. 4 bezeichnet).

Die Abweichungen der beobachteten Werte vom Mittel ist im allgemeinen nicht beträchtlich. Nur bei dem Gefäß Nr. 3, das für Temperaturen über 100° wie früher in einem 32 mm weiten Kupferrohrofen erhitzt werden mußte, kommen wohl infolge nicht ganz zuverlässiger Temperaturmessung etwas größere Differenzen vor.

Tabelle 3.

Wassergefäß (Nr. 1) mit m g Wasser

m	t_1	t_2	ε'	$\frac{\varepsilon'}{t_1-t_2}$	$\frac{\varepsilon}{t_1-t_2}$	$\frac{\varepsilon}{m(t_1-t_2)}$
15,476	99,08	15,88	1285,0	15,445	14,008	0,9051
15,411	98,19	16,20	1262 7	15 403	13 966	0 9063
15,390	98,60	16,68	1257,9	15,359	13,922	0,9046
15,309	98,82	17,99	1237,2	15,309	13,872	0,9040
15,184	98,76	17,24	1235,1	15,155	13,718	0,9034
15,174	98,94	17,23	1234,8	15,118	13,681	0,9016
17,900	98,85	23,56	1332,5	17,687	16,260	0,9084
17,577	98,86	23,11	1315,7	17,369	15,932	0,9064
17,336	99,21	17,83	1398,4	17,183	15,746	0,9083
17,149	98,98	17,05	1384,1	16,894	15,457	0,9013
					Mittel:	0,9060

Der mittlere Fehler des Resultates von Tab. 3, das sich aus den 10 teils am Beginn der Arbeit ausgeführten, teils später zwischen die Messungen eingeschobenen Eichversuchen ergibt, beträgt 8 Einheiten der letzten Stelle, also etwa 0,1 Proz.

In den Tabb. 4—6, in denen die Ergebnisse der eigentlichen Messungen zusammengestellt sind, haben die Buchstaben in den Reihenüberschriften die gleiche Bedeutung wie früher. Die Werte für $\frac{\varepsilon}{t_1-t_2}$ sind fortgelassen worden; dafür sind in den letzten Reihen unter Q die von 1 g Substanz abgegebenen Wärmemengen aufgeführt, und zwar unter $Q_{\text{beob.}}$ die aus den Versuchen unmittelbar hervorgehenden Zahlen, unter $Q_{0\,\text{beob.}}$ diese Zahlen vergrößert um den Wärme-

1) A. Magnus, Physikal. Ztschr. 14. S. 5. 1913.

betrag, der bei einer Abkühlung auf 0° C. statt auf Zimmertemperatur frei geworden wäre, während die folgende Reihe unter $Q_{0\,ber.}$ die nach einer jeweils am Kopfe der Tabelle stehenden Interpolationsformel berechneten Werte von Q_0 enthält. Um diese Formel den Messungsergebnissen möglichst gut anzupassen, wurden ihre Konstanten nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate in erster Annäherung ermittelt. Die unter Δ stehenden Differenzen $Q_{0\,beob.} - Q_{0\,ber.}$ lassen den Grad der Übereinstimmung erkennen. Dieses Ausgleichsverfahren, das merkwürdigerweise bei kalorimetrischen Untersuchungen längst nicht so häufig zur Anwendung gelangt, wie man erwarten sollte, bietet den großen Vorteil, daß die Messungen untereinander in Zusammenhang gebracht werden, so daß sich die Unsicherheit der einzelnen Zahl viel weniger bemerkbar macht, als wenn dieser Zusammenhang fehlt. Außerdem gestattet es, durch Differentiation der Interpolationsformel die wahre spezifische Wärme für jede in den Meßbereich fallende Temperatur zu ermitteln.

Zu erwähnen ist ferner, daß für jede Substanz nur zwei Gefäße verwandt wurden, und zwar außer dem Platiniridiumgefäß (Nr 2) eins der beiden Silbergefäße. Da das bei dem zuerst gemessenen Graphit neben Nr. 2 ausschließlich benutzte Gefäß Nr. 3 bei einem verunglückten Versuch unbrauchbar wurde, konnte für Silizium und Siliziumkarbid nur noch Gefäß Nr. 4 angewandt werden. Ob das große oder kleine Gefäß jeweils zur Aufnahme der Substanz diente, geht aus der Masse m der Füllung hervor, die bei den großen Silbergefäßen ein Vielfaches des Inhalts von Nr. 2 beträgt.

Vom Graphit wurde durch Hrn. Dr. Melms eine Verbrennung im Sauerstoffstrom ausgeführt, die etwa 99,8 Proz. Kohlenstoffgehalt ergab. Ein wägbarer Rückstand verblieb nicht im Platinschiffchen. Der verwandte Ceylongraphit, der zur Entfernung geringer Verunreinigungen durch Quarzstückchen mit Flußsäure mehrfach abgeraucht und gut ausgewaschen war, konnte also als sehr rein gelten.

Vom Silizium wurde eine Probe in Kalilauge gelöst und als Kieselsäure nach mehrmaligem Abrauchen mit Salzsäure und gutem Auswaschen des Niederschlages zur Wägung gebracht. Zwei von Hrn. stud. Hodler so ausgeführte Analysen gaben 99,18 bzw. 99,32 Proz. Silizium. Außerdem führte

Hr. Kollege W. Gerlach in Frankfurt a. M. eine röntgenspektrographische Untersuchung der Kristallstruktur des graphitisch aussehenden Siliziums aus, die genau dieselben Linien ergab wie grobkristallinisches Material. An der regulären Struktur des verwandten Siliziums kann daher nicht gezweifelt werden.

Das Siliziumkarbid wurde nicht analysiert. Es bestand aus schönen, offenbar recht reinen Kristallen, die nur durch Spuren von Kohlenstoff etwas grau gefärbt waren.

Zuerst wurde, wie erwähnt, der Graphit gemessen. Die große Zahl von 41 Versuchen erklärt sich daraus, daß am Graphit die Brauchbarkeit der Methode gründlich ausprobiert wurde. Besonders sollten die 10 Messungen bei 282° zeigen, ob die Versuche mit zwei Gefäßen in verschiedenen elektrischen Öfen und bei wechselnder Art der Temperaturmessung zu annähernd demselben Resultat führten. Die Temperatur wurde nämlich am kleinen Gefäß immer mit dem Platin-Platinrhodiumelement, am großen bei den vier folgenden Versuchen auch auf diese Weise, bei den vier zuletzt angeführten dagegen mit einem in $^1/_2{}^0$ geteilten, geprüften Thermometer gemessen. Wenn auch eine gewisse systematische Abweichung zu erkennen ist, kann der Anschluß doch als einigermaßen befriedigend angesehen werden, wenn man berücksichtigt, daß die Temperaturangaben des Thermometers, das mit seinem langen Quecksilbergefäß im oberen Teile des schlecht isolierten Ofens ziemlich weit in die Höhe reichte, offenbar stets etwas zu niedrig waren, während beim Thermoelement, dessen punktförmige Lötstelle sich etwa in der Mitte, also an der heißesten Stelle des Ofens befand, eher das Gegenteil der Fall war. Müssen somit die Einzelversuche mit dem Kupferrohrofen zwar als wenig sicher angesehen werden, so ist doch der Mittelwert der ganzen Gruppe wahrscheinlich ziemlich richtig. Er wird auch, wie Tab. 4 zeigt, ebenso wie die 11 anderen Gruppenresultate durch die 5konstantige Formel mit einer völlig befriedigenden Genauigkeit dargestellt.

Beim Silizium, dessen spezifische Wärme sich in dem untersuchten Temperaturgebiet viel weniger ändert, genügt zur angenäherten Darstellung der Resultate sogar schon eine Gleichung mit nur drei Konstanten. Die Übereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Werten ist zufrieden-

stellend, wenn man berücksichtigt, daß die Messungen wegen des ungünstigen Verhältnisses der Wärmekapazität des Gefäßes zu seinem Inhalt keinen sehr großen Anspruch auf Genauigkeit machen können.

Beim Siliziumkarbid hingegen mußte wieder eine fünfkonstantige Formel verwandt werden, die aber den Messungen noch nicht ganz gerecht wird. Denn hier dürfen die Ergebnisse der einzelnen Versuche, deren Reihenfolge aus der in Tab. 6 angefügten, die Versuchsnummer bezeichnenden Rubrik hervorgeht, als besonders sicher angesehen werden. Man erkennt, daß die Differenz zwischen beobachteten und berechneten Werten wohl nicht bloß die zufälligen Versuchsfehler darstellt, sondern eine Temperaturfunktion ist, die bei etwa 650° ein Minimum besitzt. Dies wird bei der theoretischen Verwertung der Resultate zu berücksichtigen sein. Doch schien es nicht notwendig, eine noch kompliziertere Interpolationsformel zu verwenden, um die offenbar ziemlich unbedeutenden systematischen Abweichungen völlig zu beseitigen.

Tabelle 4. Graphit.

$$Q_{0\,\mathrm{ber.}} = 0{,}1520\,t_1 + 3{,}8885\cdot10^{-4}\,t_1^2 - 2{,}855\cdot10^{-7}\,t_1^3 + 1{,}4718\cdot10^{-10}\,t_1^4 - 4{,}385\cdot10^{-14}\,t_1^5.$$

m	t_1	t_2	t'	$Q_{\mathrm{beob.}}$	$Q_{0\,\mathrm{beob.}}$	$Q_{0\,\mathrm{ber.}}$	Δ
39,662	99,04	18,63	739,0	15,52	18,48	18,59	− 0,11
39,662	99,03	17,98	748,2	15,73	18,59	18,59	0,00
				Mittel	18,54	18,59	− 0,05
5,644	281,2	21,5	457,5	64,10	67,55	67,99	− 0,44
5,644	281,5	21,5	460,2	64,61	68,06	68,09	− 0,03
18,787	281,1	20,4	1696,9	64,85	68,11	67,96	+ 0,15
18,787	282,5	21,7	1685,9	64,18	67,66	68,40	− 0,74
18,787	282,7	21,4	1686,4	64,15	67,58	68,46	− 0,88
18,787	282,9	21,2	1687,9	64,19	67,59	68,52	− 0,93
18,157	282,1	18,4	1698,1	66,71	69,64	68,27	+ 1,37
39,580	281,5	18,8	2943,3	65,43	68,43	68,09	+ 0,34
39,580	282,3	19,0	2945,4	65,45	68,48	68,33	+ 0,15
39,580	282,5	19,0	2967,1	66,04	69,07	68,40	+ 0,67
				Mittel	68,22	68,25	− 0,03
5,638	400,8	22,1	723,6	104,26	107,81	108,35	− 0,54
5,627	501,4	22,9	967,6	142,11	145,80	145,89	− 0,09
6,313	502,0	23,1	1061,2	142,99	146,71	146,13	+ 0,58
6,796	503,9	13,1	1135,8	143,96	146,02	146,86	− 0,84
5,065	505,2	15,4	915,1	144,55	146,96	147,37	− 0,39
				Mittel	146,38	146,56	− 0,18

Tabelle 4. Graphit. (Fortsetzung.)

m	t_1	t_2	s'	$Q_{\text{beob.}}$	$Q_{0\text{ beob.}}$	$Q_{0\text{ ber.}}$	Δ
5,077	550,0	15,8	1019,5	162,36	164,86	165,11	− 0,25
6,577	554,7	13,4	1258,1	164,78	166,88	166,87	+ 0,01
				Mittel	165,87	165,99	− 0,12
6,820	602,9	13,8	1440,4	184,30	186,47	186,38	+ 0,09
4,675	609,2	15,4	1091,6	185,94	188,37	188,95	− 0,58
5,054	613,1	15,9	1168,4	188,27	190,79	190,56	+ 0,23
				Mittel	188,54	188,63	− 0,09
6,244	648,1	21,6	1462,9	201,67	205,13	205,07	+ 0 06
4,705	651,8	15,5	1192,1	202,81	205,26	206,61	− 1,35
6,618	651,8	13,3	1555,0	204,63	206,72	206,61	+ 0,11
5,036	655,3	15,5	1274,2	207,11	209,56	208,08	+ 1,48
				Mittel	206,67	206,59	+ 0,08
5,584	697,6	23,1	1469,1	221,56	225,28	225,95	− 0,67
6,673	699,4	13,2	1709,8	224,21	226,28	226,73	− 0,45
6,262	699,5	22,3	1612,4	222,63	226,21	226,77	− 0,56
5,015	700,9	15,5	1380,0	225,85	228,30	227,36	+ 0,94
4,825	703,8	15,8	1343,1	225,93	228,43	228,60	− 0,17
				Mittel	226,90	227,08	− 0,18
6,594	746,0	13,6	1841,1	244,61	246,75	246,71	+ 0,04
4,962	746,0	15,7	1475,7	244,08	246,56	246,71	− 0,15
				Mittel	246,66	246,71	− 0,05
6,800	799,8	14,1	2052,5	266,89	269,11	269,63	− 0,52
4 913	803,0	15,9	1607,9	269,20	271,72	271,57	+ 0,15
6,548	805,1	13,7	2020,9	271,29	273,44	272,44	+ 1,00
				Mittel	271,42	271,21	+ 0,21
6,665	848,3	22,3	2174,2	288,69	291,27	291,45	− 0,18
6,663	849,5	13,0	2180,8	290,27	292,31	291,96	+ 0,35
				Mittel	291,79	291,71	+ 0,08
6,629	898,4	22,4	2318,8	309,71	313,31	313,64	− 0,33
6,831	900,0	14,6	2395,2	312,11	314,41	314,31	+ 0,10
4,843	902,3	16,1	1839,9	313,42	315,97	315,33	+ 0,64
				Mittel	314,56	314,43	+ 0,13

Die Wägung der Substanz wurde beim Graphit nach dem Versuch vorgenommen, da durch die Erhitzung in dem nicht luftdicht schließenden Gefäß, zumal wenn es sich um hohe Temperaturen handelte, etwas Graphit verbrannte, wodurch das Gewicht abnahm. Beim Silizium war hingegen als Folge

Tabelle 5. Silizium.

$$Q_{0\,\text{ber.}} = 0{,}1723\,t_1 + 6{,}40\cdot10^{-5}\,t_1^2 - 2{,}575\cdot10^{-8}\,t_1^3.$$

m	t_1	t_2	s'	$Q_{\text{beob.}}$	$Q_{0\,\text{beob.}}$	$Q_{0\,\text{ber.}}$	Δ
22,661	99,11	18,21	479,1	14,66	17,80	17,68	+ 0,12
22,661	198,5	17,5	1094,2	33,74	36 76	36,52	+ 0,24
22,661	300,9	17,8	1744,2	54,12	57,18	56,95	+ 0,23
4,886	399,5	19,0	520,9	74,25	77,53	77,41	+ 0,12
4,552	500,0	16,5	641,4	95,84	98,69	98,93	− 0,24
5,199	500,0	18,8	698,5	96,28	99,53	98,93	+ 0,60
4,552	546,6	17,5	711,4	106,97	109,99	109,10	+ 0,89
5,201	601,7	18,9	853,8	117,86	121,12	121,23	− 0,11
4,552	649,3	17,0	857 3	128 59	131,53	131,81	− 0,28
5,199	699,3	19,0	1008,7	139,48	142,76	142,98	− 0,22
4,552	747,4	16,9	999,7	150,48	153,40	153,78	− 0,38
5,199	799,0	19,0	1166,9	161,46	164,74	165,40	− 0,66
5,168	849,0	19,3	1246,1	173,48	176,81	176,66	+ 0,15
4,921	899,8	16,5	1285,9	184,42	187,27	188,10	− 0,83
5,180	901,4	19,4	1333,7	185,57	188,92	188,46	+ 0,46

Tabelle 6. Siliziumkarbid.

$$Q_{0\,\text{ber.}} = 0{,}15524\,t_1 + 1{,}9807\cdot10^{-4}\,t_1^2 - 1{,}0666\cdot10^{-7}\,t_1^3 - 4{,}264\cdot10^{-11}\,t_1^4 + 5{,}551\cdot10^{-14}\,t_1^5.$$

m	t_1	t_2	s'	$Q_{\text{beob.}}$	$Q_{0\,\text{beob.}}$	$Q_{0\,\text{ber.}}$	Δ	Nr.
44,611	99,28	17,70	759,3	14,36	17,20	17,26	− 0,06	18
44,661	99,23	17,96	755,9	14,29	17,17	17,25	− 0,08	16
44,661	200,3	18,4	1812,2	34,87	37,82	38,12	− 0,30	15
44,661	250,2	18,8	2415,7	47,04	50,06	49,46	+ 0,60	12
44,661	299,6	19,0	2993,3	58,57	61,62	61,21	+ 0,41	13
7,510	350,1	18,0	649,3	70,86	73,74	73,70	+ 0,24	11
7,510	399,4	18,1	758,3	83,18	86,08	86,28	− 0,20	10
7,510	450,3	17,6	879,5	97,06	99,88	99,62	+ 0,26	17
7,510	499,1	19,1	993,3	110,05	112,95	112,63	+ 0,32	14
7,510	501,2	17,3	999,1	110,70	113,48	113,21	+ 0,27	1
7,510	550,5	18,2	1109,2	123,10	126,02	126,59	− 0,57	8
7,510	600,1	17,7	1231,5	137,15	139,98	140,23	− 0,25	4
7,510	650,8	18,1	1353,7	150,71	153,61	154,35	− 0,74	6
7,510	898,8	17,5	1473,8	164,92	167,73	167,88	− 0,15	2
7,510	750,3	18,6	1605,5	180,24	183,23	182,62	+ 0,61	9
7,510	800,4	18,1	1733,0	194,92	197,82	197,20	+ 0,62	5
7,510	849,9	18,5	1856,6	209,05	212,02	211,90	+ 0,12	7
7,510	899,4	18,0	1984,3	223,74	226,62	227,01	− 0,39	3

der Oxydation eine von der Temperatur und Dauer der Erhitzung abhängige kleine Gewichtszunahme festzustellen. Deswegen wurde das Gefäß, wenn es auf mehr als 700° erwärmt worden war, für den nächsten Versuch frisch gefüllt.

Was endlich die Temperaturmessung anlangt, wurde, wie schon erwähnt, zumeist ein Thermoelement Platin-Platinrhodium verwandt, dessen Eichung früher (a. a. O.) ausführlich beschrieben worden ist. Die Angaben des Thermoelements wurden mit dem Schwefelsiedepunkt mehrfach nachkontrolliert. Die Konstanz war so befriedigend, daß eine Korrektur nicht angebracht zu werden brauchte.

Die gefundenen Interpolationsformeln geben die Möglichkeit, die Güte der Weberschen Messungen (a. a. O.) am Graphit und Silizium festzustellen. Dies ist in Tab. 7 geschehen, in der die von Weber angegebenen Wärmemengen, soweit es nötig war, in derselben Weise wie in den vorhergehenden Tabellen auf 0° umgerechnet und mit den nach den Interpolationsformeln berechneten verglichen worden sind. Die Erhitzungstemperaturen sind beim Graphit, soweit sie Weber aus der spezifischen Wärme des Platins abgeleitet hatte, entsprechend der Neubestimmung dieser Zahlen (a. a. O.) umgerechnet worden.

Tabelle 7.

t_1	t_2	$Q_{\text{beob.}}$	$Q_{0\,\text{beob.}}$	$Q_{0\,\text{ber.}}$	Δ
			Graphit		
21,6	0		3,465	3,462	+ 0,003
99,0	0		18,85	18,60	+ 0,25
178,0	0		38,93	37,89	+ 1,04
225,3	0		52,96	51,08	+ 1,88
273,2	0		68,53	65,48	+ 3,05
560,9	21,6	168,08	171,55	169,36	+ 2,19
578,1	22,0	173,98	177,52	176,27	+ 1,25
757,5	22,1	249,98	253,53	251,69	+ 1,84
774,5	22,4	257,48	261,09	259,08	+ 2,01
938,0	21,7	327,41	330,90	331,17	− 0,27
965,6	22,8	338,66	342,34	343,43	− 1,09
1093,4	22,4	384,42	398,03	399,71	− 1,68
1104,6	23,0	399,50	403,21	404,56	− 1,35
			Silizium		
42,13	0		7,32	7,37	− 0,05
71,07	0		12,44	12,56	− 0,12
100,9	0		18,11	18,02	+ 0,09
156,6	0		29,05	28,47	+ 0,58
212,0	0		40,19	39,18	+ 1,01
252,3	0		48,37	47,16	+ 1,21

Tab. 7 zeigt, daß Webers Beobachtungen bis 100° sehr gut mit den berechneten Werten übereinstimmen, ebenso ist

auch die Abweichung seiner Resultate am Graphit nach Richtigstellung seiner Temperaturmessung im Gebiete höherer Temperaturen nicht sehr erheblich und einigermaßen konstant Daß die Übereinstimmung noch bis über 900° hinaus, also in ein Gebiet hineinreicht, für das die Interpolationsformel gar nicht mehr durch Messungen gestützt ist, muß natürlich als ein bedeutungsloser Zufall gelten. Webers Messungen mit dem Eiskalorimeter oberhalb 100° lassen hingegen sowohl beim Graphit wie beim Silizium mit der Temperatur wachsende Fehler im gleichen Sinne erkennen, deren Existenz bei der Umrechnung der Weberschen Graphitzahlen (a. a. O.) schon vermutet wurde. Es liegt nahe, als Ursache hierfür einen Irrtum in Webers Temperaturmessung anzunehmen. Doch war es auch möglich, daß beim Einbringen der erhitzten Substanz in das Kalorimeterwasser durch Adsorption des letzteren eine die Differenz erklärende Wärmemenge frei wurde. Eine Prüfung dieser Frage wurde in folgender Weise vorgenommen:

In ein einfaches, aus einem Dewargefäß mit 200 g Wasserfüllung bestehendes Kalorimeter wurde ein Kölbchen eingebracht, in dem sich etwas Graphit befand. Das Kölbchen war vorher mit der Dampfstrahlpumpe evakuiert und, nach längerem Erhitzen des Graphits bis zum Weichwerden des Glases abgeschmolzen worden. Nachdem der Gang der Temperatur des gleichmäßig gerührten Kalorimeterwassers eine Zeitlang an einem Beckmannthermometer beobachtet war, wurde das Kölbchen unter Wasser aufgebrochen und der Gang weiter beobachtet. Die ersten drei Reihen von Tab. 8 zeigen die gefundenen Resultate.

Tabelle 8.

m	C	ϑ	$Q = \frac{C\vartheta}{m}$
14	215	0,041	0,63
33,5	217	0,116	0,75
15	215	0,047	0,67
0	213	0,000	0,00
14	215	0,013	0,20

In Tab. 8 bedeutet m die angewandte Graphitmenge, C die Kapazität des Kalorimeters, ϑ die gefundene Tempe-

raturerhöhung und Q die Adsorptionswärme von 1 g Graphit. Der vierte Versuch ist eine Kontrollmessung ohne Graphit im Kölbchen. Der letzte Versuch endlich sollte die Adsorptionswärme beim Einströmen von Luft statt Wasser geben. Zu diesem Zweck wurde der Hals des Kölbchens oberhalb der Wasseroberfläche abgebrochen. Tab. 8 zeigt, daß zwar ein meßbarer Effekt[1]) auftritt, der aber relativ klein ist, obgleich der im Vakuum von Luft befreite Graphit sicher viel leichter Wasser adsorbiert als der in der Atmosphäre erhitzte. Da der Effekt bei der Adsorption von Luft noch erheblich geringer ist, kann zwar ein Bruchteil der zwischen Webers und den neuen Messungen bestehenden Abweichungen durch die Verschiedenheit der Adsorptionswärme gegenüber Wasser und Luft erklärt werden, der Hauptunterschied dürfte aber durch unzuverlässige Angaben des von Weber benutzten Thermometers verursacht sein.

Diese ausführliche Diskussion der Weberschen Messungen rechtfertigt sich dadurch, daß im theoretischen Teil der nur von Weber im hohen Temperaturgebiet gemessene Diamant auch besprochen werden soll. Hierzu muß man aber wissen, wie weit man sich etwa auf die zur Verfügung stehenden Zahlen verlassen darf.

Zur theoretischen Verwertung der Resultate ist es nötig, die bei konstantem Druck gemessenen spezifischen Wärmen auf konstantes Volumen umzurechnen. Dazu benötigt man bekanntlich Dichte, Ausdehnungskoeffizienten und Kompressibilität der Substanzen. Für die drei hier untersuchten Stoffe sind diese Größen alle bekannt bis auf den Ausdehnungskoeffizienten des Siliziumkarbids. Deshalb mußte diese Messung angeschlossen werden. Da die Kristalle des verwandten Siliziumkarbids nicht groß genug waren, um eine direkte Messung des linearen Ausdehnungskoeffizienten zu gestatten, konnte nur eine Bestimmung der kubischen Ausdehnung nach der Pyknometermethode in Frage kommen.

Die Messung gestaltete sich folgendermaßen: An ein Kölbchen von etwa 50 ccm Inhalt aus gewöhnlichem Glase wurde durch einen Schliff ein etwa 10 cm langes Glasrohr

1) Weber hat dieser Frage auch schon seine Aufmerksamkeit zugewandt, aber keine Benetzungswärme finden können, weil er eine ungeeignete Versuchsanordnung benutzte.

angesetzt, in dessen Mitte ein kurzes Stück einer sehr engen Kapillare zwischengeschmolzen war. An der Kapillare befand sich die Einstellmarke in Form eines ringsum eingeätzten dünnen Striches.

Zunächst wurde das Pyknometer zusammen mit einem kleinen Verschlußstopfen aus Gummi und einem Aufhängedraht leer gewogen. Das Gewicht betrug 29,68030 g. Dann wurde es bis in die Nähe des Schliffes mit ausgekochtem, destillieretm Wasser gefüllt und der nunmehr leicht eingefettete Schliff wieder aufgesetzt. Diese Einfettung war nötig, weil sonst keine Gewichtskonstanz zu erreichen war. Nachdem weiter bis über die Kapillare mit Wasser nachgefüllt und durch längeres Absaugen mit der Wasserstrahlpumpe alle im Wasser gelöste Luft entfernt war, wurde das Pyknometer in ein größeres Dewargefäß mit schmelzendem Eis gestellt, in dem es etwa 16 Stunden lang verblieb. Dann wurde mit Fließpapier das Wasser so weit entfernt, daß der Meniskus genau an der Marke stand, drr Gummistopfen aufgesetzt und das gut abgewischte Pyknometer, nachdem es Zimmertemperatur angenommen hatte, wieder in der Wage aufgehängt und nach etwa 6 Stunden gewogen. Die Wage war eine Bungesche Wage mit Mikroskopablesung, die auch bei über 100 g Belastung (ihre Belastungsgrenze beträgt 200 g) noch auf 0,01 mg zu wägen gestattete. Die Temperatur im Wagekasten und der Barometerstand wurden bei jeder Wägung zur Berechnung des Luftauftriebs gemessen.

Nach der Wägung wurde das Pyknometer in einen auf 25,027° eingestellten Thermostaten gebracht, in dem es wieder über Nacht verblieb. Am folgenden Tage wurde die Einstellung auf die Marke und die Wägung wieder in der gleichen Weise ausgeführt und dann der Versuch bei 0° wiederholt.

Nachdem das Pyknometer geleert und getrocknet war, wurde eine möglichst große Menge Siliziumkarbid (82,43032 g) eingewogen, wieder in der gleichen Weise wie vorher Wasser eingefüllt und abwechselnd bei 0° und 25,027° auf die Marke eingestellt und gewogen.

Durch das lange Verbleiben des Pyknometers bei der Einstelltemperatur dürften Fehler durch thermische Nachwirkungen so gut wie ausgeschlossen sein. Bedenklich erscheint daher bei der Methode nur die Einfettung des Schliffs. Da es zur

Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten aber auf die Wasserfüllungen bei 0° und 25°, sei es mit, sei es ohne Siliziumkarbid, nur relativ zueinander ankommt, ist das jeweils konstante Gewicht der sehr kleinen Fettmenge ohne Bedeutung.

Die Bruchgramme des verwandten Gewichtssatzes, auf deren Richtigkeit es in erster Linie ankommt, wurden in üblicher Weise untereinander verglichen. Die größten Abweichungen betrugen nur wenige Hundertstel Milligramm, fallen also in die Versuchsfehler hinein.

Tabelle 9.

	Ohne Siliziumkarbid		Mit Siliziumkarbid	
	0°	25,027°	0°	25 027°
				44 28300
			44,36716	44,28311
	70,03374		44,36721	
		69,88356		44,28324
	70,03394		44,36701	
M	70,03384	69,88356	44,36713	44,28312
d	0,999868	0,997064	0,999868	0,997064
v'	70,04316	70,08934	44,37300	44,41352
$v_{25}' - v_0'$	0,04618		0,04052	
Δv	0,00566			

In Tab. 9 sind die Messungsresultate zusammengestellt, Neben M stehen die zur Füllung bis zur Marke benötigten Wassermengen nach Reduktion der Wägungen auf den luftleeren Raum, und zwar zunächst alle Einzelmessungen in der Reihenfolge, in der sie ausgeführt wurden. Neben d ist die Dichte des Wassers bei 0° und 25,027° angegeben, die durch Division in die darüber stehenden Werte von M zu dem darunter verzeichnten vom Siliziumkarbid freigelassenen Pyknometervolumen v' führte. In der folgenden Reihe gibt $v_{25}' - v_0'$ für das Pyknometer ohne Karbid die Volumausdehnung des Glases an, während der zweite Wert gleich der Glasausdehnung vermindert um diejenige des Karbids ist. Die in der letzten Reihe stehende Differenz dieser zwei Zahlen ergibt also die Volumzunahme des Siliziumkarbids Δv bei der Erwärmung um $\Delta t = 25{,}027°$.

Zur Berechnung des kubischen Ausdehnungskoeffizienten benötigt man noch das Volumen des Siliziumkarbids, das sich für 0° zu $v = 70{,}04316 - 44{,}37300 = 25{,}67016$ ccm und für 25,027° zu 25,67582 ccm ergibt. Zur Berechnung reicht $v = 25{,}67$. So erhält man endlich den kubischen Ausdehnungskoeffizienten:

$$3\alpha = \frac{1}{v}\frac{\Delta v}{\Delta t} = 8{,}8 \cdot 10^{-6}.$$

Nebenbei möge noch erwähnt werden, daß als Dichte des Siliziumkarbids im Mittel $\varrho = 3{,}211$ herauskommt, was mit den Messungen von A. I. Fitz-Gerald[1]), der für ϱ 3,171 bis 3,214 findet, gut übereinstimmt.

B. Theoretischer Teil.

Das vorliegende Zahlenmaterial gibt die Möglichkeit, die Atomwärmen von Diamant, Graphit und Silizium, sowie die Molekularwärme des Siliziumkarbids in weiten Temperaturgrenzen sowohl bei konstantem Druck (C_p) als auch bei konstantem Volumen (C_v) zu berechnen. Zur Reduktion von C_p auf C_v soll von der Näherungsformel:

$$C_p - C_v = A C_p^2 T$$

Gebrauch gemacht werden. Darin bedeutet T die absolute Temperatur und A eine Zahl, die sich zu

$$A = \frac{9\alpha^2 M}{C_p^2 \varkappa \varrho}$$

ergibt, wenn α der lineare Ausdehnungskoeffizient ist, M das Atom- bzw. Molekulargewicht, $\varkappa$ die Kompressibilität und ϱ die Dichte, alle diese Größen gemessen bei derselben Temperatur. Da mit steigender Temperatur α etwa proportional zu C_p zunimmt, während sich $\varkappa$ und ϱ nur sehr wenig und zwar in entgegengesetztem Sinne ändern, darf man nach Nernst[2]) A als einigermaßen unabhängig von der Temperatur ansehen. Es soll versucht werden, die so erhaltenen Werte von C_v durch die Debyesche Temperaturfunktion[3]) darzustellen, die als gute Näherungsformel gelten darf, wenn sie auch wohl keine

1) A. I. Fitz-Gerald, „Carborundum". Monographie über angewandte Elektrochemie. 13. Halle. 1904.

2) W. Nernst, Zeitschr. f. Elektroch. 17. S. 820. 1911.

3) P. Debye, Ann. d. Phys. 39. S. 789. 1912.

ganz strenge Gültigkeit besitzt. Dies möge zunächst am Diamant ausgeführt werden.

In Tab. 10 ist die Atomwärme des Diamanten bei einer Reihe von Temperaturen zusammengestellt worden, wie sie sich aus den Messungen von Nernst[1]) und von Weber[2]) ergibt. Die Reduktion von C_p auf C_v ist unter Verwendung der in der Überschrift der Tabelle angegebenen Zahlen[3]) ausgeführt worden. Die letzte Rubrik enthält unter $\beta\nu$ die nach Debyes Formel ausgerechneten Werte der charakteristischen Temperatur $\Theta = \beta\nu_{max.}$.

Wie man sieht, fallen die zwei ersten Werte von $\beta\nu$ aus dem Rahmen der übrigen heraus. Dann folgen aber neun durch Fettdruck hervorgehobene Zahlen, in denen eine recht bemerkenswerte Konstanz vorhanden ist. Die nächsten Werte entsprechen dem Temperaturgebiet, in dem die Atomwärmen aus Webers Eiskalorimetermessungen oberhalb 100° C. berechnet wurden. Da diese Zahlen Webers, wie gezeigt wurde, etwas groß geraten sind, müssen die zugehörigen Werte von $\beta\nu$ zu klein ausfallen, wie es die Tabelle auch erkennen läßt. Bei noch höheren Temperaturen folgen Webers relativ zum Platin gemessene Atomwärmen. Von den hieraus berechneten $\beta\nu$-Werten sind wieder einige durch Fettdruck etwas hervorgehoben, soweit sie mit der konstanten Serie vorher leidlich übereinstimmen. Allerdings besitzen sie einen zunächst kleinen, regelmäßigen Gang, der im höchsten Temperaturgebiet zu immer größeren Abweichungen führt. Doch sind hier auch die Messungen bereits mit solcher Unsicherheit behaftet, daß sie nicht gegen eine Konstanz von $\beta\nu$ sprechen. Man wird also annehmen dürfen, daß der wahre Verlauf der Atomwärme des Diamanten durch eine Debyefunktion mit $\beta\nu = 1840$ für das Temperaturgebiet von 200—1000° absoluter Zählung ziemlich richtig wiedergegeben wird.

1) W. Nernst, Ann. d. Phys. **36**. S. 418. 1911.

2) H. F. Weber, a. a. O. Die Werte sind bei höheren Temperaturen entsprechend der Neubestimmung der spezifischen Wärme des Platins (A. Magnus, a. a. O.) umgerechnet worden.

3) Die Werte für α und ϱ wurden den phys.-chem. Tabellen von Landolt und Börnstein entnommen. Für $\varkappa$ wurden im allgemeinen die Messungen von Richards benutzt. Für Diamant wurde die Neubestimmung von L. H. Adams (Journ. of Washington Acad. of Sc. **11**. S. 45. 1921) verwandt.

Tabelle 10.

Diamant. $\beta\nu = 1840$.

$\alpha = 1{,}32 \cdot 10^{-6}$; $M = 12$; $n = 0{,}16 \cdot 10^{-23}$; $\varrho = 3{,}51$;
$A = 2{,}37 \cdot 10^{-6}$.

T	$C_{p\,\text{beob.}}$	$C_{v\,\text{beob.}}$	$\beta\nu_{\max.}$
86,5	0,03	0,03	2155
92,0	0,03	0,03	2292
205,0	0,62	0,62	1839
209,0	0,66	0,66	1832
220,0	0,72	0,72	1862
222,5	0,762	0,762	1887
261,4	1,146	1,145	1827
283,7	1,354	1,353	1887
306,4	1,582	1,580	1842
331,3	1,838	1,835	1842
358,5	2,118	2,114	1885
413,0	2,662	2,655	1818
478,1	3,280	3,268	1776
530,0	3,631	3,614	1770
600	3,974	3,952	1799
650	4,176	4,149	1820
700	4,360	4,329	1838
750	4,525	4,489	1840
800	4,671	4,630	1845
850	4,798	4,752	1850
900	4,905	4,854	1860
950	4,995	4,939	1874
1000	5,064	5,003	1900
1050	5,115	5,051	1940
1100	5,146	5,077	2000

Der Graphit besitzt ein Kristallgitter, das bekanntlich aus Netzebenen besteht, in denen je ein C-Atom von drei symmetrisch verteilten Nachbarn umgeben ist. Die raumsymmetrische Anordnung im Diamanten ist also auf eine flächensymmetrische im Graphit herabgesetzt. Während daher im Diamantgitter alle Schwingungsrichtungen eines Atoms als gleichwertig angesehen werden dürfen, wird beim Graphit die Gleichwertigkeit auf die Schwingungen innerhalb einer Netzebene beschränkt sein. Man wird sich deshalb vorstellen können, daß die Atomwärme des Graphits sich additiv aus zwei Debyefunktionen mit verschiedenen ν-Werten zusammensetzt, deren einer ν_a die Schwingungen in der Ebene, der andere ν_s diejenigen senkrecht dazu darstellt. Zwar sind die Werte von $\nu_{\max.}$ der Debyefunktion keine Eigenfrequenzen der Atome,

doch stehen sie mit diesen in einem Zusammenhang, so daß zunächst Proportionalität zwischen beiden Größen angenommen werden soll. Unter dieser Voraussetzung wird man ansetzen können, wenn man die Debyefunktion für raumsymmetrische Anordnung mit $f(\beta\nu)$ bezeichnet und berücksichtigt, daß die zwei Koordinaten der Netzebene gleichwertig, die dritte Raumkoordinate aber von jenen verschieden ist:

$$C_v = \tfrac{1}{3}[2f(\beta\nu_a) + f(\beta\nu_b)].$$

Da nach Lindemann[1]) für die Größe der Eigenfrequenzen der Atomabstand von wesentlichem Einfluß sein soll, wird man zunächst versuchen, $\nu_b : \nu_a = a : b$ zu setzen, wenn man unter $a = 1{,}45 \cdot 10^{-8}$ cm den kürzesten Abstand in der Ebene und unter $b = 3{,}41 \cdot 10^{-8}$ cm den Abstand der Ebenen voneinander versteht. Dieser erste Versuch einer Anwendung obiger Formel führte zwar noch zu keiner geeigneten Darstellung von C_v, gab aber schon einen so viel besseren Anschluß an die Messungen, daß es lohnend erschien, das bestgeeignete Verhältnis von $\nu_a : \nu_b$ durch Probieren zu ermitteln. Es ergab sich etwas größer als $\frac{b}{a} = 2{,}35$, nämlich zu 3,0, und zwar wurde $\beta\nu_a = 2280$ und $\beta\nu_b = 760$.

In Tab. 11 sind die so berechneten Werte ($C_{v\,\text{ber.}}$) mit den aus den Messungen sich ergebenden ($C_{v\,\text{beob.}}$) verglichen. Diese wurden wie beim Graphit durch Reduktion von C_p auf C_v gewonnen, wobei $C_p = M\frac{dQ}{dt}$ gesetzt wurde, wenn $M = 12$ wieder das Atomgewicht des Kohlenstoffs, t die Celsiustemperatur und Q die am Kopf der Tab. 4 gegebene Temperaturfunktion ist. Außerdem sind unterhalb 550° absoluter Zählung einige Messungen anderer Beobachter zum Vergleich herangezogen worden.

Im tiefsten Temperaturgebiet zeigen sich starke Abweichungen zwischen Beobachtung und Berechnung, aus denen hervorgeht, daß hier die Darstellung durch die Debyefunktion versagt. Von etwa 100° an findet man aber zunächst eine ungefähre und von 350° an, dem Beginn des Geltungsbereichs der Formel für Q, eine vorzügliche Übereinstimmung, die sich bis 1000° erstreckt. Erst dann treten wieder merkliche systematische Abweichungen auf, die deswegen nicht auffällig sind,

1) F. A. Lindemann, Phys. Zeitschr. 11. S. 609. 1910.

Tabelle 11.

Graphit. $\beta \nu_a = 2280$, $\beta \nu_b = 760$.

$C_p = 1{,}824 + 9{,}3324 \cdot 10^{-3}\, t - 10{,}278 \cdot 10^{-6}\, t^2 + 7{,}065 \cdot 10^{-9}\, t^3 - 2{,}631 \cdot 10^{-12}\, t^4$.

$\alpha = 7{,}9 \cdot 10^{-6}$; $M = 12{,}0$; $\varkappa = 3{,}0 \cdot 10^{-12}$; $\varrho = 2{,}25$; $A = 4{,}83 \cdot 10^{-6}$.

T	C_p beob.	C_v beob.	C_v ber.	Diff.
44,1	0,10	0,10	0,011	+ 0,09
58,8	0,14	0,14	0,080	+ 0,06
85,0	0,305	0,305	0,293	+ 0,012
137,0	0,677	0,677	0,679	− 0,002
222,7	1,366	1,364	1,461	− 0,097
232,0	1,496	1,493	1,540	− 0,047
262 3	1,724	1,720	1,796	− 0,076
283,8	1,924	1,919	1,963	− 0,044
334,3	2,262	2,254	2,366	− 0,112
350	2,485	2,475	2,472	+ 0,003
400	2,857	2,841	2,834	+ 0,007
450	3,190	3,168	3,160	+ 0,008
500	3,489	3,459	3,451	+ 0,008
550	3,754	3,717	3,718	− 0,001
600	3,994	3,948	3,950	− 0,002
650	4,210	4,146	4,156	− 0,010
700	4,398	4,333	4,334	− 0,001
750	4,568	4,493	4,494	− 0,001
800	4,719	4,633	4,628	+ 0,005
850	4,853	4,756	4,747	+ 0,009
900	4,970	4,863	4,853	+ 0,010
950	5,071	4,953	4,948	+ 0,005
1000	5,162	5,033	5,031	+ 0,002
1050	5,225	5,087	5,105	− 0,018
1100	5,278	5,130	5,171	− 0,041

weil der zur Darstellung von C_v verwandte Differentialquotient dQ/dt schon bei etwa 1200° ein Maximum besitzt, der Geltungsbereich der Interpolationsformel also bei 1000° erreicht sein dürfte. Im ganzen wird man schließen können, daß die zur Berechnung von C_v benutzte Summe zweier Debyefunktionen die tatsächliche Temperaturabhängigkeit fast ebenso sicher darstellt wie die einkonstantige Formel für den Diamanten.

Beim Silizium, das dieselbe Kristallstruktur wie der Diamant besitzt, mußte wieder eine einfache Debyefunktion anwendbar sein. Die Darstellung stieß aber zunächst auf Schwierigkeiten, weil die Reduktion von C_p auf C_v bei Verwendung der in der Literatur vorhandenen Werte für Ausdehnung, Kompressibilität und Dichte zu unmöglichen Zahlen für C_v führte. Es konnte kein Zweifel darüber bestehen, daß an dem

von Richards auffällig niedrig gefundenen Werte der Kompressibilität[1]) eine Korrektion anzubringen war. In der Tat erhielt man, sobald man $\varkappa = 0{,}42 \cdot 10^{-12}$ statt $0{,}16 \cdot 10^{-12}$ setzte, wieder eine Kurve für C_v, die sich von 400 — 1000° ausgezeichnet durch eine Debyefunktion mit $\beta\nu = 712$ darstellen ließ. Auch die Resultate Russels[2]) bei tiefen Temperaturen schließen sich der berechneten Kurve leidlich an, zumal, wenn man berücksichtigt, daß Russel nicht wahre, sondern mittlere spezifische Wärmen in ziemlich weiten Temperaturintervallen gemessen hat. Daß oberhalb 1000° Abweichungen im gleichen Sinne wie beim Kohlenstoff auftreten, liegt wieder an der Art der Darstellung von C_p durch den Differentialquotienten einer reinen Interpolationsformel in der Nähe der oberen Grenze ihres Gültigkeitsbereiches, während für die Unstimmigkeiten im tiefsten Temperaturgebiet, die in ähnlicher Weise wie beim Graphit gefunden werden, wohl die

Tabelle 12.

Silizium. $\beta\nu = 712$.

$C_p = 4{,}876 + 3{,}622 \cdot 10^{-3}\, t - 2{,}186 \cdot 10^{-6}\, t^2$.

$\alpha = 7{,}72 \cdot 10^{-6}$; $\varkappa = 0{,}42 \cdot 10^{-12}$; $\varrho = 2{,}39$; $M = 28{,}3$; $A = 1{,}43 \cdot 10^{-5}$.

T	$C_{p\,\text{beob.}}$	$C_{v\,\text{beob.}}$	$C_{v\,\text{ber.}}$	Diff.
138	2,44	2,43	2,09	+ 0,34
234	4,10	4,04	3,91	+ 0,13
297	4,84	4,77	4,54	+ 0,23
350	5,142	5,009	4,885	+ 0,124
400	5,301	5,140	5,109	+ 0,031
450	5,449	5,258	5,269	− 0,011
500	5,585	5,362	5,392	− 0,030
550	5,711	5,454	5,484	− 0,030
600	5,827	5,535	5,557	− 0,022
650	5,931	5,604	5,613	− 0,009
700	6,025	5,661	5,661	0,000
750	6,107	5,706	5,695	+ 0,011
800	6,178	5,741	5,726	+ 0,015
850	6,238	5,764	5,751	+ 0,013
900	6,287	5,778	5,773	+ 0,005
950	6,326	5,782	5,791	− 0,009
1000	6,354	5,778	5,807	− 0,029

1) F. Ephraim gibt in seinem soeben erschienenen Lehrbuche der anorganischen Chemie den viel besseren Wert $\varkappa = 0{,}32 \cdot 10^{-12}$ leider ohne Literaturangabe an.

2) A. S. Russel, Phys. Zeitschr. 13. S. 59. 1912.

Debyefunktion verantwortlich zu machen ist, die als Näherungsformel nicht dem ganzen Messungsbereich gleichmäßig gerecht wird. In Tab. 12 sind die Zahlen für das Silizium unter Fortlassung des tiefsten Temperaturgebietes zusammengestellt.

Beim Siliziumkarbid wird man zweifelhaft sein, ob sich seine Molekularwärme in derselben einfachen Weise wie die Atomwärme von Diamant oder Silizium darstellen lassen wird. Denn nach den neusten röntgenspektrographischen Untersuchungen[1]) ist die Atomverteilung nicht durch zwei ineinandergesetzte, flächenzentrierte, kubische Gitter gegeben, deren eins die eine, deren anderes die zweite Atomart enthält, sondern der Kristallbau ist komplizierter. Immerhin ist aber ein Atom der einen Art von je vier Nachbarn der andern Art in solcher Weise umgeben, daß diese wenigstens nahezu die Ecken eines unbeschriebenen Tetraeders bilden. Man darf daher eine fast ebenso gute Darstellung der Molekularwärme

Tabelle 13.

Siliziumkarbid. $\beta\nu = 1192$.

$C_p = 6{,}256 + 15{,}96 \cdot 10^{-3}\, t - 12{,}9 \cdot 10^{-6}\, t^2 - 6{,}87 \cdot 10^{-9}\, t^3 + 11{,}2 \cdot 10^{-13}\, t^4$.
$\alpha = 2{,}93 \cdot 10^{-6}$; $\varkappa = 0{,}21 \cdot 10^{-12}$; $\varrho = 3{,}21$; $M = 40{,}3$; $A = 2{,}69 \cdot 10^{-4}$.

T	$C_{p\,\text{beob.}}$	$C_{v\,\text{beob.}}$	$C_{v\,\text{ber.}}$	Diff.
138	2,07	2,07	1,58	+ 0,49
235	4,82	4,81	4,30	+ 0,51
298	6,53	6,50	6,00	+ 0,50
350	7,406	7,354	7,110	+ 0,244
400	8,064	7,994	7,944	+ 0,050
450	8,651	8,560	8,598	− 0,038
500	9,166	9,053	9,112	− 0,059
550	9,609	9,472	9,526	− 0,054
600	9,986	9,825	9,858	− 0,033
650	10,300	10,115	10,130	− 0,015
700	10,559	10,349	10,346	+ 0,003
750	10,770	10,536	10,530	+ 0,006
800	10,945	10,688	10,684	+ 0,004
850	11,095	10,814	10,816	− 0,002
900	11,231	10,926	10,926	0,000
950	11,371	11,040	11,022	+ 0,028
1000	11,530	11,172	11,108	+ 0,064

1) H. Espig, Abh. d. math.-phys. Klasse der sächs. Akad. d. Wiss. 38. Nr. 3. 1921.

des Siliziumkarbids durch die Debyefunktion erwarten, wie sie für die Atomwärme des Diamanten und des Siliziums gefunden wurde. Die Durchführung der Rechnung ergab die in Tab. 18 zusammengestellten Resultate.

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung ist von 400° an, besonders aber zwischen 700° und 900°, wieder sehr gut. Zwar ist ein kleiner Gang in den Differenzen unverkennbar, der aber seine Deutung darin findet, daß die fünfkonstantige Interpolationsformel, wie oben gezeigt wurde, schon die Messungen nicht ganz richtig wiedergibt, sondern kleine systematische Abweichungen übrig läßt, die in den hier gefundenen Differenzen im richtigen Sinne wieder zum Vorschein kommen. Unterhalb 400° werden aber die Abweichungen mit sinkender Temperatur immer größer. Daher werden die Resultate von Russel (a.a.O.) nur noch der Größenordnung nach richtig wiedergegeben. Oberhalb 1000° treten systematische Abweichungen auf, die aber das umgekehrte Vorzeichen haben wie in den vorher besprochenen Fällen. Als Ursache dafür erkennt man das Vorzeichen des letzten Gliedes der Interpolationsformel, das nur beim Siliziumkarbid positiv ist.

Das Resultat dieser Untersuchung könnte man dahin zusammenfassen, daß die Atomwärmen der gemessenen Substanzen sich im Gebiete höherer Temperaturen durch Debyefunktionen gut darstellen lassen, während bei einer Extrapolation auf tiefe Temperaturen Abweichungen in dem Sinne auftreten, daß die berechneten Werte zu klein werden. Erst recht wird dies der Fall sein, wenn man Einsteinsche Funktionen verwendet, die bei hohen Temperaturen den Kurvenverlauf zwar etwa ebenso gut zum Ausdruck bringen wie Debyesche, bei sinkender Temperatur aber viel schneller abfallen als diese. Eine Darstellung durch eine Kombination beider Arten von Funktionen, z. B. in der Art, wie Günther[1]) es auf Nernsts Vorschlag am Siliziumkarbid versucht hat, kann daher für das ganze Temperaturgebiet auch keine Verbesserung geben. Es sieht vielmehr so aus, als existiere in den hier behandelten Fällen extrem hoher ν-Werte manchmal ein Temperaturgebiet, in dem ν nicht konstant, sondern eine Temperaturfunktion

1) P. Günther, Ann. d. Phys. 51. S. 828. 1916.

ist. Dieses Gebiet würde sich z. B. für das Siliziumkarbid etwa von 60—400° erstrecken, während die zwei ersten noch außerhalb dieses Gebietes liegenden Messungen Günthers mit der für hohe Temperaturen geltenden Debyefunktion wieder ziemlich richtig darstellbar sind. Man erhält nämlich mit $\beta \nu = 1192$ für 58° $C_{v\,\text{ber.}} = 0{,}082$ statt 0,050 und für 57° $C_{v\,\text{ber.}} = 0{,}110$ statt 0,112. In dem Gebiet mit variablem ν müßte dieses bei steigender Temperatur also zuerst abnehmen und dann allmählich wieder auf seinen ursprünglichen Wert wachsen. Ein theoretischer Grund ist aber für dieses abnorme Verhalten nicht recht zu erkennen.

Im folgenden sollen die gefundenen Resultate noch miteinander verglichen werden.

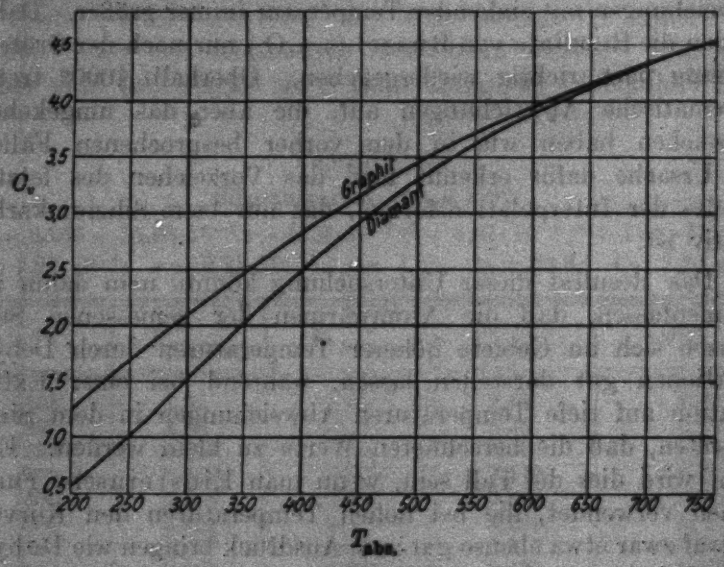


Fig. 1.

Fig. 1 stellt die Kurven der Atomwärmen von Diamant und Graphit zwischen 200° und 760° absoluter Zählung bei konstantem Volumen dar. Man erkennt, daß die Graphitkurve stets oberhalb derjenigen des Diamanten verläuft, sich ihr aber mit steigender Temperatur immer mehr nähert, um sich schließlich ganz mit ihr zu vereinigen. Dies ist eine Bestätigung der von Weber (a. a. O.) schon aufgestellten Behauptung, „daß jede wesentliche Differenz der spezifischen Wärmen

der Graphit- und Diamantmodifikation des Kohlenstoffs von der Rotglut an aufgehört hat". Allerdings gilt das streng-genommen nur für C_v, während C_p infolge der etwa doppelt so großen Ausdehnungsarbeit bei der Erwärmung für Graphit ständig größer bleibt als für Diamant. Bei sehr hohen Temperaturen ist sogar eine neue Divergenz der C_p-Kurven zu erwarten, wofür die Tab. 10 und 11 auch schon Anhaltspunkte liefern.

Weiter geben die Messungen ein gutes Beispiel für den Geltungsbereich der Kopp-Neumannschen Regel, deren Prüfung im Gebiete höherer Temperaturen einer der leitenden Gesichtspunkte bei der Inangriffnahme dieser Arbeit war. Da man sich das Siliziumkarbid aus dem Silizium oder dem Diamanten durch Ersatz der einen Hälfte der Atome durch solche der anderen Art entstanden denken kann, wird man nicht zweifelhaft sein, daß die Diamantmodifikation des Kohlenstoffs zum Vergleich heranzuziehen ist.

Tabelle 14.

T	C	Si	$C+Si$	SiC	$SiC-(C+Si)$
350	2,025	4,885	6,910	7,110	0,200
400	2,493	5,109	7,602	7,944	0,342
450	2,917	5,269	8,186	8,598	0,412
500	3,290	5,392	8,682	9,112	0,430
550	2,610	5,484	9,094	9,526	0,432
600	3,885	5,557	9,442	9,858	0,416
650	4,117	5,613	9,730	10,130	0,400
700	4,317	5,661	9,978	10,346	0,368
750	4,490	5,695	10,185	10,530	0,345
800	4,635	5,726	10,361	10,684	0,323
850	4,764	5,751	10,515	10,816	0,301
900	4,876	5,773	10,649	10,926	0,277
950	4,972	5,791	10,763	11,022	0,259
1000	5,057	5,807	10,864	11,108	0,244

In Tab. 14 sind die Atomwärmen der Elemente unter C und Si zusammengestellt. Die nächste Rubrik enthält unter $C+Si$ die Summen der Atomwärmen, während unter SiC die Molekularwärmen der Verbindung stehen. Die in der letzten Reihe aufgeführten Differenzen $SiC-(C+Si)$ erreichen bei 550° ein Maximum, sind aber ständig positiv. In der Nähe der Zimmertemperatur wechselt das Vorzeichen, so daß dort die

Kopp-Neumannsche Regel zufällig ziemlich streng gilt. Bei tiefen Temperaturen ist, wie Russel (a. a. O.) gezeigt hat, die Molekularwärme der Verbindung kleiner als die Summe der Atomwärmen der Elemente, ja schließlich sogar kleiner als die Atomwärme des Siliziums allein. Die einfache Deutung für dieses zunächst überraschende Verhalten liegt darin, daß beim Zusammentritt verschiedener Atomarten zu einem Raumgitter die Atomabstände, die durch die Größe der Atome wesentlich mit bedingt werden, und damit auch die Kohäsionskräfte einen mittleren Wert annehmen müssen. Infolgedessen wird als Grenzfrequenz des elastischen Spektrums gleichfalls ein mittlerer Wert auftreten. Im Gebiete höherer Temperaturen wird daher die mittlere Atomwärme[1]) der Verbindung etwa in der Mitte zwischen den Atomwärmen der Komponenten liegen, so daß die Kopp-Neumannsche Regel angenähert erfüllt sein wird. Dagegen müssen bei tiefen Temperaturen im Gebiete des steilen Abfalls der Atomwärme einer Komponente starke Abweichungen auftreten, falls die andere Komponente und damit auch die Verbindung einen sehr viel kleineren ν-Wert aufweist. Dies trifft im Falle des Carborundums zu und dürfte überhaupt bei Karbiden wegen des extrem hohen ν-Wertes des Kohlenstoffs die Regel sein, während bei anderen Verbindungen mit nicht so verschiedenen Grenzfrequenzen der Komponenten bei tiefen Temperaturen zwar auch Anomalien zu erwarten sind, die aber weniger auffällig sein werden als gerade bei den Karbiden.

C. Zusammenfassung.

1. Mit einem großen Kupferblock-Kalorimeter wurde die spezifische Wärme des Graphits, des Siliziums und des Siliziumkarbids zwischen Zimmertemperatur und 900° Celsius bestimmt.

2. Die Auswertung der Messungen geschah in der Weise, daß die an das Kalorimeter von der erhitzten Substanz abgegebene Wärmemenge durch eine möglichst gut angepaßte Interpolationsformel als Temperaturfunktion dargestellt wurde. Dieses Verfahren bot neben dem Vorteil, daß die Versuchs-

1) Als mittlere Atomwärme einer Verbindung soll die Molekularwärme geteilt durch die Anzahl der Atome im Molekül bezeichnet werden.

fehler der Einzelmessungen weitgehend ausgeglichen wurden, noch die Annehmlichkeit, die wahre spezifische Wärme als Differentialquotient der empirisch bestimmten Funktion für jede beliebige Temperatur im Gültigkeitsbereich der Formel unmittelbar berechnen zu können.

3. Die Adsorptionswärme des Graphits wurde gegenüber Wasser und Luft gemessen. Sie ergab sich als sehr klein.

4. Eine Bestimmung des kubischen Ausdehnungskoeffizienten von Siliziumkarbid führte zu $3\alpha = 8{,}8 \cdot 10^{-6}$.

5. Im theoretischen Teile wurde der Nachweis geführt, daß sich die Atomwärmen von Diamant, Silizium und Siliziumkarbid in einem weiten Temperaturgebiet durch Debyefunktionen mit nur einem Werte der charakteristischen Temperatur Θ darstellen lassen, während beim Graphit eine Formel mit zwei Werten von Θ verwandt werden mußte, bei deren Aufstellung die Anordnung der Atome im Kristall berücksichtigt wurde.

6. Die Kompressibilität des Siliziums ergab sich aus der Korrektion von C_p auf C_v zu $0{,}42 \cdot 10^{-12}$ dyn^{-1} qcm, während Richards nur $0{,}16 \cdot 10^{-12}$ angibt.

7. Ein Vergleich der Atomwärmen von Diamant und Graphit zeigt, daß C_v für beide Modifikationen im Gebiete hoher Temperaturen identisch wird.

8. Am Beispiele des Siliziumkarbids wurde die Kopp-Neumannsche Regel besprochen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht zu erwähnen, daß seitens des Kaiser Wilhelm-Instituts für Physik die Mittel zur Beschaffung einer Reihe guter Apparate zur Verfügung gestellt wurden, wodurch die Genauigkeit und Sicherheit der Messungen vergrößert werden konnte. Ich möchte auch an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank dafür aussprechen.

Tübingen, Chemisches Laboratorium der Universität.

(Eingegangen 2. Oktober 1922.)

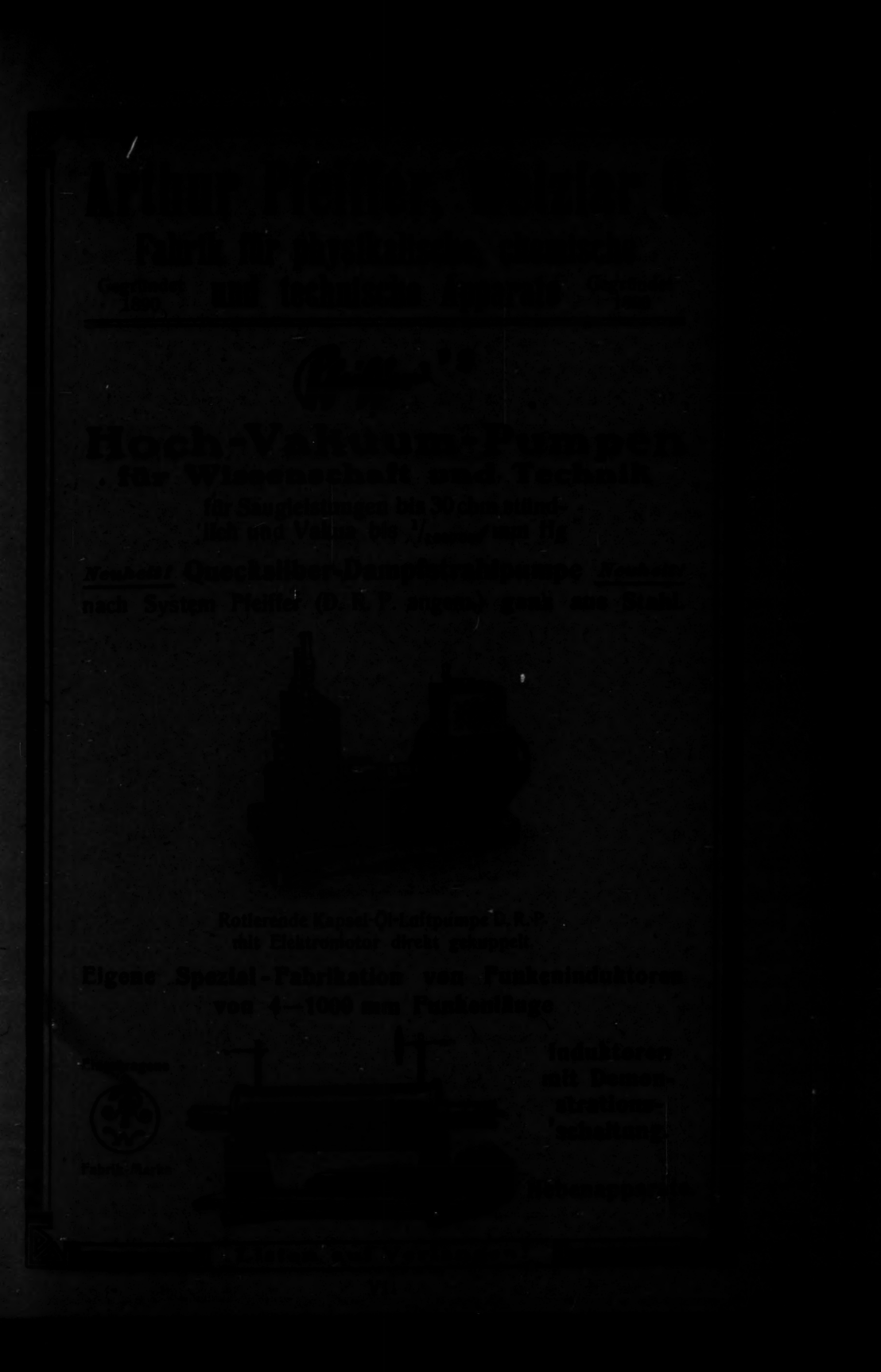
5. *Nachtrag zu der Arbeit*[1]: „*Zur Theorie des Kerr- und Faradayeffektes*“; *von Karl F. Herzfeld.*

Hr. Prof. W. Gerlach machte mich freundlich aufmerksam, daß nach Pauthenier[2]) bei Nitrobenzol, Monochlorbenzol und Schwefelkohlenstoff das Verhältnis der absoluten Verzögerungen -2 ist, womit für diese Fälle die Langevin-Bornsche Richtungstheorie wohl nachgewiesen ist.

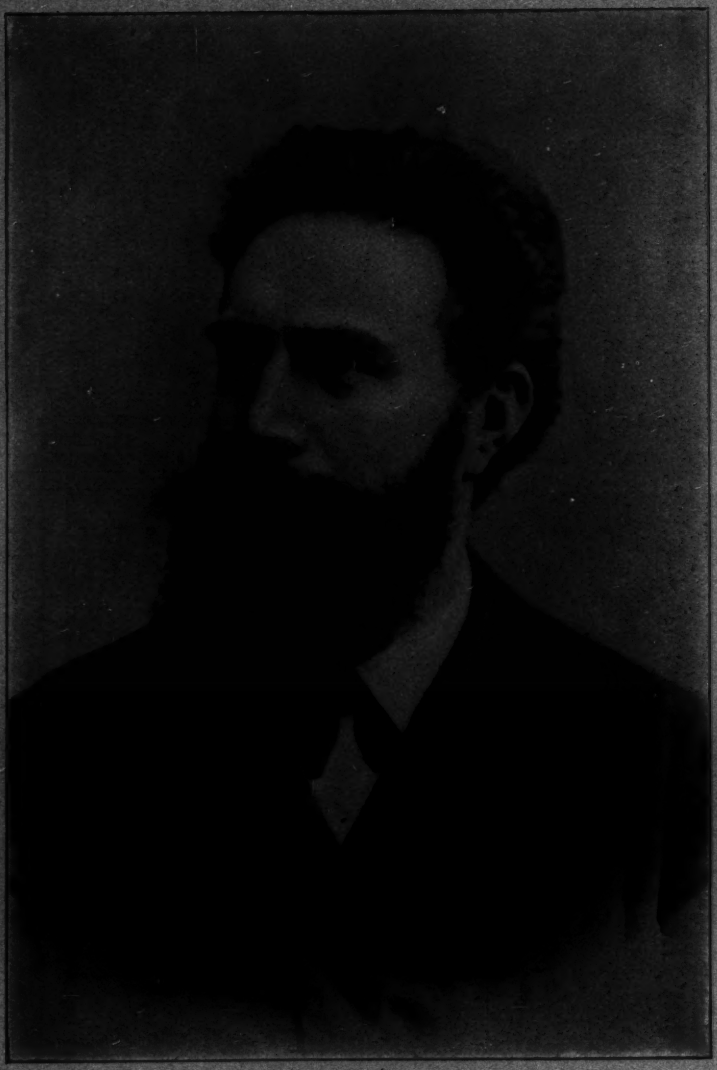
1) K. F. Herzfeld, Ann. d. Phys. 69. S. 369. 1922.
2) M. Pauthenier, Journ. d. Phys. VII. 2. S. 183. 1921.

(Eingegangen 16. Januar 1923.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY



W. C. RÖNTGEN

geb. 27. März 1845

gest. 10. Februar 1923

RÖNTGEN †

Am 10. Februar morgens 9 Uhr starb in München nach kurzer Krankheit der Physiker, dessen Name wie kein zweiter auf der ganzen Erde bekannt war, Wilhelm Conrad Röntgen. Die große Entdeckung, die sich an seinen Namen knüpft, hat so großen Einfluß auf die Entwicklung der Physik gehabt, steht noch so sehr im Mittelpunkt der physikalischen Forschung, daß es überflüssig erscheint von ihr zu Physikern zu reden. Um so mehr ist es ein Gebot der Stunde, einen Augenblick in Arbeit und Forschung innezuhalten und einen Blick rückwärts zu richten auf das, was Röntgen durch sein Lebenswerk als Physiker geleistet hat.

Röntgen gehörte nicht zu den Naturen, die von Ideen überfließen und unter dem Drange immer neuer Gedanken und Pläne von einer wissenschaftlichen Arbeit zur andern eilen. Seine Stärke lag in einer anderen Begabung, die vielleicht noch seltener und jedenfalls ebenso wertvoll ist, in der unablässigen Kritik der Zuverlässigkeit der physikalischen Beobachtungen und Messungen. Er wußte wie kein anderer, daß die Natur ihr Spiel mit uns treibt und daß auch der erfahrene und sorgfältige Forscher immer wieder der Gefahr ausgesetzt ist, in eine der Schlingen zu geraten, welche um die Naturgeheimnisse gelegt sind und ihre Aufdeckung verhindern. Mit bewunderungswürdiger Umsicht und immer erneut angewandtem Scharfsinn forschte er allen Fehlerquellen, allen Täuschungen nach, welche die Klarheit der physikalischen Erkenntnis trüben könnten. Die Röntgenschen Arbeiten erreichen daher in ihren Ergebnissen ein selten erreichtes Maß von Zuverlässigkeit und ihre Darstellung und Zusammenfassung eine ebenso seltene Knappheit und Einfachheit.

Röntgens Arbeiten liegen auf den verschiedensten Gebieten der Physik. Obwohl er nur experimentelle Arbeiten veröffentlichte, kannte er die physikalischen Theorien genau und verstand es sehr wohl, sich ein selbständiges Urteil über sie zu bilden.

Manche seiner Untersuchungen sind unmittelbar von theoretischen Gesichtspunkten aus unternommen. Das gilt besonders von dem bekannten Experiment, durch das er nachwies, daß eine zwischen elektrisch geladenen Kondensatorplatten bewegte

Glasplatte eine magnetische Wirkung hervorruft. Diese Beobachtung ist unmittelbar durch die Faraday-Maxwellsche elektromagnetische Theorie veranlaßt und führt zu weiteren Gedankengängen über beobachtbare Wirkungen der Erdbewegung, den ersten Ansätzen zu den Fragen, die dann zur Lorentzschen Theorie und zur Relativitätstheorie geführt haben. Unübertrefflich ist die Umsicht, mit der alle möglichen Fehler der Versuchsanordnung geprüft und vermieden werden, so daß das Ergebnis mit voller Bestimmtheit angegeben werden kann.

Andere von allgemeinen Fragen aus unternommene Versuche sind die Bestimmung der Dicke der Ölschichten auf Wasser gewesen, aus der sich die Größe der Moleküle abschätzen läßt, ferner die Untersuchung der Zusammendrückbarkeit des Wassers im Hinblick auf Schlüsse, die sich auf seine Zusammensetzung ziehen lassen. Nach seinen Versuchen wird mit zunehmender Temperatur die Kompressibilität des Wassers kleiner, die der anderen Flüssigkeiten größer. Nach Beobachtungen von Warburg wird die Reibung des Wassers durch Druck vermindert, bei anderen Flüssigkeiten vermehrt. Nach Amagat wird der thermische Ausdehnungskoeffizient mit zunehmendem Druck bei Wasser größer, bei anderen Flüssigkeiten kleiner. Röntgen schloß aus diesen Beobachtungen, daß Wasser aus zwei Molekülarten besteht, den Eismolekülen, die ein größeres Volumen bedingen und einer zweiten Art, die kleineres Volumen geben und sich bei Temperaturerhöhung bilden. Bei Druckerhöhung bilden sich mehr Moleküle zweiter Art, ferner wird die Reibung durch Zunahme der Moleküle erster Art vergrößert.

Beispiele für die besondere Art Röntgens mit den einfachsten, meist selbstgebauten Apparaten, zuverlässige und sichere Ergebnisse zu erreichen, sind seine Bestimmungen des Verhältnisses der spezifischen Wärmen der Gase nach der Methode von Clement und Desormes, die nach Beseitigung einer von F. Kohlrausch übersehenen Fehlerquelle erst in seinen Händen zu einer sicheren Maßbestimmung wird, ferner der Absorption von Wärmestrahlen in Wasserdampf. Über diese Frage war es zu einer lebhaften Auseinandersetzung zwischen Tyndall und Magnus gekommen. Röntgen baute ein einfaches empfindliches Luftthermometer mit dessen Hilfe er zeigen konnte, daß feuchte Luft bei Bestrahlung sich stärker erwärmt als trockene, so daß der Wasserdampf tatsächlich Wärmestrahlen absorbiert. Diese Versuche zeigen, wie Röntgen eine Vorliebe für einfache Versuchsanordnungen hatte, nicht zum min-

desten deshalb, weil der Forscher bei selbstgebauten einfachen Hilfsmitteln alle Mängel und Fehlerquellen der Versuchsanordnung am vollständigsten kennt.

Großes Interesse hat Röntgen immer für die Kristalle und ihre Eigenschaften gehabt. Muß ja doch auch der eigentliche feste Körper ein Kristall sein. Während er im Beginn seiner wissenschaftlichen Laufbahn den optischen Eigenschaften der Kristalle seine Aufmerksamkeit widmete, hat er sich nach seiner großen Entdeckung der Erforschung der elektrischen Leitfähigkeit schlecht leitender Kristalle zugewandt. Eine umfangreiche Untersuchung hat er vor zwei Jahren veröffentlicht, in der er zeigt, wie die Leitfähigkeit der Kristalle nach zuerst vorgenommener Bestrahlung mit Röntgenstrahlen durch Belichtung gesteigert wird, Wirkungen, die offenbar auf lichtelektrischen Vorgängen im Innern der Kristalle beruhen. Auch bei diesen Untersuchungen zeigt sich die ungemeine Sorgfalt in der Aufdeckung und Berücksichtigung aller möglicher Fehlerquellen. Vielleicht hat diese in seiner letzten, von ihm selbst herausgegebenen Veröffentlichung in der Darstellung einen etwas zu breiten Raum eingenommen, so daß die Ergebnisse nicht so deutlich hervortreten, wie in seinen früheren so überaus knapp geschriebenen Abhandlungen. Dafür gewinnt man einen um so vollständigeren Einblick in die Art seiner Arbeitsweise. Diese muß jeden jungen Experimentalphysiker als Muster vorgehalten werden in der unbestechlichen, strengen, jede Voreingenommenheit ablehnenden Art der Beweisführung.

Röntgen war ein ausgesprochener Klassiker der Naturwissenschaften. Seine Abneigung, Arbeiten abzuschließen, solange noch irgend eine Frage ungeklärt blieb, war mit den Jahren gewachsen und hat ihn in den letzten Jahrzehnten seines Lebens bedauerlicherweise gehindert, seine Arbeiten zu veröffentlichen und rechtzeitig an der Entwicklung der Wissenschaft teilnehmen zu lassen. Dieselbe Gesinnung ließ ihn auch die Versammlungen seiner Fachgenossen vermeiden, da er sich nicht gern an wissenschaftlichen Besprechungen beteiligte, bei denen nicht jedes hingeworfene Wort genau abgewogen werden kann. Er war daher dem großen Kreis der jüngeren Fachgenossen unbekannt und eine fast sagenhafte, von Legenden umwobene Gestalt geworden und es ist sehr zu bedauern, daß er es vermied, durch seine kraftvolle, aufrechte Persönlichkeit, seine rein wissenschaftliche Denkweise, seinen geraden, festen Charakter und seine tiefe Bescheidenheit unmittelbar zu wirken.

Röntgen ist am 27. März 1845 in Lennep am Niederrhein geboren. Er hat anfänglich in Holland die Schule besucht und die Kenntnis der holländischen Sprache sich so bewahrt, daß er H. A. Lorentz, den er im Jahre 1905 nach München berufen wollte, in Leyden aufsuchen und mit einer holländischen Ansprache überraschen konnte.

Röntgen sollte zunächst Ingenieur werden. Bald jedoch machte sich eine unüberwindliche Neigung zur reinen Wissenschaft geltend und er erreichte es, sich der Physik widmen zu dürfen. Er promovierte 1869 in Zürich, ging dann als Assistent von Kundt nach Würzburg, wo damals nur ein dürftiges „physikalisches Kabinett" vorhanden war. Dann begleitete er Kundt an die Universität Straßburg, wo an der neuen Reichsuniversität ein großes physikalisches Institut gebaut wurde. Dort habilitierte er sich 1874, ging 1875 als Professor an die landwirtschaftliche Hochschule in Hohenheim, kehrte 1876 als außerordentlicher Professor nach Straßburg zurück und wurde 1879 als ordentlicher Professor nach Gießen berufen. 1889 ging er als Nachfolger von F. Kohlrausch nach Würzburg, wo ihm seine große Entdeckung im Herbst 1895 gelang. 1898 lehnte er eine Berufung nach Leipzig als Nachfolger Gustav Wiedemanns ab, ging aber im Frühjahr 1900 als Nachfolger E. Lommels nach München. Im Herbst 1904 wurde er als Nachfolger von F. Kohlrausch als Präsident der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt berufen, zog es aber vor in München zu bleiben. Ebenso ablehnend verhielt er sich Berliner Anfragen gegenüber, die Leitung des dortigen physikalischen Instituts zu übernehmen oder die von vant' Hoff eingenommene Stelle an der Akademie der Wissenschaften einzunehmen.

Im Herbst 1919 zog er sich vom Lehramt zurück, behielt sich jedoch im Physikalischen Institut das Benutzungsrecht einiger Zimmer und die Vorstandschaft der der Akademie der Wissenschaft angehörenden metronomischen Sammlung vor. In diesen Räumen hat er noch wenige Tage vor seinem Tode experimentell gearbeitet. Für Röntgen war die Wissenschaft, der er sein Leben gewidmet hatte, so sehr zum Lebensinhalt geworden, daß die Beschäftigung mit ihr nur durch den Tod aufgehoben werden konnte.

W. Wien.

1923. № 6.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 70.

1. *Zur Kenntnis des Zeemaneffekts;* *von E. Back.*

(Hierzu Tafel I.)

Mit der Erforschung des Zeemaneffekts wurden von Anfang an im wesentlichen zwei methodisch verschiedene Ziele verfolgt, ein spektroskopisches und ein atomphysikalisches. Dem ersten Aufgabenkreise hat die Prestonsche Regel, dem zweiten die Rungesche Regel den entscheidenden Gesichtspunkt gegeben.

Die Prestonsche Regel wandelte den allgemein spektroskopischen Gesichtspunkt in einen serientheoretischen. Ihre Entdeckung gab der Forschung starken Antrieb und erweckte außerordentliche Erwartungen, denn die Regel schien ein sicherer Wegweiser bei der Durchmusterung der Elemente auf gesetzmäßige Serienzusammenhänge zu sein; insbesondere durfte man hoffen, mit ihrer Hilfe die in den ersten Gruppen des periodischen Systems gefundenen spektroskopischen Gesetzmäßigkeiten, denen die Prestonsche Regel ein bestimmtes Schema von Zeemantypen eindeutig zuordnet, nun auch in den der Serienforschung bisher unzugänglichen Elementgruppen durch Wiederfinden der gleichen Zeemantypen aufdecken, und damit auf bekannte Begriffe in bisher unbekanntem Gebiet weiter bauen zu können.

Diese Hoffnung hat sich indes nicht erfüllt. Auch das neue Hilfsmittel der Prestonschen Regel brachte keinen entscheidenden neuen Einblick in die Spektralgesetze der serienlosen Gruppen des periodischen Systems. Insbesondere wurde die Erwartung nicht bestätigt, die schon bekannten Seriengesetze hier wiederzufinden. Der Ertrag der vielen auf dieses Ziel gerichteten Untersuchungen ist daher in serientheoretischer Hinsicht nicht groß gewesen und hat keine Wendung in der Forschung gebracht.

Wohl aber ist durch diese Arbeiten ein außerordentlich reiches Tatsachenmaterial bekannt geworden. Aber auch dem

zweiten Aufgabenkreise, dem atomphysikalischen kam dieses nicht in dem Maße zugute, wie man glaubte erwarten zu dürfen. Im Gegenteil, es verschwanden eher mit dem Anwachsen des Tatsachenmaterials die ursprünglich einfachen Gesichtspunkte in der Überfülle der anscheinend regellosen Erscheinungen. So ergab sich beispielsweise, daß die normale magnetische Aufspaltung, die dem aus Kathodenstrahlversuchen für e/m abgeleiteten Werte entspricht, äußerst selten vorkommt, und daß von den Triplets sowohl wie von den komplizierteren Zeemantypen nur ein ganz geringer Teil in einfacher Weise im Sinne der Rungeschen Regel auf den normalen Wert von e/m zurückführbar ist. Die hierüber angestellten Statistiken lassen die einfachen Zahlenwerte als die Ausnahmen, die sozusagen irrationalen als die Regel erscheinen.

Erst die neueste Wendung in der Atomphysik und der Theorie des Zeemaneffekts im besonderen vermag die Erklärung für diese von vornherein nicht erwarteten Verhältnisse zu geben: nicht die Wiederholung eines durchgehend Gleichartigen, sondern das Auftreten eines stufenweise voneinander Verschiedenen ist als die spektroskopische Gesetzmäßigkeit des periodischen Systems zu erwarten, ein Aufsteigen vom Einfachen zum immer vielfältiger Komplizierten. Dies gilt sowohl für den Übergang vom Spektrum eines Elements zu dem eines höheren, als auch innerhalb desselben Elements von einer niedereren Serienart zu einer höheren. Damit ist in den zugeordneten Zeemantypen auf immer engerem Raume eine immer größere Mannigfaltigkeit zu erwarten.

Durch diese theoretische Einsicht wird ein neuer Standpunkt gegenüber dem von der Experimentalforschung beigebrachten Beobachtungsmaterial gewonnen. Man wird anzunehmen geneigt sein, daß es nicht an den Erscheinungen, sondern daß es an der Unzulänglichkeit der experimentellen Hilfsmittel liegt, wenn häufig Aufspaltungsbilder gefunden werden, die nicht einfache ganzzahlige Verhältnisse im Sinne der Rungeschen Regel aufweisen. Insbesondere erregen beispielsweise die mehrfach aufgestellten Statistiken, die eine auffallende Häufigkeit von Triplets irrationaler Aufspaltung erkennen lassen, den Verdacht, daß in allen solchen Triplets sich kompliziertere Feinstrukturen verbergen. Deren Aufdeckung würde mit einem Schlage die scheinbar irrationalen

Zahlenverhältnisse in einfache verwandeln, und der dadurch gewonnene Einblick in die Gliederung des Baues dieser Typen die bei diesen Elementen waltenden Spektralgesetze erkennen lassen.

Solange die verfügbaren Feldstärken oder die Auflösungskraft der Spektralapparate nicht beträchtlich gesteigert werden können, wird eine solche Aufdeckung verborgener magnetischer Feinstrukturen immer nur in einzelnen günstigen Fällen gelingen. Dennoch wird die experimentelle Forschung dieser Aufgabe sich anpassen, indem sie nicht so sehr auf die Menge des geförderten Tatsachenmaterials als auf die Durcharbeitung seiner Einzelheiten ausgeht. Unter eben diesem Gesichtspunkte ist die vorliegende Untersuchung unternommen worden, deren Hauptziel es ist, die experimentelle Technik des Zeemaneffekts systematisch zu verbessern. Als erstes Ergebnis dieser Bestrebung wird nach Beschreibung der technischen Hilfsmittel die Analyse des Berylliumspektrums im Magnetfeld und ohne Magnetfeld gegeben, die serientheoretisch wichtig ist, zugleich aber wegen der sehr feinen Struktur der Liniengruppen dieses Elements besondere Anforderungen an die experimentelle Technik stellt. Darauf folgt die Analyse der Zeemantypen der I. Nebenserie der Dublets in ihrer allgemeinen und ihrer vereinfachten Form.

Die Untersuchung ist im Physikalischen Institut der Universität Tübingen ausgeführt worden. Es sei Verfasser gestattet, auch an dieser Stelle dem Institutsvorstand, Hrn. Prof. Dr. Paschen, herzlichsten Dank auszusprechen für die großzügige Überlassung aller wünschenswerten Mittel, für die ausgiebige Hilfe der Institutswerkstätte, besonders aber für das unermüdliche Interesse an der Arbeit und die vielfache persönliche Förderung. Desgleichen sei der Dank des Verfassers ausgesprochen der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft, sowie der Helmholtzgesellschaft für die Zuwendung der zur Beschaffung von Chemikalien und photographischen Platten erforderlichen Mittel.

1. Technisches.

Der Anforderung größtmöglicher Linienschärfe kann nur eine Lichtquelle im Vakuum genügen. Als mögliche Anordnungen kommen in Frage das Geißlerrohr, der Vakuumfunke mit Vorfunkenstrecke in Luft und die Bogenentladung. Geißlerrohr und Vakuumfunke sind mehrfach erfolgreich angewendet

worden. Beide sind aber nicht ohne Mangel. Die Entladung im Geißlerrohr, das senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien gestellt ist, wird durch das Magnetfeld erschwert, der Lichtfaden je nach der Stromrichtung an die vordere oder hintere Wand der Kapillare gedrückt und dabei sein Querschnitt auf ein Minimum verkleinert. Hierdurch ändert sich der Charakter der Emission dahin, daß alle die Erscheinungen auftreten, die man bei einer Lichtquelle unter hohem Druck beobachtet. Führt man das Geißlerrohr den Kraftlinien parallel, so vermeidet man zwar diesen Fehler, verzichtet aber damit auf die Möglichkeit, höchste Feldstärken zu erreichen, und auf größtmögliche Homogenität des Feldes am Orte der Emission. Der Vakuumfunke mit Vorfunkenstrecke hat den Nachteil geringer Intensität, da die meiste Energie in der Vorfunkenstrecke verbraucht wird, und außerdem das Bedenken gegen sich, daß durch Auftreten von Starkeffekten das magnetische Aufspaltungsbild verändert oder verwischt werden kann.

Von diesen Fehlern ist der Vakuumbogen frei. Führt man ihn parallel zu den Kraftlinien, so ist Homogenität des Feldes gewährleistet. Gegenüber dem Geißlerrohr hat man den weiteren Vorteil, allein durch Auswechseln des Elektrodenmetalls mit einer einmal hergestellten Anordnung beliebige Spektren erzeugen zu können. Außerdem ist der Charakter der Emission bei vollendeter Schärfe der Linien günstiger als im Funken oder Geißlerrohr, denn der Vakuumbogen[1]) im H_2-Rest emittiert gleichzeitig Bogen- und Funkenspektrum, während in der positiven Lichtsäule des Geißlerrohrs nur das erstere, im Funken überwiegend das letztere zur Erscheinung kommt. Der Einfluß des Magnetfeldes auf die Bogenemission ist bemerkenswert: ohne Magnetfeld tritt fast nur das Bogenspektrum auf, Funkenlinien nur, sofern sie Restlinien sind; im Magnetfeld, und zwar schon bei den kleinsten Feldstärken, tritt von selbst ohne Erhöhung der angelegten Spannung das Funkenspektrum hinzu und zwar so intensiv, daß es häufig das Bogenspektrum überwiegt. Man kann so geradezu durch Beobachtung mit und ohne Magnetfeld das Bogen- und Funkenspektrum voneinander trennen.

Trotz seiner offensichtlichen Vorzüge scheint der Vakuumbogen für die Erforschung des Zeemaneffekts bisher noch nicht

1) Bei Anwendung der Abreißzündung.

angewendet worden zu sein. Figg. 1A und B gibt eine Skizze des Apparates, der vom Verfasser für die nachfolgende Untersuchung konstruiert worden ist:

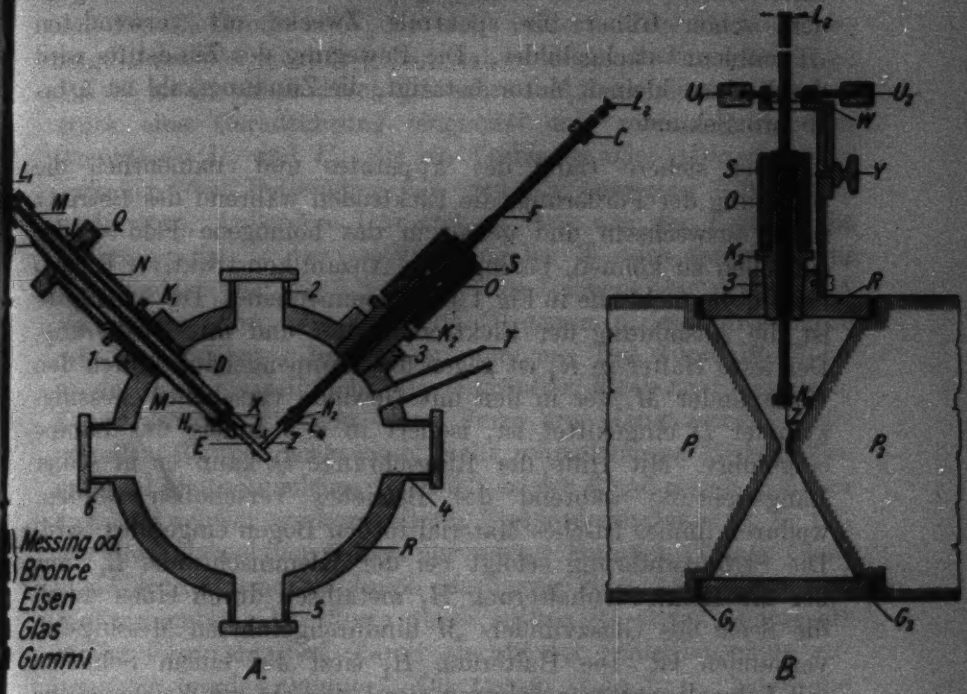


Fig. 1.

P_1 und P_2 (Fig. 1B) sind die Polschuhe des Elektromagneten im Längsschnitt. R ist ein dickwandiger Zylinder aus Bronze, der unter Zwischenschaltung von Gummiringen G_1 und G_2 an die entsprechend ausgedrehten Ränder der Polschuhe angepreßt ist. Ein Satz von Gummiringen verschiedener Dicke ermöglicht, die Größe des Interferrikums beliebig zu ändern. Der Innenraum dieses Zylinders, der die Polspitzen umschließt, bildet das Vakuum der Bogenlampe. An den Zylinder R sind 6 Rohrstutzen (1 bis 6 in Fig. 1A) angegossen. Vier davon (2, 4, 5, 6) sind mit Fenstern versehen, die zwei anderen (1 und 3) sind konisch ausgebohrt und umfassen die eingeschliffenen Konusse K_1 und K_2, durch die die Elektroden eingeführt sind. Die Elektrode in K_1 ist in ihrer Längsrichtung verschiebbar, im übrigen fest. Die Elektrode in K_2 ist in ihrer Längsrichtung fest, jedoch um die Achse 0 drehbar, sie schwingt mit ihrem

unteren Ende, das als Zündstift ausgebildet ist, in dem Interferrikum zwischen den Polspitzen hin und her und bildet so einen kontinuierlichen Abreißbogen. Diese Art der Zündung ist dem schon früher für spektrale Zwecke oft verwendeten „Trembleur" nachgebildet. Die Bewegung des Zündstifts wird durch einen kleinen Motor betätigt, die Zündungszahl ist 5 bis 10 pro Sekunde.

Der sichere Gang des Apparates und namentlich die Erfüllung der Forderung, die Elektroden während des Betriebs rasch auswechseln und genau in das homogene Feld wieder einstellen zu können, bedingt eine Anzahl konstruktiver Einzelheiten, die nicht alle in Fig. 1 aufgenommen sind. Die wichtigste ist die Ausbildung der Elektrodenhalter und ihre Justierung. Der feste Halter in K_1 ist gegen das Lampengehäuse durch den Glaszylinder M, der in den mit Gewinde versehenen Messingzylinder D eingekittet ist, isoliert in das Innere der Lampe eingeführt. Mit Hilfe der Ringschraube Q kann er in seiner Längsrichtung während des Betriebes verschoben werden, wodurch immer frisches Material in den Bogen eingeführt wird. Die Stromzuführung erfolgt bei der Klemmschraube L_1, mit der die Elektrodenhalterung H_1 metallisch durch einen durch die Seele des Glaszylinders M hindurchgeführten Messingstab verbunden ist. Die Halterung H_1 sitzt auf einem Schlitten mit Schwalbenschwanzführung, der senkrecht zur Zeichenebene der Fig. 1 A verschiebbar ist und dadurch gestattet, die feste Elektrode E bei jedem beliebigen Interferrikum immer plan an die Polspitze P_1 anzulegen. Die Elektrode E ist in der Figur als Metallamelle skizziert. Für solche Elemente, die nicht in Form von Blechstreifen gebracht werden können, oder die als kompaktes Metall zu schwer verdampfen, ist diese Elektrodenform nicht brauchbar. An Stelle der skizzierten Elektrode E wird in diesen Fällen ein zweckentsprechend geformter Lamellenhalter eingesetzt, der das gewünschte Elektrodenmaterial in Form kleiner Plättchen festhält. Die Elektrode E bzw. der letztgenannte Halter sind durch ein Glimmerblatt gegen den Polschuh P_1 isoliert. Die Herstellung der Elektrodenplättchen begegnet Schwierigkeiten bei Elementen, die spröde sind oder technisch nur in Pulverform hergestellt werden. Hier erweist sich Pressen des metallischen Pulvers in einer geeignet geformten Stahlmatrize mit Hilfe der Natrium-

presse als vorzügliches Auskunftsmittel. Diesen Vorschlag, der sich ausgezeichnet bewährt hat, verdankt Verfasser Hrn. Dr. Schüler.

Die Elektrode in K_2 ist nicht isoliert. Ihre Dichtung erfolgt durch den übergezogenen dickwandigen Gummischlauch S. Bei W ist in einem durch die Schraube Y gehaltenen Winkelstück eine Geradführung eingefräst mit zwei regulierbaren Anschlägen U_1 und U_2, die ein Verbiegen oder Abbrechen des zwischen den Polschuhen hin und her bewegten Zündstiftes verhindern. Außerdem läßt sich — was aus der Figur nicht zu ersehen ist — die Geradführung bei W noch senkrecht zur Zeichenebene der Fig. 1 B, also in der Zeichenebene der Fig. 1 A verschieben, um den Zündstift Z genau in die Mittelachse des Interferrikums bringen zu können. Der Zündstift Z ist in der Figur vereinfacht als gekröpfter Blechstreif skizziert. Er wurde anfänglich in dieser Form aus Manganinblech hergestellt. Bei vergleichsweise leicht schmelzbarem Elektrodenmaterial hielt ein solcher Zündstift in der Regel einige Stunden aus. Bei schwer verdampfbarem Elektrodenmaterial (z. B. Be) war die Lebensdauer jedoch nur wenige Minuten. Dieser Übelstand wurde behoben durch Einfügung eines Zündstiftes aus Wolframmetall. Die Form dieses Stiftes ist etwas anders als in der Figur skizziert, damit sie auf der Schleifmaschine zugerichtet werden konnte. Die Osram G. m. b. H. hatte die Freundlichkeit, diesen Zündstift nach eingesandtem Modell auf das Genaueste herzustellen und dem Institut als Geschenk zu überlassen. Es sei ihr auch an dieser Stelle dafür gedankt. Mit diesem Wolframzündstift wurden nach Abschluß der vorliegenden Arbeit auch schwer verdampfbare Elemente hohen Atomgewichts untersucht; der Wolframzündstift zeigt trotz vielstündiger Inanspruchnahme (bisher etwa 50 Stunden) noch keine Veränderung.

Die Bogenlampe wird mit Gleichspannung betrieben, die mit Hilfe eines als Spannungswähler geschalteten Regulierwiderstandes zwischen etwa 50 und 200 Volt variiert werden kann. Die Stromstärke des Bogens betrug in der Regel 1,5 bis 8 Ampères. Einschaltung einer Selbstinduktion wirkt günstig auf Linienschärfe und Konstanz des Bogens. Die Lampe steht durch den Stutzen T mit der Luftpumpe in Verbindung; sie wird vor Gebrauch völlig ausgepumpt, mit Wasser-

stoff gefüllt und dann wieder auf 0,8 bis 1 cm Hg Druck ausgepumpt, so daß der verbleibende Gasrest Wasserstoff ist. Hierdurch wird jede Oxydbildung an den Elektroden vermieden und ein ganz reines oxydbandenfreies Spektrum erhalten.

Als Spektralapparat diente die mehrfach beschriebene große Gitteraufstellung des Tübinger Instituts. Gitter, Spalt und Plattenhalter für 60 aneinander anschließende Platten des Formats 6×18 cm waren bisher so genau als ausführbar auf dem Rowlandschen Kreis justiert. Diese Fokussierung ist vom Verfasser für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung photographisch nachgeprüft worden durch Aufnahme von 24 über das ganze Spektrum verteilten besonders scharfen Linien des Bleis. Die Platten waren dabei schräg gestellt, und zwar so, daß die Mitte der darauffallenden Spektrallinie genau über dem Rowlandschen Kreis lag, während die untere Plattenhälfte dem Gitter näher, die obere von ihm entfernter war. Hierbei ergab sich eine systematische Abweichung der Fokalkurve vom Rowlandschen Kreis, die bis zu 4 mm in der Gegend der Normalen in Richtung auf das Gitter beträgt. Die Fokalkurve ist demnach ungefähr von schwach elliptischer Form, die kleine Achse der Ellipse liegt nahe der Gitternormalen, etwa in deren Richtung. Auf diese empirisch gefundene Fokalkurve wurden die Plattenhalter justiert und dadurch eine merkliche Steigerung der Auflösungskraft erreicht. Auch Zeemaneffekte wurden versuchsweise auf schräggestellten Platten aufgenommen, wobei das bemerkenswerte Ergebnis erhalten wurde, daß schon in geringer Entfernung vom Fokus anders geartete, dem wahren Zeemaneffekt ganz ähnlich sehende, durchaus scharfe Interferenzfiguren auftreten. So geht z. B. der Typus der Kupferlinie 3247 Å.-E. (Typus D_1 mit sechs äquidistanten Komponenten) in erster Ordnung in einer Entfernung von 1,5 mm hinter dem Fokus in eine Figur von acht äquidistanten Komponenten über, während das Bild einer unmagnetischen Linie sich in diesem Bereich nicht merklich ändert. Man erkennt hieraus die entscheidende Bedeutung einer exakten Justierung, denn es ist klar, daß die regelmäßigen extrafokalen Interferenzfiguren um so dichter vor und hinter dem Fokus folgen, je enger die Feinstruktur des beobachteten Zeemaneffektes ist.

Für die Photographie des ultravioletten Teiles der Spektren

wurden Extrarapidplatten von Hauff verwendet, die durch hohe Empfindlichkeit, feines Korn und Schleierfreiheit sich auszeichnen. Die Firma Hauff & Co. in Feuerbach hatte die Freundlichkeit, dem Institute 300 Platten schenkweise zu überlassen, wofür ihr auch an dieser Stelle gedankt sei. Für das sichtbare Gebiet dienten die zur Sensibilisierung mit Pinaverdol, Pinachromblau und Dicyanin trefflich geeigneten Platten „Grün-Etikett" von Westendorp & Wehner A.-G., Köln. Die Expositionsdauer erstreckte sich von $^1/_4$ bis 2 Stunden.

2. Messungsergebnisse.

A. Beryllium.

Der Zeemaneffekt des Be scheint bisher nur von Popow untersucht worden zu sein, und zwar unter zwei Gesichtspunkten, dem serientheoretischen und dem der Erforschung der spektroskopischen Besonderheiten enger Liniengruppen, wofür das Be ausgezeichnete Beispiele liefert. In beiden Richtungen ist Popow[1]) zu entscheidenden Ergebnissen gelangt. Seine Photogramme sind im Tübinger Institut 1912/13 hergestellt. Popow verwandte als Lichtquelle einen Funken in Luft mit Selbstinduktion und Kapazität zwischen imprägnierten Kohleelektroden, in einem vereinzelten Falle bei einer Aufnahme ohne Magnetfeld den Abreißbogen in luftverdünntem Raum (5 cm Hg Druck) zwischen Elektroden gleicher Art mit Hilfe einer älteren Anordnung des Verfassers.

Die Be-Aufnahmen des Verfassers sind mit der beschriebenen neuen Bogenlichtquelle im H_2-Rest von 0,8 mm Hg-Druck hergestellt. Die Gleichstrombogenspannung betrug etwa 120 Volt, die Stromstärke 1—2 Ampere, die Expositionsdauer $^1/_2$ bis 1 Stunde. Als Elektrode (Anode) diente reines pulverisiertes Berylliummetall in der Natriumpresse zu einem festen Metallstück passender Form gepreßt. Für die völlige Auflösung der engsten Feinstrukturen genügten diese Elektroden nicht. Es

1) Die Diskussion des Berylliumspektrums als Ganzes in serientheoretischer Hinsicht ist enthalten in den Verhandlungen der Schweiz. Naturforsch. Gesellschaft, 26. Jahresversammlung in Frauenfeld 1913. II. S. 150. Die Veröffentlichung ist ausdrücklich als „vorläufige" bezeichnet. Eine abschließende scheint wegen des Krieges nicht erfolgt zu sein, was eine Wiederaufnahme des Gegenstandes rechtfertigt. Die magnetische Analyse des Be-Dublets ist in abgeschlossener Form enthalten in Phys. Zeitschr. 15. S. 757 ff. 1914.

erwies sich als notwendig, das Be in Verdünnung anzuwenden, zu welchem Zwecke es im Verhältnis 1:1 mit pulverisiertem Kupfer gemischt und dann gepreßt wurde. Hierdurch erhöht sich die Linienschärfe bei gleichzeitiger Intensitätsverringerung. Auch in diesem Falle ist die spektrale Breite der Be-Linien immer noch merklich größer als etwa die entsprechender Mg-Linien, eine Folge des kleinen Atomgewichts von Be. So findet sich beispielsweise angenähert für die Linienbreite ($\delta\nu$) bei zwei homologen Linien ($2p_1 - 1{,}5s$) des Mg 5183,6 Å.-E. und des Be 3321,42 Å.-E. $\delta\nu = 0{,}28$ bzw. $\delta\nu = 0{,}52$. Im Magnetfeld sind die Zeemankomponenten schmaler als die unmagnetischen Linien. Für entsprechende σ-Komponenten finden wir bei den gleichen Linien für Mg $\delta\nu = 0{,}23$, für Be $\delta\nu = 0{,}32$. Die Definition der Linien ist in den Aufnahmen des Verfassers wesentlich besser als etwa im Luftfunken, wie die Tafel der Vergrößerungen erkennen läßt, und außerdem frei von störenden Banden.

Popow legt seiner Untersuchung die Wellenlängenmessungen von Rowland und Tatnall[1]) zugrunde, die er von allen Literaturangaben am besten mit seinem Befund übereinstimmend findet, und verbessert sie durch Zufügung von Zusätzen qualitativen Inhalts. In nachstehender Übersicht werden Rowland und Tatnalls Werte und Popows Verbesserungen zusammengestellt (vgl. Tab. 1).

Die grundlegende Bedeutung von Popows Berichtigungen und Ergänzungen springt in die Augen; das trotz seiner scheinbaren Einfachheit bisher völlig unverstandene Be-Spektrum wird dadurch in ein klares System gebracht, das in vollkommener Analogie zu den Spektren der übrigen Erdalkalien steht. Es fügt sich damit völlig in den Rahmen der spektroskopischen Gesetzmäßigkeiten dieser Gruppe des periodischen Systems und zeigt ihnen gegenüber die Besonderheit, daß die Linienmultiplizitäten, die in dieser Gruppe makroskopisch sind, bei

---

1) Abgedruckt bei Kayser, Spektroskopie. 5. S. 161f. Die in folgender Tab. 1 nicht geführten weiteren Be-Linien der zitierten Tabelle von Rowland und Tatnall sind mit Quarzspektrograph von Verf. beobachtet, in den Aufnahmen mit dem großen Gitter jedoch nicht enthalten.

Nach Popows Untersuchungen, aber offenbar ohne Kenntnis von diesen, ist eine Untersuchung des Be-Spektrums von L. C. Glaser, „Beiträge zur Kenntnis des Be-Spektrums“ (Dissert. Breslau 1916) erschienen.

Tabelle 1.

Rowland und Tatnall	Popow
1. 4572,869 Å.-E.	—
2. 3321,487[1]) 21,219	Rowlands Messung ist unrichtig, die Gruppe ist ein Triplet von eigenartiger Struktur. Sie ist das Grundglied der Hauptserie und II. Nebenserie
3. 3131,194[1]) 30,546	Rowlands Messung ist richtig[2]) und zwar ist die Gruppe im Magnetfeld den *D*-Linien analog; Typus D_1 liegt nach großem Typus, D_2 nach kleinen Wellenlängen.
4. 2651,042 50,414	Rowlands Angabe ist unrichtig. Es liegt eine Gruppe von 5 Linien vor, wovon 2 sehr schwach. Die Gruppe ist etwa symmetrisch bezüglich der stärksten Linie angeordnet in Analogie zu den 5 Linien des Mg von 2776 bis 2783 Å.-E.
5. 2494,960 94,532	Rowlands Messung ist unrichtig, auch hier liegt ein Triplet vor wie bei 3321 Å.-E.
6. 2348,698 *R* oder *d*?	„Einfache" Linie im Sinne des Serienschemas.

Be in Form von Feinstrukturen auftreten. Das Ergebnis von Popows Untersuchung läßt sich dahin zusammenfassen: das Be-Spektrum enthält 1. ein System einfacher Linien, deren Grundlinie 2348,698 Å.-E. ist; 2. ein System von Triplets; das Grundglied von Hauptserie und II. Nebenserie liegt bei 3321 Å.-E., ein weiteres Glied bei 2494 Å.-E.[3]); 3. ein System von Dublets; das Grundglied der Hauptserie und II. Nebenserie liegt bei 3131 Å.-E.; 4. eine 5-Liniengruppe[4]) (Kombination vom magnetischem Typus 3 $a/2$) entsprechend der Liniengruppe des Mg 2776,8 bis 2783,0 Å.-E.

Dem Triplet bei 3321,4 Å.-E. wendet Popow besondere Aufmerksamkeit zu. Er weist darauf hin, daß der wechselseitige Abstand der 3 Linien nicht das gewöhnliche Verhältnis von etwa 1:2 zeige, daß vielmehr der Abstand der schwächsten Linie von der nächst stärkeren ($\delta\nu_{23}^r$) viel kleiner sei, als

1) L. C. Glaser, a. a. O., gibt diese Gruppen ebenfalls als Dublets an.

2) S. Popow gibt 3131,195 und 3131,590, was mit Rowland u. Tatnall gut übereinstimmt. Phys. Zeitschr. 15. S. 757. 1914.

3) Grundglied der I. Nebenserie, vgl. S. 356.

4) Richtiger „6-Liniengruppe" analog Ca, vgl. S. 345, Tab. 2.

nach der Regel und im Vergleich zur Differenz $\delta\nu_{12}^{p}$ zu erwarten, woraus er den Schluß zieht, daß die Triplets des Be eine Entartung im Sinne eines Übergangs in ein Dublet zeigen. Dieser Befund ist einem schon früher von Hrn. Paschen[1]) bemerkten analog, wonach die Dubletlinien des Li eine sehr kleine, und zwar erheblich kleinere Schwingungsdifferenz zeigen, als nach dem regelmäßigen Anwachsen der Dublet-differenzen innerhalb der Gruppe der Alkalien zu erwarten ist, und damit eine Annäherung an das Gebilde einer einfachen Linie zeigen.

Die große Tragweite der Erkenntnisse Popows macht es wünschenswert, die dem vorläufigen Charakter seiner Veröffentlichung entsprechend überwiegend qualitativen Angaben durch Ermittlung der quantitativen Verhältnisse zu ergänzen. Dabei werden zugleich Ergebnisse bezüglich der magnetischen Verwandlung enger Triplets gewonnen, die in theoretischer Hinsicht von Interesse sind. Im folgenden werden die auf Aufnahmen des Verfassers abgeleiteten Wellenlängen der von Popow erstmals gedeuteten Liniengruppen und die Analyse dieser Gruppen im Magnetfelde gegeben. Tab. 2 enthält die Wellenlängen der Be-Linien ohne Magnetfeld im Rowlandschen System. Sie sind in allen Fällen, in denen ein Zweifel über die Zuordnung der gefundenen Feinstrukturkomponenten zu den Rowlandschen Messungen ausgeschlossen war, unmittelbar an die entsprechenden Werte von Rowland und Tatnall angeschlossen. Andernfalls ist die Messung des Verfassers auf andere Rowlandsche Normalen bezogen; die Spalte „Bemerkungen" gibt hierüber Bericht. Die Zahlen sind Mittelwerte aus sechs verschiedenen Aufnahmen in II. bis V. Ordnung.

Die in Tab. 2 angegebenen Wellenlängen und Wellenzahlen der Be-Linien genügen schon, um die wichtigsten von Popows Folgerungen sicherzustellen. Im einzelnen ergibt sich: die Linien 2348,70 Å.-E. und 4572,87 Å.-E. sind einfache Linien. Erstere ergibt im Magnetfeld ein Triplet von der Aufspaltung $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2 H} = 4{,}698 \cdot 10^{-5}$ (gegenüber $a = 4{,}698 \cdot 10^{-5}$), letztere ein Triplet von der Aufspaltung $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2 H} = 4{,}71 \cdot 10^{-5}$, sie sind

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 39. S. 902. 1912.

Tabelle 2.

Wellenlängen der Be-Linien im Rowlandschen System.

	Rowland und Tatnall λ_{Luft}	Verf. λ_{Luft}	Intensität	Termkombination	Verf. $\lambda_{vak.}$	Verf. $\nu_{vak.}$	Bemerkung.
1.	4572,869	4572,869	10	PD	—	—	Wert v. Rowland u. Tatnall
2.	3321,487	3321,487	10	$p_1 s$ [1])	3322,423	30098,52	von Verf. angeschlossen an Rowland u. Tatnall 3321,487. Fehlergrenze 0,002 Å.-E.
	21,219	21,226	8	$p_2 s$	22,162	30100,88	
	—	21,154	3	$p_3 s$	22,090	30101,54	
3.	3131,194	3131,194	10	$p_2 s$ Dubl.	3132,084	31927,60	An Rowland u. Tatnall Komponente 3131,194 angeschlossen
	30,546	30,546	10	$p_1 s$	1,436	34,18	
4.	2651,042	2650,879	8	$p_1 p_2'$ [2]) a	2651,652	37712,34	In IV. Ordnung an die Rowlandsche Normale Tl 3529,547 angeschlossen
	50,414	50,814	4	$p_2 p_2'$ b	51,587	13,26	
	—	50,750	6	$p_1 p_1'$ c	51,523	14,16	nur stellenweise deutlich getrennt
	—	50,720	6	$p_2 p_1'$ d	51,493	14,58	
	—	50,665	5	$p_3 p_2'$ e	51,438	15,36	
	—	50,570	9	$p_3 p_1'$ f	51,343	16,69	
5.	2494,960	2494,960	6	$p_1 d$ [2])	2495,698	40068,905	An Rowland u. Tatnall Wert 2494,960 angeschlossen.
	94,523	94,815	5	$p_2 d$	95,553	71,225	
	—	94,772	9	$p_3 d$	95,510	71,913	
6.	2348,698 R, d?	2348,698 R	10	PS			Wert von Roland u. Tatnall, ohne Magnetfeld umgekehrt

1) Grundglied der II. Nebenserie und Hauptserie.

2) Einordnung von Hrn. Paschen. F. Paschen und R. Götze, Seriengesetze der Linienspektren. Springer, Berlin 1922. S. 71f.

also beide magnetisch normale Triplets. Die Linie 2348,70 hat große Neigung zur Selbstumkehrung, sie ist eine Restlinie des Be-Bogenspektrums, man wird ihr dementsprechend die Termkombination PS zuordnen; die Linie 4572,87 zeigt dagegen auch bei stärkster Selbstumkehrung von 2348,70 in keinem Falle Umkehrung, weswegen man ihr das Symbol PD wird zuordnen dürfen. Die beiden Linien 3131,19 und 3130,54 Å.-E. sind die Restlinien des Be-Funkenspektrums, dem Dublet 2795,68 und 2802,80 des Mg homolog. Wie Popow als erster festgestellt hat, zeigt im Magnetfeld die Linie 3130,54 den Typus von D_2, 3131,19 den Typus von D_1.

Die Gruppe 3322,423 $(2p_1 - 1{,}5s)$
22,162 $(2p_2 - 1{,}5s)$
22,090 $(2p_3 - 1{,}5s)$

ist in den Aufnahmen des Verfassers ein wohl definiertes Triplet mit den Schwingungsdifferenzen $\delta\nu_{12} = 2{,}36$; $\delta\nu_{23} = 0{,}66$; $\delta\nu_{13} = 3{,}02$ cm^{-1}.

Die Gruppe 2495,698 Å.-E.
95,553 „
95,510 „

ist ein ebensogut definiertes Triplet mit den Schwingungsdifferenzen $\delta\nu_{12} = 2{,}32$; $\delta\nu_{23} = 0{,}69$; $\delta\nu_{13} = 3{,}01$. Die Differenzen sind mit denen der ersten Gruppe innerhalb der Fehlergrenzen identisch. Da die Gruppe 3323 Å.-E. für die Messung günstiger liegt, nehmen wir die daraus abgeleiteten $\delta\nu$-Werte als die richtigeren an. Daraus ergibt sich für das Schwingungszahlenverhältnis $\delta\nu_{12}^p/\delta\nu_{23}^p$ der in der Tat auffallend große Wert 3,57.

Hr. Sommerfeld[1]) gibt eine Zusammenstellung der Dubletdifferenzen der Alkalien und Erden und der Tripletdifferenzen der Erdalkalien, die etwas erweitert und insbesondere durch Einreihung der neu gefundenen Werte des Be ergänzt in Tabb. 3a—d wiedergegeben ist:

---

1) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. 3. Aufl. S. 445f. Tab. 37 bis 39. In nachstehender Tab. 3 sind die von Verf. neueingefügten Werte durch Einklammerung kenntlich gemacht.

Tabelle 8.

Dublet- und Tripletdifferenzen.

I. Dublets.

a)

1. Atomnummer Z	2. Element	3. $\delta\nu^{2p}$	4. $10 \cdot \frac{\delta\nu^{2p}}{Z^2}$
3	Li	0,34	0,38
11	Na	17,21	1,42
19	K	57,90	1,61
37	Rb	237,71	1,74
55	Cs	554,10	1,83

b)

5. Atomnummer Z	6. Element	7. $\delta\nu^{2p}$	8. $10 \cdot \frac{\delta\nu^{2p}}{Z^2}$	9. $10 \cdot \frac{\delta\nu^{2p}}{4Z^2}$
4	Be +	(6,58)	(4,11)	(1,03)
12	Mg +	91,5	6,35	1,59
20	Ca +	223,7	5,59	1,40
38	Sr +	803,2	5,56	1,39
56	Ba +	1690,6	5,38	1,34

c)

10. Atomnummer Z	11. Element	12. $\delta\nu^{2p}$	13. $10 \cdot \frac{\delta\nu^{2p}}{Z^2}$
5	[B]	[15,30[1])]	[6,12]
13	Al	112,07	6,6
43	In	2212,63	9,2
81	Tl	7792,45	11,7

II. Triplets.

d)

14. Atomnummer Z	15. Element	16. $\delta\nu^{p}_{12}$	17. $\delta\nu^{p}_{23}$	18. $\frac{\delta\nu^{p}_{12}}{\delta\nu^{p}_{23}}$	19. $10 \cdot \frac{\delta\nu^{p}_{12}}{Z^2}$	20. $10 \cdot \frac{\delta\nu^{p}_{23}}{Z^2}$
4	Be	(2,36)	(0,66)	(3,57)	(1,47)	(0,41)
12	Mg	40,92	19,89	2,06	2,85	1,38
20	Ca	105,99	52,11	2,05	2,65	1,30
38	Sr	394,44	187,05	2,10	2,74	1,29
56	Ba	878,4	370,3	2,38	2,83	1,18

Aus Tab. 8 liest man ab: 1. die Dubletdifferenz $\delta\nu^{2p}$ und die Größe $\delta\nu^{2p}/Z^2$ des Li fällt als zu klein aus der Reihe der Alkalien heraus; 2. die Dubletdifferenz $\delta\nu^{2p}$ und die Größe

1) S. Popow, Phys. Zeitschr. 15. S. 761. 1914.

$\delta\nu^{2p}/Z^2$ des Be + fällt in genau gleicher Weise aus der Reihe der Erdalkalien heraus; 3. die Tripletdifferenzen $\delta\nu^p_{12}$ und $\delta\nu^p_{23}$ des Be fallen in offensichtlich gleichsinniger Weise aus der Reihe der Erdalkalien heraus; 4. für Be ist die Tripletdifferenz $\delta\nu^p_{23}$ wieder gegen die Regel zu klein relativ zu $\delta\nu^p_{12}$, weswegen der Wert

$$\frac{\delta\nu^p_{12}}{\delta\nu^p_{23}} = 3{,}57$$

als zu groß aus der Reihe herausfällt; 5. bemerkenswert ist die zum Teil sehr nahe Übereinstimmung von Spalte 4 und 9 und besonders von Spalte 4 und 20 der Tab. 8 für die kleinen Atomgewichte. Insbesondere geht aus Spalte 20 hervor, daß die Tripletdifferenz $\delta\nu^p_{23}$ des Be nicht nur dieselbe Art, sondern auch ein ähnliches Maß von Irregularität gegenüber den andern Erdalkalien zeigt, wie die Dubletdifferenz $\delta\nu^{2p}$ des Li gegenüber den andern Alkalien.

Aus dieser Vergleichung sieht man, daß Li und Be gleichsinnig irregulär gegenüber den übrigen Elementen ihrer Gruppen sich verhalten. Die Ursache für dieses gleiche Verhalten dürfte darin liegen, daß bei den als regulär zu bezeichnenden Elementen die Dublet- und Tripletdifferenzen von makroskopischer Struktur, bei den irregulären Li und Be vom Charakter einer Feinstruktur sind, nicht aber in der Tatsache, daß bei Li und Be im Gegensatz zu den regulären Elementen noch keine Elektronenschale um den Kern gebildet ist, denn auch für das Element B trifft letzteres zu, während bei diesem Element andererseits die Dubletdifferenz $\delta\nu^{2p}$ makroskopisch und zwar ungefähr von gleicher Größe wie bei Na ist; dementsprechend findet sich auch bei B keine dem Li und Be ähnliche Irregularität (vgl. Tab. 3c).

Popows Beobachtung der Linien 3131,194 und 3130,54 Å.-E. als magnetische Typen D_1 bzw. D_2 wird bestätigt; seine Deutung des Be-Triplets 3321 Å.-E. als Termkombination $2p_1 - 1{,}5\ s$ ist von ihm durch magnetische Messung nicht belegt worden. Diese in Popows vorläufiger Veröffentlichung verbliebene Lücke soll im nachfolgenden ausgefüllt werden. Die Entwirrung des magnetischen Typus der engen Tripletgruppe, der nach Popows Deutung aus drei ineinander verschränkten Typen von zusammen 18 Zeemankomponenten bestehen sollte, gelingt durch Anwendung zweier

verschiedener Feldstärken. Dies ermöglicht, aus dem Richtungssinn der Verschiebung, die die einzelnen Zeemankomponenten beim Übergang von kleineren zu größeren Feldstärken zeigen, ihre Zuordnung zu den unmagnetischen Linien eindeutig zu bewirken. Von den angewendeten Feldstärken war die kleinere 30,23 Kgs., die größere 37,0 Kgs. Eine Feldstärke von 26 Kgs. gab keine ausreichende Trennung mehr, weswegen die damit gemachte Aufnahme nicht zur Messung verwendet wurde.

Tabelle 4a.

Ohne Feld		H = 30,236 Kgs							
		Berechnung			Beobachtung				Zuordng. von Berechng. und Beobachtung
Termkombination	Relat. Intens.	Pol. u. Komp. Bezeichnung	Intens.	λ Å.-E. berechn.	λ Å.-E. beob.	Intens.	Pol.	Komp. Nr. der Fig.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		σ_{12}	2	3322,736	3322,763	1/2	σ	11	σ_{12}
		σ_{11}	8	22,658	22,667	1	σ	10	σ_{11}
		σ_{10}	10	22,580	22,564	10	σ	9	σ_{10}
$p_1 s$		π_6	8	22,501	—	—	—	—	—
323,423	10	π_5	10	22,423	22,423	3	π	8	π_5
		π_4	8	22,345	22,344	6	$\pi\sigma$	7	$\pi_4, \sigma_2, \sigma_3$
		σ_9	10	22,256	22,263	4	σ	6	σ_9
		σ_8	8	22,188	22,203	3	σ	4	σ_8
		σ_7	2	22,110	22,128	3	σ	3	σ_7
		σ_6	5	22,475	—	—	—	—	—
		σ_5	5	22,397	22,344	6	$\pi\sigma$	7	$\pi_4, \sigma_2, \sigma_5$
$p_2 s$		π_3	8	22,240	22,223	7	π	5	π_3
322,162	8	π_2	8	22,084	22,049	1	π	2	π_2
		σ_4	5	21,927	21,902	8	σ	1	σ_4
		σ_3	5	21,849	—	—	—	—	—
$p_3 s$		σ_2	2	22,403	22,344	6	σ	7	$\sigma_2, \pi_4, \sigma_3$
322,090	4	π_1	4	22,090	—	—	—	—	—
		σ_1	2	21,777	—	—	—	—	—

Tabb. 6a und b faßt die mit und ohne Polarisation gemachten Aufnahmen und die Messung der verschiedenen Ordnungen zusammen und stellt sie den für den Typus $p_i s$ berechneten Zeemankomponenten gegenüber. Die Lagen der beobachteten Komponenten sind unmittelbar auf die unmagne-

Tabelle 4b.

Ohne Feld		$H = 36{,}98$ Kgs							
		Berechnung			Beobachtung				Zuordnung von Berechnung und Beobachtung
Termkombination	Relat. Intens.	Pol. u. Komp. Bezeichnung	Intens.	λ Å.-E. berechn.	λ Å.-E. beob.	Intens.	Pol.	Komp. Nr. der Fig.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		σ_{12}	2	3322,807	—	—	—	—	—
		σ_{11}	8	22,711	3322,743	1/2	σ	12′	σ_{11}
		σ_{10}	10	22,615	22,612	10	σ	11′	σ_{10}
		π_6	8	22,519	—	—	—	—	—
p_1^s	10	π_5	10	22,423	22,417	1	$\pi\sigma$	7′	π_5
3322,423		π_4	8	22,327	22,352	9	$\pi\sigma$	6′	π_4
		σ_9	10	22,231	22,238	10	$\pi\sigma$	5′	π_3, σ_9
		σ_8	8	22,135	22,179	3	σ	4′	σ_8
		σ_7	2	22,039	22,105	2	σ	3′	σ_7
		σ_6	5	22,546	22,550	2	σ	10′	σ_6
		σ_5	5	22,450	22,455	3	σ	8′	σ_5
p_2^s	8	π_3	8	22,258	22,238	10	$\pi\sigma$	5′	π_3, σ_9
3322,162		π_2	8	22,066	22,049	2	π	2′	π_2
		σ_4	5	21,874	21,871	8	σ	1′	σ_4
		σ_3	5	21,778	—	—	—	—	—
p_3^s	4	σ_2	2	22,474	22,469	3	σ	9′	σ_2
3322,090		π_1	4	22,090	—	—	—	—	—
		σ_1	2	21,706	—	—	—	—	—

tischen Linien[1]) des Triplets bezogen. Die Vergleichung der Intensitäten beruht auf Schätzung und wird bei verschiedener Polarisation durch die polarisierende Wirkung des Gitters in

1) Auf die Bestimmung der absoluten Lagen der Zeemankomponenten wurde besonderes Gewicht gelegt, damit nicht nur relative Verschiebungen, sondern unmittelbar die wahren Lagen der Zeemankomponenten relativ zu den unmagnetischen Linien zu erkennen sind. Es gelingt dies dadurch, daß man die Tripletgruppe ohne Magnetfeld in eine Feldaufnahme mit paralleler Polarisation hineinphotographiert. Dann liegen die π-Komponenten und die unmagnetischen Linien auf der gleichen Platte nebeneinander und zwar im vorliegenden Falle in beiden Feldstärken ohne gegenseitige Überlagerung von unmagnetischen Linien und Zeemankomponenten. Das Bedenken, daß die zeitlich getrennten Aufnahmen mit und ohne Magnetfeld infolge Temperaturänderung sich etwa gegeneinander verschieben, wird beseitigt, wenn man die Aufnahme ohne

ihrem Wert beeinträchtigt. Es ist deshalb namentlich bei Komponenten mit gemischtem Polarisationszustand ($\pi\sigma$) nicht mit Sicherheit anzugeben, welcher Polarisationszustand vorherrscht. Der nach Augenschein merklich überwiegende Polarisationszustand ist durch Unterstreichen des bezüglichen Buchstabens hervorgehoben ($\underline{\pi}\sigma$ oder $\pi\underline{\sigma}$).

Fig. 2 gibt maßstabsgerecht den Inhalt der Tabb. 6a und b wieder. Es ist daraus der theoretische Verlauf der magnetischen Aufspaltung zu ersehen und gleichzeitig Lage und Intensität

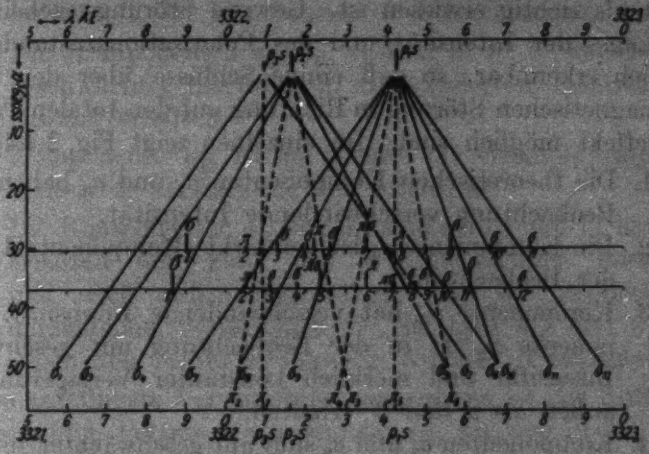


Fig. 2.

Feld in zwei Abschnitten vornimmt, nämlich die erste Hälfte der Exposition unmittelbar vor, die zweite Hälfte unmittelbar nach der Aufnahme mit Magnetfeld. Eine etwaige Verschiebung der beiden Aufnahmehälften ohne Magnetfeld gegeneinander gibt sich dann in einer Verdoppelung oder Verbreiterung der unmagnetischen Linien zu erkennen, in welchem Falle die Aufnahme unbrauchbar ist. Von den unmagnetischen Linien aus lassen sich nun die Wellenlängen der π-Komponenten messen. Deren so gefundene Wellenlängen werden auf eine zweite Aufnahme gleicher Feldstärke ohne Polarisation übertragen und so die Lage der σ-Komponenten relativ zu den π-Komponenten, damit also auch zu den relativ unmagnetischen Linien gefunden. Dieses Verfahren verbürgt zugleich, daß die Lichtquelle, die die als Normalen gebrauchten unmagnetischen Linien aussendet, am gleichen Orte liegt, wie die magnetisierte Lichtquelle, ein Umstand, dessen Vernachlässigung zu Fehlern führen kann.

Trotz ihrer Einfachheit scheint diese Methode noch nicht angewendet worden zu sein. Verfasser benutzte sie erstmalig zu den Aufnahmen, die dem Aufsatz von Paschen und Back, „Liniengruppen magnetisch vervollständigt" (Zeeman-Festschrift Physika. 1921. S. 129) zugrunde lagen.

der beobachteten Komponenten, letztere durch die Strichlängen angedeutet. Der beobachtete Polarisationszustand ist durch die zugefügten Buchstaben π und σ kenntlich gemacht. Die Zeemankomponenten des Typus $p_1 s$ sind in Tab. 6 und Fig. 2 mit fortlaufenden Nummern σ_1 bis σ_{12} bzw. π_1 bis π_6 bezeichnet.

Die Betrachtung der Fig. 2 zeigt, daß in beiden angewandten Feldstärken die beobachteten Zeemankomponenten dem theoretischen Bilde des Typus $p_1 s$ eindeutig zugeordnet werden können, wodurch Popows Deutung auch durch den Zeemaneffekt als richtig erwiesen ist. Gewisse Störungserscheinungen der Lage, der Intensität und des Polarisationszustandes sind deutlich erkennbar, so daß einige Schlüsse über den Verlauf der magnetischen Störung in Richtung auf den totalen Paschen-Backeffekt möglich sind. Im einzelnen zeigt Fig. 2 folgendes:

1. Die theoretischen Komponenten σ_1 und σ_3 haben in der Beobachtung verschwindende Intensität.
2. Die Komponente σ_4 ist verstärkt (Komponente 1 und 1′ der Beobachtung).
3. Komponente π_1 hat verschwindende Intensität. Komponente π_2 ist in der Beobachtung mit geschwächter Intensität und merklich konstanter Verlagerung nach außen als 2 und 2′ erhalten.
4. Komponenten σ_7 und σ_8 sind mit geschwächter Intensität als 3 und 3′ bzw. 4 und 4′ vorhanden, aber stark nach innen abgedrängt, und zwar so, daß an Stelle der ausgezogenen Strahlen σ_7 und σ_8 stark gegen π_5 konkave Kurven zu zeichnen wären, um die beobachteten Lagen darzustellen.
5. Komponente σ_9 ist bei der kleineren Feldstärke als 6 erhalten, bei der größeren überkreuzt sie die Komponente π_3 und es entsteht dadurch die Komponente 5′ mit dem gemischten Polarisationszustand $\pi\sigma$.
6. Komponente π_4 ist in beiden Feldstärken von σ_2 und σ_5 überkreuzt und ergibt die beobachtete Komponente 7 bzw. 6′ mit dem gemischten Polarisationszustand $\pi\sigma$. Es ist bemerkenswert, daß dieser gemischte Polarisationszustand sich in Komponente 6′ nicht mehr geändert hat, obwohl keine σ-Komponente in der Nachbarschaft liegt. Wollte man die Beobachtung darstellen, so müßte an Stelle des Strahles π_4 eine gegen den Strahl π_5

zu konkav gekrümmte Kurve gezeichnet werden, was auf eine asymptotisch erfolgende Annäherung der Komponenten π_3 und π_4 hinweist.

7. Komponente π_5 ist in der Komponente 8 enthalten und zwar in der Intensität geschwächt und nach außen abgedrängt. Bei der größeren Feldstärke erhält sie nach Überkreuzung durch die Komponente σ_2 und σ_5 den gemischten Polarisationszustand $\pi\sigma$ als Komponente 7′ und wird deutlich mit verschwindender Intensität in die Komponente 6′ hineingezogen.
8. Die Komponenten σ_2, σ_5, σ_6 sind in 8′, 9′ und 10′ mit geschwächter Intensität in unverändertem Polarisationszustand erhalten.
9. Komponente σ_{10} ist in 9 und 11′ erhalten unter bedeutender Verstärkung der Intensität.
10. Die Komponenten σ_{11} und σ_{12} sind als 10 und 11 bzw. 12′ erhalten und zwar mit verschwindender Intensität und nach außen abgedrängt. Um die Beobachtung darzustellen, wären hier die Strahlen σ_{11} und σ_{12} als gegen den Strahl π_5 konvexe Kurven zu zeichnen.

Die auffälligste Verwandlungserscheinung ist das Auftreten des gemischten Polarisationszustandes $\pi\sigma$, der sich in der Figur im Entstehen verfolgen läßt. Aus Fig. 2 ist zu entnehmen, daß die Überkreuzung einer π-Komponente durch eine „innere“ σ-Komponente (nämlich σ_2 und σ_5) den gemischten Polarisationszustand $\pi\sigma$ für die überkreuzte π-Komponente ergibt. Denn

1. Komponente π_5 wird bei 35 Kgs. von σ_5 überkreuzt und geht von da an als Komponente 7′ aus dem Zustand π in den Zustand $\pi\sigma$ über.
2. Komponente π_4 wird bei 26 Kgs. von σ_5 überkreuzt und geht dabei aus dem Zustand π in den Zustand $\pi\sigma$ als Komponente 7 bzw. 6′ über.[1])
3. Komponente π_3 wird bei 36 Kgs. von σ_2 überkreuzt und geht dabei aus dem Zustand π in den Zustand $\pi\sigma$ als Komponente 5′ über.

---

1) In Fig. 2 ist die Komponente 6′ irrtümlich mit π bezeichnet statt mit $\pi\sigma$, wie es nach Tab. 4b sein muß.

Der Übergang von der kleineren Feldstärke zur größeren zeigt in Fig. 2 als allgemeine Erscheinung, daß die meisten beobachteten Zeemankomponenten geringere Lagenänderungen erfahren, als nach dem Maß der Feldstärkeänderung zu erwarten wäre. So geht Komponente 2 in 2′, Komponente 7 in 6′ über, ohne die Lage merklich zu ändern; Komponente 8 geht in 7′ über unter offensichtlich rückläufiger Lagenänderung, als ob sie in den Schwerpunkt der Gruppe hineingezogen würde. In dieser Allgemeinerscheinung kündigt sich ersichtlich der asymptotisch erfolgende Übergang in den gegenüber dem Anfangszustand des Systems veränderten Endzustand des normalen Triplets an.

Hr. Heisenberg[1]) hat die magnetische Verwandlung eines Triplets vom Typus $p_1 s$ bei mittleren und starken Feldern theoretisch behandelt; mehrere seiner Ergebnisse lassen sich mit dem Bilde unserer Fig. 2 unmittelbar vergleichen, denn die Figur läßt die Art der Verwandlung des Gesamttypus in ein normales Triplet ungefähr voraussehen: ersichtlich bleiben die Komponenten 1′ und 11′ in mit dem Felde wachsender Intensität schließlich allein als σ_n-Komponenten übrig. Beide müssen mit wachsender Feldstärke einen geringeren Gang nach außen zeigen, als die Strahlen σ_4 und σ_{10}. In der Tat nimmt in Tabb. 4a u. b ihr gegenseitiger Abstand mit wachsender Feldstärke weniger zu, als der der Strahlen σ_4 und σ_{10}. Von den π-Komponenten erfahren die Komponenten 5′ und 6′ ebenfalls große Intensitätssteigerung. Sie nähern sich mit wachsendem Feld einander asymptotisch und rücken erkennbar in den Schwerpunkt des Systems, der schließlich die π-Komponente des normalen Triplets (π_n) ergibt. Dabei gehen die beiden Komponenten 5′ und 6′ durch den gemischten Polarisationszustand $\pi\sigma$ hindurch. Alle andern Komponenten des Systems erhalten gegenüber den vier erstgenannten bei wachsendem Feld verschwindende Intensität. An der Bildung der kurzwelligen σ-Komponente des normalen Triplets ($-\sigma_n$) ist offenbar nur σ_4 beteiligt, an der Bildung der langwelligen σ-Komponente ($+\sigma_n$) überwiegend σ_{10}, daneben noch möglicherweise σ_2, σ_3, σ_6. Die π-Komponente des normalen Triplets (π_n) wird erkennbar aus den Komponenten π_3 und π_4 gebildet, nachdem diese durch den gemischten

1) W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. 8. S. 293ff. 1922 und die Figur S. 294.

Polarisationszustand $\pi\sigma$ durchgegangen sind. Die Lage des normalen Triplets im Endzustand ist merklich näher bei $p_1 s$ als wie bei $p_2 s$, was der Übergang von Komponente 5 zu 5′ einerseits und von 7 zu 6′ anderseits zeigt.

In Übereinstimmung mit Hrn. Heisenbergs Ergebnissen läßt Fig. 2 erkennen: Komponenten σ_{10}, σ_5, σ_3 ergeben die Komponente $+\sigma_n$; Komponente π_4 geht in Komponente π_n und Komponente σ_4 in $-\sigma_n$ über. Ferner ist aus Fig. 2 zu ersehen, daß die Komponenten σ_{11} und σ_{12}, die nach Hrn. Heisenberg „äußere" σ-Komponenten ergeben sollen, in der Tat, soweit sie zu verfolgen sind, einen deutlichen Gang nach außen zeigen.

Einige andere Folgerungen der Theorie von Hrn. Heisenberg decken sich mit der Beobachtung weniger gut: nach der Theorie sollen die Komponenten π_1 und π_2 in $-\sigma_n$ übergehen. Fig. 2 gibt über das Verhalten dieser Komponenten bei weiter wachsender Feldstärke keinen Anhalt, im angewendeten Feldstärkenbereich ist ein solcher Gang nicht erkennbar. Komponente σ_7 und σ_9 soll nach der Theorie in $-\sigma_n$, Komponente σ_8 in π_n übergehen; in der Beobachtung ist innerhalb der angewendeten Feldstärke ein abweichender Gang von σ_8 gegenüber σ_7 und σ_9 nicht angedeutet. Komponente π_5 soll nach der Theorie in $+\sigma_n$ übergehen. Auch dies ist im Bereich der angewandten Feldstärken nicht angedeutet, sondern eher ein Übergang von π_5 in π_n. Komponente π_6 hat nach der Beobachtung verschwindende Intensität. Die Theorie verlangt, daß bei Erreichung des Endzustands die Aufspaltung des normalen Triplets von der Ordnung des ursprünglichen unmagnetischen Tripletabstandes sei. Aus der Beobachtung läßt sich entnehmen, daß die Spannweite des normalen Endtriplets zwar von der Größenordnung, aber bestimmt ein Mehrfaches (mindestens das Dreifache) des unmagnetischen Tripletabstandes $\delta\nu^p_{18}$ ist.[1])

1) Dies geht hervor aus dem geringen Zurückbleiben des Komponentenabstandes $11'-1'$ gegenüber $\sigma_{10}-\sigma_4$, sowie daraus, daß die gegenseitige Annäherung der Komponenten 5′ und 6′ mit wachsender Feldstärke viel langsamer erfolgt als die der Strahlen π_5 und π_4, nämlich von 0,121 auf 0,114 Å.-E. beim Übergang von 30,2 auf 37 Kgs, während bei linearem Verlauf der Abstand von 0,105 auf 0,069 Å.-E. abnehmen müßte. Man kann daraus abschätzen, daß die Vereinigung der Kompo-

Für das Triplet 2494 Å.-E. ließ sich der ungünstigeren Wellenlänge wegen die magnetische Analyse nicht in gleicher Weise durchführen, so daß für die Einordnung dieses Triplets in das Serienschema auf Grund von Zeemantypen keine Beobachtung vorliegt. In Tab. 2 ist die serientheoretisch begründete Klassifizierung $2p_i - 3d$ von Hrn. Paschen angegeben.

Die Kombinationsgruppe $p_i p_i'$ bei 2651 Å.-E. steht, wie Popow hervorgehoben hat, in Analogie zu der 5-Liniengruppe des Mg oder besser zu den 6-Liniengruppen der Erdalkalien[1]), deren Linien die magnetische Aufspaltung 3 a/2 haben. Der zahlenmäßige Nachweis für diese Einordnung ist in den Wellenlängenangaben der Tabelle 2 enthalten, denn es treten in den Schwingungszahlen $f-c$, $d-a$, $e-d$ genähert die Differenzen des Be-Triplets auf.[2])

Die Zeemaneffekte und deren Störungserscheinungen können für diese ganz enge Gruppe (vgl. Bild 1 der Taf. I der Vergrößerungen, die Liniengruppe 2650 ohne Magnetfeld in IV. Ordnung) bei kleinen Feldstärken nicht mehr getrennt beobachtet werden; in den Aufnahmen bei $H = 30{,}24$ und 37,00 Kgs bilden sie einen vorgeschrittenen Verwandlungstypus, da schon bei der kleineren Feldstärke die Aufspaltung $\delta\lambda/\lambda^2 H$ des Zeemantypus der Gruppe von der Ordnung des größten vorkommenden Linienabstandes (a—f in Tabelle 2) ist. Der Gesamttypus der Gruppe ist merklich ein magnetisches Triplet, das symmetrisch zu den äußersten unmagnetischen Linien 2651, 652 und 2651,343 liegt. Die Art der Verwandlung ist bemerkenswert: bei der kleineren Feldstärke ist das magnetische Triplet nicht symmetrisch, die Lage der äußeren Komponente nach langen Wellen von der mittleren weiter entfernt, als die nach kurzen liegende. Die Polarisation aller drei Komponenten ist nicht rein, die Aufspaltung $\delta\lambda/\lambda^2 H$ ist $6{,}823 \cdot 10^{-5}$. Dieser Wert liegt dem von 3a/2 ($= 7{,}047 \cdot 10^{-5}$) auffallend nahe, der als Aufspaltung für jede der einzelnen Linien zu erwarten wäre.

---

nenten 5′ und 6′ nicht unter 100 Kgs erfolgt; bei 100 Kgs würde aber der gegenseitige Abstand der $\pm\sigma_z$-Komponenten 0,98 Å.-E. sein, also das Dreifache von $\delta\nu^2_{12}$.

1) R. Götze, Ann. d. Phys. 66. S. 291. 1921.

2) F. Paschen u. R. Götze, a. a. O. S. 72.

Die Mittelkomponente hat den Schwingungszustand $\pi\sigma$, beide Außenkomponenten den Schwingungszustand $\pi\bar{\sigma}$, wobei der Zustand σ den Zustand π etwa um das Dreifache überwiegt. Auf einer Aufnahme ohne Polarisation ist auf jeder Außenseite des Triplets noch eine schwache Komponente eben angedeutet.

Man könnte hiernach erwarten, daß der Endtypus der Gruppe bei starken Feldern ein Triplet von der Aufspaltung 3a/2 wäre, also ein partieller Paschen-Backeffekt im Sinne der Sommerfeldschen Theorie. Indessen bleibt der bei 32 Kgs gefundene Typus bei wachsenden Feldern nicht bestehen. Bei 37 Kgs zeigt der Typus eine Aufspaltung $\delta\lambda/\lambda^2 H = 6{,}335 \cdot 10^{-5}$, er strebt also immer mehr dem Werte des normalen Triplets $\delta\lambda/\lambda^2 H = 4{,}698 \cdot 10^{-5}$ zu. Dieser Wert ist bei 37 Kgs jedoch noch nicht erreicht, obwohl der Abstand der äußersten unmagnetischen Linien a und f (Tab. 2) von den Außenkomponenten des magnetischen Triplets schon überschritten ist. Bei dieser größeren Feldstärke zeigt sich auch das Vorhandensein einer feineren Struktur der Zeemankomponenten. Die Messung ergibt:

Tabelle 5.

Komp.-Nr.	Intensität beob.	Polarisation beob.	Å.-E. beob.
5	5	σ	2651,658 *d* ? breit
4	4	σ	1,522
3	4; 4	$\pi\sigma$	1,472
2	4	σ	1,434
1	5	σ	1,336 *d* ? breit
äußerster Rand	0	σ	1,274

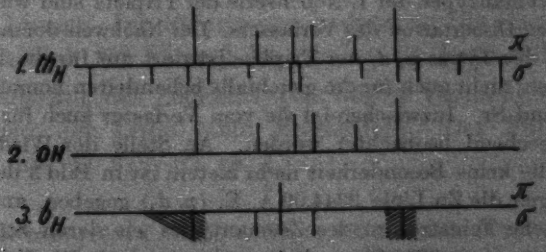


Fig. 3.

Fig. 3 gibt diesen Befund wieder. In deren Mitte ist die Lage der unmagnetischen Linien (Bild 2 *OH*) nach Tab. 2

gegeben, oben die hieraus berechnete Aufspaltung für $H = 37$ Kgs (Bild 1 th_H), unten die beobachtete Lage der Zeemankomponenten (Bild 3 b_H). Eine ins einzelne gehende Diskussion dieses Typus scheitert an der ungünstigen Wellenlänge und daran, daß es hier wegen Überlagerung der unmagnetischen Linien und der Zeemankomponenten nicht möglich ist, nach der oben angeführten Methode die Absolutlagen der Zeemankomponenten festzustellen; es ist also immerhin möglich, daß dem Bild 3 eine geringe Seitenverschiebung gegenüber Bild 1 und 2 zu erteilen wäre. Bemerkenswert und in voller Übereinstimmung mit den Folgerungen von Hrn. Heisenberg für den Verwandlungstypus eines Triplets ist der Befund, daß die π-Komponente streng einfach und durchaus scharf ist. Die beim schwächeren Feld noch eben angedeuteten „äußeren" σ-Komponenten haben auch hier mit wachsendem Feld verschwindende Intensität.

Nach Abschluß dieser Arbeit ist eine weitere Untersuchung des Berylliumspektrums von Hrn. L. C. Glaser[1]) erschienen, in der eine Anzahl neuer Berylliumlinien angegeben werden, die bei Rowland und Tatnall nicht geführt sind. In den Gitteraufnahmen des Verfassers sind diese neuen Linien nicht enthalten.

B. Die Zeemantypen der I. Nebenserie.[2])

1. Die Typen der Termkombination $p_1 d_1$ der Dubletts.

Die Grundtypen dieser Termkombinationen sind vom Verfasser schon früher gefunden und kurz ohne Beweis angegeben worden[3]), sie haben den theoretischen Untersuchungen von

1) L. C. Glaser, Ann. d. Phys. 68. S. 73ff. 1922.

2) Die Zeemantypen der I. Nebenserie der Triplets sind wiedergegeben in der zitierten Dissertation des Verfassers. Der Nachweis der magnetischen Feinstruktur des Typus $p_1 d_1$ der Triplets ist dort nur für die Linie 3610,5 des Cd gegeben, nicht auch für die gleichfalls behandelten homologen Linien des Zn, Ca und Sr. Inzwischen ist sie vom Verfasser auch für diese Linie genau entsprechend beobachtet worden. An Stelle der Wiedergabe von Messungen, die keine Besonderheit mehr bieten, ist in Bild 3 der Taf. I der Vergrößerungen die Zn-Linie 3344,99 Å.-E. ($p_1 d_2$) gegeben, an der sowohl die magnetische Feinstruktur des Zeemantypus wie deren Störung durch die benachbarte Linie 3345,51 ($p_1 d_3$) zu erkennen ist. Die Feinheiten des Plattenbildes sind hier wie auch in den übrigen Bildern der Tafel I durch das angewendete Vervielfältigungsverfahren allerdings nicht voll herausgebracht worden.

3) E. Back, Naturwissenschaften. 12. S. 200. 1921.

Hrn. Sommerfeld[1]) und Hrn. Landé[2]) über den Zeemaneffekt mit als Grundlage gedient. Trotz der guten Bestätigung, die sie durch das daraus abgeleitete, in sich geschlossene System der magnetischen Termaufspaltungen[3]) gefunden haben, ist vom Verfasser die experimentelle Nachweisung dieser Typen bisher jedoch nicht veröffentlicht worden, da gewisse Unstimmigkeiten unter mehreren homologen Linien, die nach der Prestonschen Regel quantitativ gleiche Zeemantypen zeigen müßten, bislang nicht geklärt waren.

Den Messungen sind folgende homologe Liniengruppen nach Aufnahmen mit Vakuumbogen zugrunde gelegt[3]):

Tabelle 6.

Termkomb.	Element Tl λ-Å.-E. int. Syst.	$\delta\nu^d$	Ba λ-Å.-E.	$\delta\nu^d$	Cu λ-Å.-E.	$\delta\nu^d$
$p_1 d_1$	3519,230	82	6141,740	801	5218,200	6,6
$p_1 d_2$	3529,400		5853,700		5220,080	
$p_2 d_2$	2767,870		6498,770		5153,260	

Die erwähnten Unstimmigkeiten zwischen einigen Zeemaneffekten homologer Linien von Tab. 8 haben zwei verschiedene Ursachen:

1. *Verzerrung* des Zeemantypus durch magnetischen Nahwirkungseffekt bei geringer Schwingungsdifferenz zusammengehöriger Linien. Die Störung ist bedeutend für Cu ($\delta\nu^d = 6{,}6$), fast unmerklich für Tl und Ba ($\delta\nu^d = 81$ bzw. 801).

2. *Änderung* des Zeemantypus wegen Vorhandenseins einer Feinstruktur der Linie ohne Magnetfeld. Der Fall liegt vor bei der Linie Tl 2767,87 ($p_2 d_2$).

---

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **63.** S. 121ff. 1920.

2) A. Landé, Zeitschr. f. Phys. **5.** S. 231ff. 1921.

3) Die Zeemaneffekte sämtlicher Linien der Tab. 8 sind schon früher von anderer Seite im Funken in Luft untersucht worden: C. Runge u. F. Paschen, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. **32.** 1902; E. Moore, Ann. d. Phys. **25.** S. 309ff. 1908.

Im einzelnen ergibt die Messung:

1. Typus $p_1 d_1$,

a) Tl 3519,230[1]), $H = 39110$ Gauss.

Tabelle 7.

Komponente Nr.	Polarisation beob.	Intensität beob.	λ beob.	Differenz $\delta\lambda$
12	σ	1	3519,545	
				29
11	σ	3	9,516	
				30
10	σ	7	9,486	
				31
9	σ	9	9,455	
				181
8	π	10	9,274	
				30
7	π	10	9,244	
				30
6	π	10	9,214	
				31
5	π	10	9,183	
				178
4	σ	9	9,005	
				30
3	σ	7	8,975	
				31
2	σ	3	8,944	
				31
1	σ	1	8,913	

Hieraus folgt als mittlerer Komponentenabstand $\delta\lambda = 0{,}030$ Å.-E. mithin $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2 H} = 6{,}194 \cdot 10^{-5}$, was um 1 Proz. von dem Wert $4a/15 = 0{,}626 \cdot 10^{-5}$ abweicht. Also ist der Typus:

$$\pm \frac{(1)\,(3)\;15, 17, 19, 21}{15}\, a\,.$$

Bild 2 der Taf. I der Vergrößerungen zeigt die Linie Tl 3519,23 Å.-E. in V. Ordnung bei $H = 39$ Kgs ohne Polarisation.

b) Ba 6141,740 Å.-E.[2]), $H = 41472$ Gauss.

Die Übereinstimmung dieses etwas weniger gut definierten Typus mit dem vorigen zeigt die Gegenüberstellung von Beobachtung und Berechnung in Tab. 8.

---

1) C. Runge u. F. Paschen, a. a. O. S. 6 geben als magnetischen Typus ein Triplet von der Aufspaltung $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2 H} = \pm 5{,}0 \cdot 10^{-5}$.

2) B. E. Moore, a. a. O., S. 317, gibt als magnetischen Typus gleichfalls ein Triplet.

Tabelle 8.

Komponente Nr.	Polarisation beob.	Intensität beob.	λ beob.	λ berech.
12	σ	1	6142,759	6142,769
11	σ	3	2,664	2,671
10	σ	7	2,577	2,573
9	σ	9	2,472	2,475
8	π	10	1,889	1,887
7	π	10	1,792	1,789
6	π	10	1,691	1,691
5	π	10	1,589	1,593
4	σ	9	1,008	1,005
3	σ	7	0,895	0,907
2	σ	3	0,811	0,809
1	σ	0	—	0,711

c) Cu 5218,200 Å.-E., $H = 37010$ Gauss.

Der in Tab. 9 beobachtete Typus ist qualitativ mit dem berechneten Normaltypus übereinstimmend, quantitativ dagegen nicht: die beobachteten Komponentenabstände, die unter sich

Tabelle 9. [1])

Komp. Nr.	Polar. beob.	Int. beob.	λ beob.	Diff. $\delta\lambda$	λ berech.	Diff. $\delta\lambda$
12	σ	1	5218,764		5218,863	
				29		63
11	σ	8	8,735		8,800	
				31		63
10	σ	8	8,704		8,737	
				34		63
9	σ	8	8,670		8,673	
8	π	7	8,279		8,295	
				74		63
7	π	10	8,205		8,232	
				68		63
6	π	10	8,137		8,168	
				52		63
5	π	7	8,085		8,105	
4	σ	8	7,729		7,727	
				85		64
3	σ	4	7,644		7,663	
				64		64
2	σ	1	7,580		7,600	
						64
1	σ	0	—		7,573	

1) C. Runge u. F. Paschen, a. a. O., S. 6 gaben als magnetischen Typus ein Triplet gleicher Aufspaltung wie 3519 Tl.

gleich sein sollten, ändern sich bis zum Verhältnis 1:8. Ebenso sind die Intensitäten gegenüber dem Normaltypus unsymmetrisch geändert. Diese Störungserscheinungen sind durch die naheliegende Linie 5220,08 Å.-E. ($p_1 d_2$, $\delta \nu^d = 6{,}6$) verursacht. Der Störungsverlauf ist folgender:

Die dem Satelliten ($p_1 d_2$) zugewandte Gruppe der σ-Komponenten (Komponenten 9—12) ist zusammengeschoben und verstärkt, die abgewandte (Komponenten 4—1) auseinandergezogen und geschwächt. Die π-Gruppe (Komponenten 8—5) erleidet die umgekehrte Störung, nämlich ihre dem Satelliten zugewandte Hälfte ist auseinandergezogen (Komponenten 7 und 8), ihre abgewandte (Komponenten 5 und 6) zusammengeschoben. Diese Erscheinung ist allgemein, sie findet sich genau so bei den entsprechenden Linien der Triplets. Bild 3 der Taf. I der Vergrößerungen zeigt die Linie des Zn 3344,99 ($p_1 d_1$) und 3345,96 ($p_1 d_2$). Die Schwingungsdifferenz $\delta \nu^d$ ist hier 5,6. In der unteren Bildhälfte sind die unmagnetischen Linien, in der oberen die magnetischen Typen ohne Polarisation zu sehen. Die Störungen sind deutlich erkennbar und genau gleichartig wie die der Kupferlinie 5218,2 in Tab. 11.

2. Typus $p_2 d_2$.

a) Tl 3529,40 Å.-E.[1]), $H = 39110$ Gauss.

Tabelle 10.

Komponente Nr.	Polarisation beob.	Intensität beob.	λ beob.	Differenz $\delta\lambda$
10	σ	9	3529,767	
				125
9	σ	8	9,642	
				59
8	π	10	9,583	
				62
7	σ	8	9,521	
				59
6	π	2	9,462	
				124
5	π	2	9,338	
				60
4	σ	8	9,278	
				61
3	π	10	9,217	
				60
2	σ	8	9,157	
				122
1	σ	9	9,035	

1) C. Runge u. F. Paschen, a. a. O., S. 6, geben als magnetischen Typus ein Oktett, die Komponenten 5 und 6 der Tab. 12 fehlen in ihrer Beobachtung.

Hieraus folgt als Mittelwert für $\delta\lambda$ 0,6117 Å.-E., mithin für $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2 H} = 1{,}2556 \cdot 10^{-5}$, hiermit stimmt genau überein der Wert $4a/15 = 1{,}253 \cdot 10^{-5}$. Also ist der Typus $\pm \frac{(4)\ 8\ (12)\ 16,\ 24}{15}$ mit den in der Tab. 12 angegebenen relativen Intensitäten. Bild 4 der Taf. I der Vergrößerungen zeigt die Linie 3529,40 Å.-E. in IV. Ordnung bei $H = 39$ Kgs, und zwar oben ohne Polarisation, unten in senkrechter Polarisation und außerdem die unmagnetische Linie hineinphotographiert. Diese liegt sehr genau symmetrisch in dem magnetischen Typus, woraus hervorgeht, daß dieser keine magnetische Verschiebung erleidet. Die Vergrößerung stellt die Existenz der Komponenten 5 und 6 (vgl. Anm. 1, S. 362) außer Zweifel.

b) Ba 5853,700 Å.-E.[1]), $H = 41472$ Gauss.

Die Übereinstimmung des beobachteten mit dem berechneten Typus zeigt Tab. 11.

Tabelle 11.

Komp. Nr.	Polar. beob.	Int. beob.	λ beob.	Diff. $\delta\lambda$	λ berech.	Diff. $\delta\lambda$
10	σ	7	5854,770	350	5854,768	354
9	σ	5	4,420	177	4,412	178
8	π	10	4,243	183	4,234	178
7	σ	3	4,060	180	4,056	178
6	π	1	3,880	359	3,878	356
5	π	1	3,521	179	3,522	178
4	σ	3	3,342	173	3,344	178
3	π	10	3,169	178	3,166	178
2	σ	5	2,992	354	2,988	354
1	σ	7	2,638		2,632	

Hieraus folgt als beobachteter mittlerer Komponentenabstand $\delta\lambda = 0{,}1776$ Å.-E., mithin für $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2 H} = 1{,}250 \cdot 10^{-5}$, was mit dem Wert $4a/15 = 1{,}253 \cdot 10^{-5}$ genau übereinstimmt.

1) C. Runge u. F. Paschen, a. a. O., S. 10, geben ein Oktett wie bei 3529 Tl.

c) Cu 5220,08 Å.-E.[1]), $H = 37010$ Gauss.

Tabelle 12.

Komp. Nr.	Polar. beob.	Int. beob.	λ beob.	Diff. $\delta\lambda$	λ berech.	Diff. $\delta\lambda$
10	σ	2	5220,857	257	5220,837	252
9	σ	4	20,600	167	20,585	126
8	π	8	20,433	151	20,459	127
7	σ	4	20,282	134	20,332	126
6	π	1	20,148	189	20,206	252
5	π	1	19,959	114	19,954	126
4	σ	4	19,845	118	19,828	126
3	π	10	19,727	119	19,701	126
2	σ	4	19,608	241	19,575	252
1	σ	3	19,367		19,323	

Der Typus zeigt starke Verzerrung und Intensitätsänderung als Wirkung der wechselseitigen Störung mit der benachbarten Linie 5218,20 Å.-E. Die Störung ist genau spiegelbildlich zu dieser. Auch dies ist in dem entsprechenden Fall des Zn-Triplets in Bild 3 der Taf. I der Vergrößerungen noch eben zu erkennen.

3. Typus $p_2 d_2$.

Dieser Typus ist bei Tl 2767,87 Å.-E. nicht rein entwickelt wegen der komplexen Struktur dieser Linie. Der Typus ist erstmalig von Popow[2]) erkannt worden an der Linie Ba 6398,770 Å.-E., jedoch nach einer a. a. O. enthaltenen Bemerkung quantitativ nicht ganz richtig. Popow bezeichnet als „zu erwartende" Aufspaltung der äußersten σ-Komponenten den Wert 14a/15, während aus den Vakuumaufnahmen des Verfassers dieser Wert sich mit Sicherheit als 13a/15 ergibt. Wir nehmen die Linie des Ba voraus.

a) Ba 6498,77 Å.-E.[3]), $H = 41472$ Gauss.

Als Abstand der äußersten Komponenten ergibt sich $\delta\lambda = 0{,}720$ Å.-E., woraus für $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2 H} = 4{,}11 \cdot 10^{-5}$ folgt, während $13a/15 = 4{,}072$ und $14a/15 = 4{,}385 \cdot 10^{-5}$ ist. Also ist der Ab-

1) Von C. Runge u. F. Paschen magnetisch nicht ganz aufgelöst, vgl. a. a. O., S. 7. Außerdem fehlt auch hier Komp. 5 u. 6.

2) S. Popow, Ann. d. Phys. 45. S 172. 1914.

3) E. Moore, a. a. O., S. 317, gibt als magnetischen Typus ein Triplet, C. Runge u. F. Paschen, desgl., a. a. O., S. 10f.

Tabelle 13.

Komponente Nr.	Polarisation beob.	Intensität beob.	λ beob.	Differenz $\delta\lambda$
6	σ	8	6499,490	
				116
5	σ	2	9,374	
				548
4	π	10	8,826	
				116
3	π	10	8,710	
				544
2	σ	2	8,166	
				116
1	σ	8	8,050	

stand der äußersten Komponenten von der Ruhelage $= 18a/15$. Für den kleineren Abstand der σ- und π-Komponenten untereinander folgt als Mittelwert $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2 H} = 0{,}633 \cdot 10^{-5}$, während $2a/15 = 0{,}626$ ist. Demnach ist der Typus: $\pm \frac{(1)\ 11,\ 13}{15}$.

b) Cu 5153,26 Å.-E.[1]), $H = 37010$ Gauss.

Tabelle 14.

Komp. Nr.	Polar. beob.	Int. beob.	λ beob.	Diff. $\delta\lambda$	λ berech.	Diff. $\delta\lambda$
6	σ	7	5153,652		5153,660	
						62
5	—	0	—	360	3,598	389
						307
4	π	10	3,292		3,291	
				64		62
3	π	10	3,228		3,229	
				319		307
2	σ	4	2,909		2,922	
				59		62
1	σ	9	2,850		2,860	

Wieder zeigt diese Cu-Linie Verzerrung und Intensitätsstörung. Ursache ist die magnetische Nahwirkung der „verbotenen" Linie $p_2 d_1$, deren Wellenlänge 5151,46 Å.-E. ist. Zwar ist diese verbotene Linie von so geringer Intensität, daß sie auf

1) C. Runge u. F. Paschen geben ein Triplet der Aufspaltung $\delta\lambda/\lambda^2 H = 3{,}87 \cdot 10^{-5}$.

der Platte nicht beobachtet ist, dennoch geht die Störung von ihr aus. Dies läßt sich beweisen durch die analogen Fälle der Triplets an der Zn-Linie 3282,28 Å.-E. ($p_3 d_3$) in Bild 5 und der Cd-Linie 3403,60 Å.-E. in Bild 6 der Taf. I der Vergrößerungen. Bild 5 zeigt unten die Zn-Linie 3282 Å.-E. ohne Magnetfeld, oben die gleiche Linie mit Magnetfeld (Zeemantypus a/2). Nach rechts wachsen die Wellenlängen. Oben liegt links von der Linie $p_3 d_3$ ein weites Zeemantriplet mit der Aufspaltung 7a/6. Dies ist die verbotene Linie $p_3 d_2$.[1]) Die π-Komponente der beiden benachbarten Zeemantriplets stoßen sich gegenseitig ab, so daß beide Zeemantriplets spiegelbildlich unsymmetrisch erscheinen. Die Verzerrung ist eine wechselseitige Beeinflussung beider Linien. In Bild 6 der Taf. I der Vergrößerungen ist oben die entsprechende Cd-Linie 3403,60 Å.-E. ohne Polarisation im Magnetfeld wiedergegeben, unten die gleiche Linie im Magnetfeld in senkrechter Polarisation und die unmagnetische Linie in den Zeemantypus hineinphotographiert. Nach rechts wachsen die Wellenlängen. Man sieht oben eine schwache Unsymmetrie genau wie bei der entsprechenden Zn-Linie in Bild 5, jedoch geringeren Grades, unten sieht man, daß beide σ-Komponenten nach langen Wellen abgedrängt sind. Die „verbotene" Linie, deren Wellenlänge 3402,19 Å.-E.[2]) ist, ist hier wie bei Cu 5153,26 Å.-E. zwar auch nicht sichtbar, ihre Störungswirkung aber unzweifelhaft zu erkennen und analog der Zn-Linie 3282,28.

c) Tl 2767,870 Å.-E.[3]). $H = 36971$ Gauss.

Die Linie zeigt in den Vakuumaufnahmen des Verfassers folgende bisher noch nicht beobachtete Feinstruktur ohne Magnetfeld.

Tabelle 15.

Intensität	λ Å.-E. Luft	$\delta \nu_{vak.}$
5	2767,913	
		0,404
4	67,882	
		0,392
3	67,852	
		0,248
3	67,833	

1) $\lambda = 3281{,}93$. Vgl. Physica. 8, 9, 10. S. 269. 1921.

2) a. a. O., S. 271.

3) C. Runge u. F. Paschen, a. a. O., S. 6f., geben als magnetischen Typus ein Triplet, dessen Aufspaltung etwa 10 Proz. kleiner als die von 5153 Cu ist. Die Komponenten 1 und 9 der Tab. 16 fehlen.

Die Wellenlängen sind bezogen auf die mittlere Wellenlänge 2767,870.

Im Magnetfeld ergibt sich ein unsymmetrischer Typus, der sich, wie Spalte 5 und 6 der Tab. 16 zeigt, ungefähr in den Normaltypus $p_2 d_2$ und einen diesen einschließenden weiteren Typus $\pm \frac{(1), 24}{15}$ auflösen läßt.

Tabelle 16.

Komp. Nr.	Polar. beob.	Intens. beob.	λ beob.	Typus $p_2 d_2$ f. 2767,913 Å.-E. berechn.	Typus $\frac{(1), 24}{15}$ für 2767,832 berechn.
1	2	3	4	5	6
9	σ	$^1/_2$	2768,101		2768,095
8	σ	9	8,049	2768,028	
7	σ	4	8,005	8,011	
6	π	10	7,941	7,922	
5	π	3	7,904	7,904	7,891
4	π	10	7,874		7,873
3	σ	3	7,796	7,815	
2	σ	8	7,777	7,798	
1	σ	$^1/_2$	7,680		7,670

Ohne Rücksicht auf den Grad der Genauigkeit der Beobachtung in Spalte 4 bleibt die Deutung des Typus in Spalte 5 und 6 ungewiß. Dies liegt in der Natur solcher aus unmagnetischen Feinstrukturen entstandenen Verwandlungstypen und beweist im vorliegenden Falle nichts gegen die Richtigkeit der Serieneinordnung der Linie Tl 2767,87 Å.-E. als Termkombination $p_2 d_2$, noch auch gegen die Richtigkeit und Allgemeingültigkeit des im vorangehenden abgeleiteten Zeemantypus

Tabelle 17.

Perot u. Fabry[1])			Verfasser		
Intens. beob.	λ Å.-E. beob.	$\delta\nu_{vak.}$	Intens. beob.	λ Å.-E. beob.	$\delta\nu_{vak.}$
8	5352,184	0,595	3	3776,888	0,402
3	2,014	0,140	d? 10	6,830	0,710
10	1,974		8	6,729	

1) Zitiert nach H. Kayser, Spektroskopie. 6. S. 715.

dieser Termkombination. Als Beispiel hierfür kann auf das Grundglied der Hauptserie und II. Nebenserie des Tl 5350 Å.-E. ($1{,}5\,s - 2\,p_1$) und 3775 Å.-E. ($1{,}5\,s - 2\,p_2$) Bezug genommen werden. Für die erste Linie ist das Vorhandensein einer Feinstruktur mehrfach beobachtet worden, für die zweite Linie scheinen gleichwertige Beobachtungen nicht vorzuliegen. Tab. 19 stellt die Feinstrukturen beider Linien nebeneinander.

Obwohl die Schwingungsdifferenzen der Feinstrukturkomponenten beider Linien von gleicher Größenordnung sind, verhalten sich die beiden Linien im Magnetfeld verschieden. Die Linie 5350 Å.-E. gibt in Feldern > 30 Kgs einen durchaus reinen D_2-Typus ohne Störung.[1]) Die zweite Linie sollte einen D_1-Typus $\left(\pm \frac{(2)\,4}{3}\right)$ im Magnetfeld ergeben. In Wahrheit ist der Typus viel komplizierter. Bild 7 der Taf. I der Vergrößerungen zeigt die Linie 3775 Å.-E. Tl in IV. Ordnung, und zwar unten ohne Magnetfeld, oben mit Magnetfeld (38 Kgs), nach rechts wachsen die Wellenlängen. Obwohl eine deutliche Beziehung zum D_1-Typus in dem Bilde qualitativ zu erkennen ist, ist er quantitativ in dem Bilde nirgends exakt vorhanden, also jedenfalls beträchtlich gestört.[2]) Dennoch wird man weder die Klassifizierung dieser Linie als Termkombination $1{,}5\,s - 2\,p_2$, noch die Allgemeingültigkeit des Zeemantypus dieser Termkombination als $\pm \frac{(2)\,4}{3}$ in Zweifel ziehen. Gleiches gilt also auch für die hinsichtlich ihres Zeemantypus nicht genau regulär gefundene Linie Tl 2767,87 Å.-E.

Ähnliche Verhältnisse wie bei dem Grunddublet des Tl finden sich nach den Aufnahmen des Verfassers bei dem homologen Dublet des Cu 3247 und 3274 Å.-E. ($1{,}5\,s - 2\,p_1$ und $1{,}5\,s - 2\,p_2$). Auch diese Linien zeigen eine Feinstruktur ohne Magnetfeld, bezüglich deren gleichfalls anderweitige ähnliche Beobachtungen noch nicht vorzuliegen scheinen (vgl. Tab. 18).

---

1) Übereinstimmend hiermit ist die Beobachtung von C. Runge u. F. Paschen, a. a. O., S. 4.

2) C. Runge u. F. Paschen finden auf einer Aufnahme senkrechter Polarisation außer den 4 Zeemankomponenten des D_1-Typus noch 2 weitere schwächere, also 6 im ganzen; die Vergrößerung (Bild 7) zeigt 7 Komponenten.

Tabelle 18.

Intens. beob.	λ Å.-E. beob.	$\delta\nu_{vak.}$	Intens. beob.	λ Å.-E. beob.	$\delta\nu_{vak.}$
5	3248,499		6	3274,914	
		0,333			0,227
10	8,463		6	4,890	
		0,317			0,218
6	8,430		6	4,867	
					0,175
			4	4,848	

Im Magnetfeld > 30 Kgs zeigen beide Linien keine merkliche Abweichung von den *D*-Typen, es sei denn, daß man die auch im Vakuum beträchtliche Breite der Zeemankomponenten als solche betrachtet. Alle Vakuumaufnahmen des Verfassers zeigen diese gleiche Feinstruktur der beiden Cu-Linien, ein Einstellungsfehler oder Einfluß des remanenten Magnetismus ist ausgeschlossen, weil alle andern auf den gleichen Platten miterschienenen Linien, wie z. B. Zn 3288,28 oder 3302,56 und 3302,91 Å.-E. immer durchaus einfach und scharf sind.[1])

In den für obige Messungen hergestellten Ba-Aufnahmen des Verfassers ist erstmalig eine Linie der Bergmannserie der Triplets in ihrer magnetischen Feinstruktur meßbar erschienen. Es ist dies die Linie des Ba 3909,92 Å.-E. $(3\,d_3 - 4\,b_3)$. Die Messung ergibt bei einer Feldstärke von 41472 Gauss die in Tab. 19 angegebenen Werte.

Der Abstand von Komponente 9 und 1 von der Mitte ist $\delta\lambda = 0{,}2485$ Al, also $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2 H} = 3{,}919 \cdot 10^{-5}$, während $5a/6 = 3{,}915 \cdot 10^{-5}$ ist. Der mittlere Abstand der σ-Komponenten unter sich ist 0,050 Å.-E., der mittlere Abstand der

1) Ein so neuartiger Befund an diesen vielseitig studierten Linien erregt natürlich Zweifel an der Realität dieser Feinstruktur. Man möchte an komplizierte Selbstabsorptions- oder Solarisationserscheinungen denken. Hiergegen spricht das unveränderte Aussehen der Feinstruktur bei schrittweiser Herabsetzung der Cu-Dampfdichte bis zu verschwindender Intensität der Linien. Dagegen bringt Steigerung der Cu-Dampfdichte über ein gewisses Maß die Feinstruktur in einer breiten Umkehrung zum Verschwinden. Die Dopplerbreite würde bei 3300° abs. ungefähr zu 0,02 Å.-E. sich berechnen, ist also mit dem Feinstrukturbefund verträglich.

Tabelle 19.

Komponente Nr.	Polarisation beob.	Intensität beob.	λ Å.-E. beob.	Differenz $\delta\lambda$
9	σ	8	3910,163	
				47
8	σ	4	10,116	
				42
7	σ	1	10,074	
				100
6	π	9	9,974	
				49
5	π	10	9,925	
				52
4	π	9	9,873	
				97
3	σ	1	9,776	
				51
2	σ	4	9,725	
				59
1	σ	9	9,666	

π-Komponenten unter sich ebenfalls 0,050 Å.-E., demnach $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2 H} = 0{,}788 \cdot 10^{-5}$, während $a/6 = 0{,}788 \cdot 10^{-5}$ ist. Also ist der beobachtete Typus $\pm \frac{(0)\,(1)\,3,4,5}{6}$ mit den in Tab. 19 angegebenen Intensitäten. Dieser Typus stimmt sowohl nach den Komponentenlagen wie nach dem Intensitätsverlauf mit dem aus Hrn. Landés extrapolatorisch gewonnenen Tabellen der Termaufspaltungen abgeleiteten Typus überein und liefert damit einen neuen Beweis für die Richtigkeit des von Hrn. Landé angegebenen Schemas der Termaufspaltungen und seiner Intensitätsregeln.

2. Die Typen der Termkombinationen $p_1 d$ der Dublets.[1] (Vereinfachte I. Nebenserie der Dublets mit nichtmultiplem d-Term.)

Prototyp: Na 5688,04 Å.-E. $2\,p_1 - 4\,d$
5682,68 Å.-E. $2\,p_2 - 4\,d$.

Der Zeemaneffekt dieser Linien oder homologer scheint bisher noch nicht beobachtet zu sein. Die beiden Linien

1) Die Typen der Termkombination $p\,d$ der *Triplets* (vereinfachte I. Nebenserie der Triplets), deren Prototyp die Mg-Linien 3838,290 ($2\,p_1 - 3\,d$), 3832,300 ($2\,p_1 - 3\,d$), 3829,356 ($2\,p_2 - 3\,\delta$) sind, wurden erst

sind nur bei kleinem Druck und geringer Dampfdichte des Na ausreichend scharf. Die Beobachtung im Magnetfeld ergibt:

Tabelle 20.

Komponente Nr.	Intensität beob.	Polarisation beob.	λ Å.-E. beob.	Differenz $\delta\lambda$
7	5	σ	5688,670	
				174
6	2	σ	8,496	
				214
5	4; 1	π σ	8,282	
5688,04				211
Å.-E. 4	10	π	8,071	
$p_1 d$				269
3	4; 1	π σ	7,802	
				193
2	2	σ	7,609	
				222
1	5	σ	7,387	
4	5	σ	5683,103	
				202
5682,68 3	2	π	2,901	
Å.-E.				443
$p_2 d$ 2	2	π	2,468	
				210
1	5	σ	2,258	

mals von W. Miller (Ann. d. Phys. 24. S. 112f. u. 135. 1907) angegeben. Wegen der Bedeutung, die sie neuerdings in theoretischer Hinsicht gewonnen haben (vgl. die Behandlung des Gegenstands durch Hrn. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. 3. Aufl. S. 494f.), schien eine Nachprüfung der Ergebnisse Millers erwünscht. Sie ist vom Verfasser kurz angegeben in „Naturwissenschaften". H. 12. 1921. S. 201. Die Millerschen Angaben bedürfen danach hinsichtlich Komponentenzahl und Intensitätsverlauf einer Berichtigung. Nach den Aufnahmen des Verfassers sind die Typen folgende:

$$p_1 d \quad \pm \frac{(0)_{10}\,(1)_{10}\,(2)_7\,0_4\,1_7\,2_9\,3_7\,4^1/_2}{2},$$

$$p_2 d \quad \pm \frac{0_{10}\,(1)_{10}\,1_8\,(2)_9\,3_5\,4_1}{2},$$

$$p_3 d \quad \pm \frac{(0)_7\,0_{10}\,(2)_7\,2_5\,4_1}{2}.$$

Die Indizes an den Ziffern der Zähler bedeuten die relativen Intensitäten. Den Beweis dafür, daß diese Typen allgemeingültig sind, also ein vollendeter partieller Paschen-Backeffekt im Sinne der Theorie von Hrn. Sommerfeld vorliegt, kann man darin sehen, daß das nächste Glied 3097,06; 93,14; 91,18 ($2p_1 - 4d$) genau den gleichen Typus zeigt.

Für den Typus 5688,04 folgt als mittlerer Komponentenabstand $\delta\lambda = 0{,}208$ Å.-E., also $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2 H} = 1{,}55 \cdot 10^{-5}$, während $a/3 = 1{,}566 \cdot 10^{-5}$ ist. Mithin ist der Typus: $\pm \frac{(0)\,(1)\,1,\,2,\,3}{3}$ mit den in Tab. 20 angegebenen Intensitäten.

Für den Typus 5682,68 folgt als mittlerer Komponentenabstand $\delta\lambda = 0{,}210$ Å.-E., also $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2 H} = 1{,}562 \cdot 10^{-5}$ gegenüber $a/3 = 1{,}566 \cdot 10^{-5}$. Demnach ist der Typus: $\pm \frac{(1)\,2}{3}$. Es ist bemerkenswert, daß aus diesem Typus durch Multiplikation mit 2 der Typus D_1 $\left(\pm \frac{(2)\,4}{3}\right)$ hervorgeht.

Tübingen, Physikalisches Institut der Universität,
16. September 1922.

Nach den Angaben von Miller wären die Typen folgendermaßen zu schreiben:

$$p_1\,d \quad \pm \frac{(0)_3\,(1)_2\,1_2\,2_2\,3_2}{2},$$

$$p_2\,d \quad \pm \frac{(1)_4\,(2)_1\,0_4\,1_4\,3_1}{3},$$

$$p_3\,d \quad \pm \frac{(0)_3\,(2)_4\,0_3\,2_4\,4^1/_2}{2},$$

was mit den Aufnahmen des Verfassers nicht in Einklang steht.

(Eingegangen 25. September 1922.)

2. *Über Lichtbrechung an Gasen im Sichtbaren und Ultrarot (6,76 μ) und Bestimmung der Kalkspateigenschwingung bei 6,76 μ;*

von Martin Busch.

(Auszug aus einer gleichnamigen Breslauer Dissertation.)

§ 1. Im Hinblick auf die in letzter Zeit unternommenen Versuche[1]), eine Dispersionstheorie auf Grund der Quantenhypothese auszuarbeiten, schien es wünschenswert, etwaige Lücken in der Reihe der Lichtbrechungsmessungen auszufüllen. Während für das sichtbare und ultraviolette Spektralgebiet viele — nach mancherlei Methoden ausgeführte — Arbeiten[2]) vorliegen, sind für das Ultrarot nur zwei[3]) erschienen; diese geben jedoch aus folgenden Gründen zur Kritik und zur Wiederholung der Messungen Anlaß:

§ 2. Einmal ist die von J. Koch angewandte Methode zur Bestimmung der Wellenlänge (ein eleganter Ersatz des Michelson) nur für scharfe symmetrische Spektrallinien gültig; bei breiten, unsymmetrischen Reststrahlgebieten, wie dem des Kalkspats, verursacht die Dispersion der zur Erzeugung des Gangunterschiedes benutzten Steinsalzplatten einen Fehler in der Wellenlänge.

Ferner läßt J. Koch die — experimentell erst in vorliegender Arbeit festgestellte — Abhängigkeit der Kalkspateigenschwingung von der Temperatur der Reststrahlplatten unberücksichtigt. Während er nämlich bei der Wellenlängenbestimmung die Reststrahlplatten diskontinuierlich bestrahlt,

1) P. Debye, Münch. Ber. Math. Phys. Kl. S. 1. 1915; A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 53. S. 538 u. 541. 1917; Cl. Schaefer, ebenda. 67. S. 407. 1922.; R. Gans, Zeitschr. f. Phys. 9. S. 81. 1922.

2) Vgl. z. B. St. Loria, Lichtbrechung in Gasen. Braunschweig 1914; W. Traub, Ann. d. Phys. 61. S. 533. 1920; M. Kirn, Ann. d. Phys. 64. S. 566. 1922.

3) J. Koch, Ann. d. Phys. 17. S. 658. 1905 u. Nov. Act. Reg. Soc. Scient. Upsal. Ser. IV. 22. Nr. 5.

sie also praktisch auf Zimmertemperatur hält, beobachtet er bei den Lichtbrechungsmessungen das Vorbeiwandern der Interferenzstreifen bei dauernder Bestrahlung der Platten, die daher eine höhere Temperatur annehmen. Zur Berechnung des Brechungsquotienten verwendet er aber den für Zimmertemperatur geltenden Wert der Wellenlänge an Stelle des bei höherer Temperatur benutzten.

Endlich zeigt die Dispersion von O_2 und Luft[1]) nach den Kochschen Werten ein außerhalb der sonstigen Fehlergrenzen liegendes Wiederansteigen des Brechungsquotienten innerhalb des Gebietes von 6,7 bis 8,7 μ. (J. Koch erwähnt diese Anomalie gar nicht und vernachlässigt sie auch bei einer späteren Extrapolation.)[2])

§ 3. Es war also von Interesse, zu entscheiden, ob diese Anomalie durch die erwähnten Mängel der Methode oder durch das Vorhandensein einer optisch aktiven ultraroten Eigenschwingung der Gase bedingt ist. Hierzu mußte eine exakte Methode für Lichtbrechungsmessungen im Ultrarot ausgearbeitet und die nach ihr erhaltenen Resultate mit den Kochschen verglichen werden.

Als Versuchsgase wurden Luft und Argon gewählt. Luft läßt keinen in Betracht kommenden Fehler durch chemische Verunreinigungen[3]) erwarten, so daß ein Vergleich möglich ist. Der im wesentlichen zweiatomigen Luft sollte ein einatomiges Gas entgegengestellt werden; es wurde Argon gewählt, einmal, weil die bisher vorliegenden Lichtbrechungsmessungen im Sichtbaren erhebliche Unterschiede aufweisen und das Gas im Ultrarot noch nicht untersucht ist; dann, weil gerade Argon durch seine Ausnahmestellung[4]), die C. Ramsauer

1) Auch für H_2 gilt dasselbe, wenn man die erste Arbeit J. Kochs (1905) mit heranzieht.

2) J. Koch, Ark. f. Math. Astr. och Fis. 8. S. 24. Nr. 20. 1912.

3) J. Koch erklärt z. T. die Verschiedenheit der Werte für die Brechungsquotienten von H_2 und O_2 in seinen Arbeiten (1905) und (1909) durch chemische Verunreinigungen (vgl. S. 672. 1905 und S. 34. 1909).

4) Bei Gasen ist im allgemeinen die Abhängigkeit des spezifischen Absorptionsvermögens langsamer Kathodenstrahlen von der Strahlgeschwindigkeit gering, wie Messungen an H_2, CO_2 und N_2 zeigen; die Absorption steigt bei diesen Gasen mit langsamer werdender Geschwindigkeit, während Argon ein starkes Absorptionsmaximum aufweist und ganz langsame Kathodenstrahlen fast vollständig durchläßt.

und H. F. Mayer[1]) festgestellt haben, ein gesteigertes Interesse hervorruft.

Als Interferenzapparat wurde der Michelsonsche benutzt; bei ihm wird die Streifenwanderung durch Spiegelverschiebung in Luft bewirkt, deren Dispersion keinen merklichen Fehler hervorrufen kann. Leider absorbiert Flußspat, aus dem die prächtige Optik des Michelson bestand, bei 8,7 μ bereits kräftig; daher mußte vorläufig auf die Brechungsmessung bei 8,7 μ verzichtet werden.

Bestimmung der Wellenlänge der Kalkspateigenschwingung bei 6,7 μ.

§ 4. Die Strahlen eines Nernstfadens N (Fig. 1) wurden durch einen Hohlspiegel S_1 (Brennweite 17 cm) parallel gemacht, gingen nach Reflexion an 4 Kalkspatplatten ($K_1 \ldots K_4$) durch den Interferenzapparat und wurden durch einen Hohlspiegel S_2 (Brennweite 37 cm) auf das Thermoelement Th geworfen; auf dieses fiel das Bild der Spiegel s_1 und s_2. Die Strahlen konnten vor der Reststrahlanordnung durch die Klappe L abgeblendet werden. An Stelle des Spiegels S_2 konnte ein Fernrohr gesetzt werden, um die Interferenzen im sichtbaren Licht zu beobachten. Alle Spiegel bestanden aus Glas und waren oberflächenversilbert. Der ganze Aufbau war durch doppelte Pappschirme mit Luftzwischenraum gegen Wärmestrahlung geschützt.

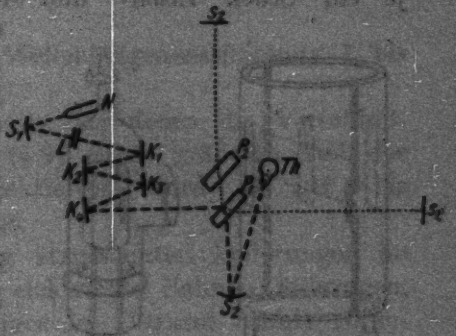


Fig. 1.

Bei dem von A. Hilger in London gebauten Michelsonschen Interferenzapparat waren beide Spiegel s_1 und s_2 auf Schlitten festgeschraubt. Der Schlitten von s_1 war mikrometrisch verschiebbar. Mit Hilfe einer mittels der grünen Hg-Linie aufgenommenen „Eichkurve der Spiegelverschiebung“

1) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 64. S. 513. 1921; H. F. Mayer, ebenda. S. 451.

konnte eine Änderung des Lichtweges mit einer Genauigkeit von 0,02 μ bewerkstelligt werden.

Als „Michelson-Platten" standen aus der Hauswaldschen Sammlung zwei wertvolle, glasklare, planparallele Flußspatplatten zur Verfügung; sie waren $55 \times 40 \times 4{,}714$ mm³ groß.

Als Energiequelle diente ein Nernstfaden, dessen Heizstrom 0,95 Amp. betrug und auf 0,01 Amp. konstant gehalten wurde.

Die Reststrahlplatten stammten von einem großen, gut ausgebildeten Kalkspatkristall; die Schnittflächen lagen $\perp$ zur optischen Achse, waren auf Hochglanz poliert und hatten eine Fläche von 35—40 cm².

Das Thermoelement war nach den Angaben von Johannsen[1]) gebaut; es bestand aus einer 10 mm langen, etwa 0,7 mm breiten und 0,01 bis 0,0125 mm dicken Silberfolie[2]), auf die je ein Stück Eisen- und Konstantandraht[3]) (0,015 und 0,0285 mm Φ) mit Tinol[4]) mittels erhitzten Glases als Kolben gelötet war. Eine Seite der Silberfolie wurde entweder vor dem Löten platiniert oder nach dem Einsetzen berußt. Das Element wurde in einem mit zwei seitlichen Öffnungen versehenen Messingzylinder (Fig. 2) so angebracht, daß die gegeneinander isolierten Hälften die leitende Verbindung zwischen den Steckkontakten (A_1 und A_2) und dem Thermoelement bildeten. Der Zylinder wurde in ein Vakuumgefäß aus Glas (Fig. 3) gesetzt, dessen Fenster F aus einer 2,6 mm dicken planparallelen Flußspatplatte bestand. Das Vakuum wurde mittels eines Volmerschen Quecksilberpumpenaggregats auf 10^{-5} bis 10^{-6} mm Hg-Druck gehalten, um gegen eine infolge eventueller Abgabe von Gasbläschen aus dem

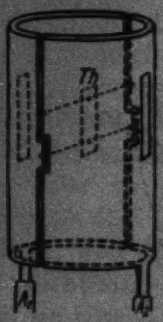


Fig. 2.

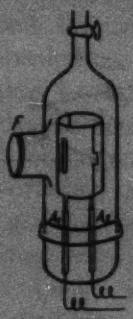


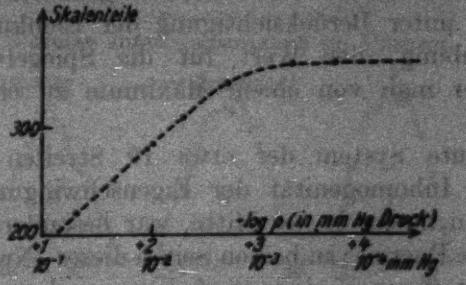
Fig. 3.

1) E. S. Johannsen, Ann. d. Phys. 33. S. 528. 1910.
2) von Sy und Wagner, Berlin.
3) von Hartmann und Braun, Frankfurt a. M., bezogen.
4) einer säurefreien Weichlot-Metallmasse.

Kittlack eintretende plötzliche Verminderung der bereits bei 5×10^{-4} mm erreichten maximalen Empfindlichkeit (vgl. Kurve 1) sicher zu sein.

Die Empfindlichkeit des zur Messung der Thermoströme benutzten Panzergalvanometers nach Du-Bois-Rubens war

Empfindlichkeit des Thermoelementes bei verschiedenen Drucken.



Kurve 1.

bei 4,5 m Skalenabstand zur Wellenlängenbestimmung 1 bis 2×10^{-9} Amp. pro Skt.

Bei den Brechungsmessungen, bei denen die Verschlußplatten der Refraktionsrohre (§ 8) einen größeren Teil der Energie absorbierten und reflektierten, wurde sie auf 5 bis 6×10^{-10} Amp. pro Skt. erhöht.

Trotz doppelter Panzerung verursachten Änderungen im Stromnetz des Institutes und elektrische Bahnen Störungen, die dazu zwangen, alle Messungen im Ultrarot nachts vorzunehmen.

§ 5. Zählt man am Michelsonschen Interferenzapparat in monochromatischem Licht die „Streifen gleicher Dicke", die — infolge einer Veränderung des Lichtweges $P_1 s_1$ (Fig. 1) durch Spiegelverschiebung — an einer festen Marke im Fernrohr oder am Thermoelement vorbeiwandern, so erhält man, wenn λ die Wellenlänge, s die Spiegelverschiebung und n die Anzahl der vorbeigewanderten Streifen bedeutet, die Wellenlänge[1]) aus der Beziehung:

$$\lambda = \frac{2s}{n} \quad (1)$$

1) Eine Korrektion auf Vakuum ist hier nicht mehr anzubringen, da diese bei der „Eichkurve der Spiegelverschiebung" bereits vorgenommen war und die Dispersion der Luft zwischen 546 und 6763 μ nicht berücksichtigt zu werden braucht, da der durch sie bedingte Fehler kleiner als 0,01% ist.

Zur Messung[1]) des Schwerpunktes der Kalkspateigenschwingung waren die Spiegel s_1 und s_2 so justiert, daß die Interferenzstreifen gleicher Dicke parallel zu dem vertikal aufgestellten Thermoelement lagen; dann wurde der Spiegel s_1 um 0,1 bis 0,5 μ verschoben und der zu jeder Spiegelstellung gehörende Galvanometerausschlag gemessen. Trägt man jene als Abszisse, diesen als Ordinate auf, so ergibt sich eine Kurve, aus der man, unter Berücksichtigung der Eichkurve für die Spiegelverschiebung, den Wert für die Spiegelverschiebung erhält, mit der man von einem Maximum zu einem andern gelangt.

Das gesamte System der etwa 19 Streifen zeigte entsprechend der Inhomogenität der Eigenschwingung folgendes Bild: Einer von ihnen, in der Mitte, war besonders scharf und hatte die größte Energie; zu beiden Seiten dieses „Nullstreifens“[2]) wurden die Interferenzen immer niedriger und unschärfer und wiesen ihrer Struktur nach auf zahlreiche Teilmaxima in der Energieverteilung der Reststrahlen[3]) hin.

Kurve 2 zeigt einen Ausschnitt aus dem System: die Zahlen $m = \pm 3, \pm 4, \pm 5$ geben an, das wievielte (Haupt-) Maximum vom Nullstreifen aus gerechnet, dargestellt ist; durch das Vorzeichen sind die beiden Seiten unterschieden.

§ 6. Bei der Auswertung der Kurven wurde jedesmal über die Teilmaxima weggezeichnet, um die höchste Erhebung des Gesamtmaximums und die zu ihr gehörende Abszisse festzustellen. Die Spiegelverschiebung zwischen zwei entsprechen-

---

1) Zunächst wurde versucht, mit den zur Verfügung stehenden Michelson-Platten, die anfangs ungleich dick waren, zu arbeiten; es gelang zwar, die hier auftretenden Komplikationen *für einfache Spektrallinien* experimentell zu verfolgen und theoretisch zu errechnen, wobei an Stelle der Phasengeschwindigkeit die Gruppengeschwindigkeit gesetzt werden muß (vgl. gleichnam. Bresl. Diss. und Rayleigh, Phil. Mag. 8. S. 330. 1904); da jedoch das an Teilmaximen reiche Reststrahlgebiet mit diesen Platten nicht aufgelöst werden konnte, mußte die dickere Platte der andern gleichgeschliffen werden.

2) Der Gangunterschied beider Lichtwege ist im Maximum dieses Streifens = 0.

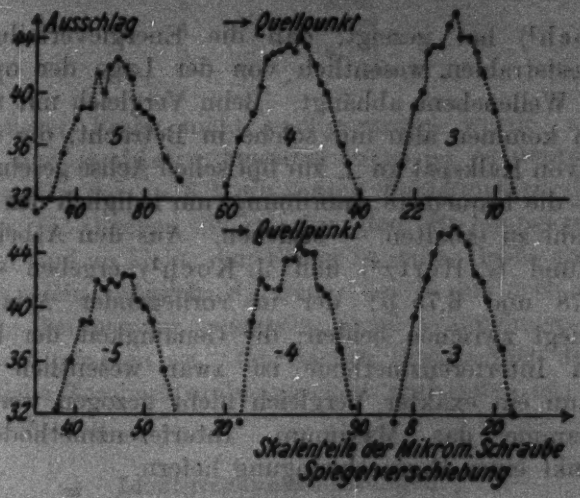
3) In einer noch unveröffentlichten Marburger Dissertation: „Oberschwingungen in ultraroten Absorptionsspektren“, 1922, gelang es Hrn. M. Thomas, 7 bis 8 Teilmaxima in dieser Kalkspateigenschwingung nachzuweisen.

den Maximis $\pm$ z. B. z_m zwischen den Maximis $+5$ und -5 — wurde in die (hier mit dem Index m versehene) Formel 1, § 5

$$\lambda_m = \frac{2z_m}{2m}; \quad 2m = n \tag{1a}$$

eingesetzt. Für verschiedene m ergaben die Messungen verschiedene Werte λ_m, die jedoch nicht den von J. Koch[1])

Einzelne Interferenzmaxima im Ultrarot.



Kurve 2.

angegebenen Gang zeigen, sondern eine der Energieverteilung der Reststrahlen entsprechende Unregelmäßigkeit aufweisen, wie aus Tab. 1 hervorgeht; es sind die Ergebnisse der drei

Tabelle 1.

2 m	1. Meßreihe	2. Meßreihe	3. Meßreihe	Mittel	δ
2	6760	6780	6740	6760	$\pm$ 12
4	6785	6735	6770	6763,3	15
6	6763	6737	6737	6745,7	9
8	6768	6755	6748	6757	6
10	6782	6780	6778	6782	3
12	6762	6761	6762	6761,7	1
14	6761	6763	6764	6762,7	2

1) J. Koch, Nov. Act. Reg. Soc. Scient. Upsal. Ser. IV. 22. Nr. 5.

Meßreihen, das Mittel daraus und der *mittlere* Fehler des Mittels angegeben. (Trotz der Flachheit der „äußeren" Maxima bewirkt die größere Streifenanzahl eine größere Genauigkeit für höhere m-Werte.)

Als Mittelwert für den *Schwerpunkt der Kalkspateigenschwingung* ergibt sich

$$\lambda_K = \frac{\Sigma(m \cdot \lambda_m)}{\Sigma m} = 6763{,}2\,\mu\mu \pm 0{,}4\,.$$

J. Koch[1]) hat gezeigt, daß die Energieverteilung der Kalkspatreststrahlen wesentlich von der Lage der optischen Achse zur Wellenebene abhängt. Beim Vergleich mit früheren Messungen kommen also nur solche in Betracht, die sich auf Reflexion von Kalkspat an $\perp$ zur optischen Achse geschnittenen Platten — die bequemste Anordnung, um lediglich den ordentlichen Strahl zu erhalten — beziehen. Aus den Arbeiten von Rubens und G. Hertz[2]) und J. Koch[1]) ergeben sich die Werte 6,78 und 6,75 μ; der in vorliegender Arbeit festgestellte liegt zwischen beiden; die Genauigkeit der hier angewandten Interferenzmethode ist zwar wesentlich größer; jedoch kann ein exakter Vergleich nicht gezogen werden, da Spektrogramme das Maximum, Interferenzmethoden den Schwerpunkt einer Eigenschwingung liefern.

§ 7. Entgegen den Erwartungen[3]), die sich an die Arbeit von Rubens und G. Hertz[2]) knüpften, konnte der *Einfluß der Temperatur der Reststrahlplatten auf die Eigenschwingung des Kalkspates* nachgewiesen werden und zwar dadurch, daß die Strahlen des Nernstbrenners statt vor K_1 (Fig. 1) erst hinter K_4 abgeblendet wurden. Jeder einzelne der Mittelwerte aus den in dieser Weise erhaltenen 5 Meßreihen[4]) war größer als der in § 6 berechnete Mittelwert für Zimmertemperatur

1) J. Koch, Ark. f. Math. Astr. och Fys. 7. Nr. 9. 1912.

2) Rubens und G. Hertz, Sitz.-Ber. d. Berl. Akad. S. 259. 1912.

3) Während also Rubens und Hertz[2]) mit prismatischer Zerlegung keine Abhängigkeit der Kalkspateigenschwingung von der Temperatur der Reststrahlplatten im Intervall von − 191° bis + 15° feststellen konnten, liefert die Interferenzmethode in einem kleineren Gebiet (etwa 40° C) ein deutliches Wachsen der Wellenlänge des Schwerpunktes mit zunehmender Erwärmung der Reststrahlplatten.

4) Die zeitlich vor den in § 6, Tab. 1 angeführten liegen.

und zwar um so größer, je länger die Reststrahlplatten vor der Messung bestrahlt wurden. Tab. 2 gibt diese 5 Mittelwerte an.

Tabelle 2.

Serie	λ_{Mittel}
1	6,802 μ
2	6,779 „
3	6,801 „
4	6,822 „
5	6,783 „

Da dieser Frage nicht nachgegangen wurde, kann das Ergebnis nur qualitativ bewertet werden; es deutet jedoch auf die zweite der in § 2 erwähnten Fehlerquellen J. Kochs hin. Die Kochschen Werte für den Brechungsquotienten bei 6,709 μ sind zu klein; den Fehler in seiner Größe anzugeben, ist jedoch nicht möglich, da weder bei Koch noch in dieser Arbeit die Temperatur gemessen, noch anzunehmen ist, daß sie konstant gewesen sei. Ob bei den Reststrahlen des Gipses eine ähnliche Temperaturabhängigkeit vorhanden ist, ist noch nicht entschieden.

Lichtbrechungsmessungen.[1])

§ 8. Für die Brechungsmessungen wurde die (wohl von Loria und Patkowski[2]) zum ersten Male angegebene) „Druckänderungsmethode" gewählt, da diese den Vorzug eines geringen Gasbedarfes mit bequemer Handhabung vereinigt. Zu dieser Methode gibt Loria[3]) für die Berechnung des Brechungsquotienten die Formel

$$(2) \qquad \nu_0 - 1 = \frac{n \cdot \lambda}{L \cdot \Delta p} \cdot 760 \cdot (1 + \alpha t)$$

an; sie ist unter Voraussetzung der Gültigkeit der Gladstone-Daleschen Formel" $\frac{\nu - 1}{d} = \text{konst.}$ (d = Dichte) und der idealen Gasgleichung hergeleitet.

1) Bei den Messungen unterstützten mich Frl. cand. phil. E. Haberland und Hr. cand. phil. B. Quarder, denen für ihre geschickte Hilfe auch an dieser Stelle mein bester Dank ausgesprochen sei.

2) Loria und Patkowski, Bull. de l'Akad. Crac. Okt. 1903. S. 494.

3) St. Loria, a. a. O. S. 25.

Es bedeuten:

r_0 den Brechungsquotienten bei 760 mm Hg-Druck und 0° C,
n die Zahl der vorbeigewanderten Streifen,
λ die benutzte Wellenlänge für Vakuum,
L die doppelte Länge der Gassäule im Rohr R_2 (Fig. 4).
Δp den auf 0° C und den 45. Breitengrad reduzierten Betrag der Druckänderung in mm Hg-Druck,
t die Temperatur des Gases in R_2,
α den Spannungskoeffizienten des Gases.

Zur Bestimmung von n im Sichtbaren wurden mit einer, an Stelle von S_2 (Fig. 1) eingefügten Linse die Michelsonspiegel s_1 und s_2 auf den Spalt eines Zeissschen Monochromators abgebildet; Spalt und Streifen waren parallel. Im oberen Teile des Gesichtsfeldes erschien das mit Streifen durchsetzte Spektrum, während in den unteren Teil mit einem totalreflektierenden Prisma die Spektrallinien, für die das n bestimmt werden sollte, hineingeworfen wurden.

Für das Ultrarot mußte eine kleine Umformung der Formel vorgenommen werden; denn da die Verschlußplatten der Röhren nicht gleich dick waren (§ 8), war nach Einsetzen der Röhren die Energieverteilung des Interferenzsystems infolge der Inhomogenität der Reststrahlen verändert; es wurde also infolge der Verschiedenheit der Lichtwege ein wenn auch nur um geringes, so doch meßbar falsches n und λ vorgetäuscht. So wurde nach Formel 1 für $n \cdot \lambda$ $2s$ eingesetzt und dieses $2s$ auf folgende Weise bestimmt. Nach Einsetzen der Röhren wurde das Interferenzsystem, soweit es zur Brechungsmessung in Frage kam, bei kommunizierenden Röhren neu durchgemessen („Eichkurve des Systems"). Vor Beginn der Druckänderung wurde der Anfang des Interferenzsystems durch Spiegelverschiebung aufgenommen, bis ein Maximum oder Teilmaximum mit dem entsprechenden der Eichkurve des Systems identifiziert werden konnte; dann bei fester Spiegelstellung der Druck variiert; endlich, auf die gleiche Weise wie am Anfang der Messung, festgestellt, welche Stelle des Streifensystems am Ende der Druckvariation auf das Thermoelement fiel. Aus diesen Messungen ergab sich unter Berücksichtigung der Spiegelverschiebung und der des Systems der Wert für die

doppelte Spiegelverschiebung $2s$, die dem der Druckänderung Δp entsprechenden Produkt von $n \cdot \lambda$ äquivalent war.

Als Spektrallinien im Sichtbaren wurden gewählt[1]):

Hg grün 5461,0 Å. Hg gelb$_2$ 5790,5 Å.
Hg gelb$_1$ 5769,5 Å. H_2 rot 6563,0 Å.[2])

Im Ultrarot wurde die im ersten Teile der Arbeit bestimmte Eigenschwingung des Kalkspates = 67632 Å. benutzt.

Die Druckänderung Δp, die durch Heben oder Senken des Quecksilbergefäßes B (Fig. 4) bei geschlossenen Hähnen 1, 3, 4 und bei geöffnetem Kapillarhahn 2 in dem Rohre R_2 bewirkt wurde, konnte mittels des Manometers M mikroskopisch auf 0,05 mm genau gemessen werden.

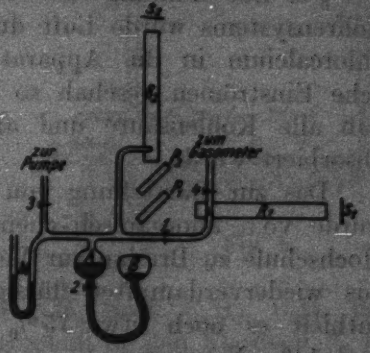


Fig. 4.

Die Verschlußplatten der Röhren bestanden aus planparallelen Flußspatplatten; die beiden an R_1 aufgekitteten waren zusammen 6,07 mm, die an R_2 6,22 mm dick. L ergab sich mit den Mitteln des Eichamtes gemessen zu 1052,8 mm.

Für α wurde der Spannungskoeffizient der Versuchsgase eingesetzt; zwar ergaben frühere Arbeiten [V. v. Lang[3]), Benoit[4]), Walker[5])], daß für α ein vom Spannungskoeffizienten etwas verschiedener Wert α^* angenommen werden müsse; jedoch weichen die Angaben für die Korrektion nicht nur der Größe, sondern sogar dem Vorzeichen nach von einander ab.[6])

1) Von einer weiteren Ausdehnung des Meßgebietes nach dem Violett hin wurde abgesehen, da eine Fortsetzung der Brechungsmessungen im Gebiet von Hg-grün bis ins Ultraviolett im gleichen Institut vorbereitet wird.

2) Eine mit etwas H_2 gefüllte Geißlerröhre mit Hg-Elektroden gab alle 4 Linien.

3) V. v. Lang, Wiener Ber. 49. II. 1874.

4) Benoit, Journ. d. Phys. 8. S. 451. 1889.

5) Walker, Phil. Trans. Roy. Soc. 201. S. 435. 1903.

6) Eine Klärung dieser Frage mußte einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben, da die Flußspatoptik zu wertvoll war, als daß sie bei Anwendung höherer Temperaturen der Gefahr des Springens ausgesetzt werden durfte.

Ein Fehler in n war bei $^1/_{10}$ Streifenbreite Genauigkeit in jeder Einzelmessung kleiner als 0,1%, in Δp kleiner als 0,05%, in dem Faktor $(1 + \alpha t)$ ebenfalls kleiner als 0,05%. Da die Fehler, die die Ergebnisse nur in einer Richtung beeinflussen konnten, wie Fehler in L, in λ, bei der Reduktion von Δp auf den 45. Breitengrad, auf weniger als 0,01% herabgedrückt waren, so muß für die Mittelwerte der Messungen die Fehlergrenze zu 0,02% angenommen werden.

§ 9. Zur Füllung des auf Hochvakuum ausgepumpten Röhrensystems wurde Luft durch konzentrierte Kalilauge und Chlorcalcium in die Apparatur eingelassen; das kontinuierliche Einströmen geschah so langsam, ($1^1/_2$ l in $^1/_2$ Stunde), daß alle Kohlensäure und aller Wasserdampf aus der Luft absorbiert wurde.

Das zur Darstellung von reinem Argon benutzte Rohgas wurde vom anorganisch-chemischen Institut der technischen Hochschule zu Breslau zur Verfügung gestellt. Als Rückstand aus wiederverdampfter flüssiger Luft bei Linde gewonnen, enthielt es noch etwa 15% Verunreinigungen (etwa 1% O_2 und 14% N_2).

Andere Edelgase konnten, wie eine Kombination ihrer Prozentgehalte in Luft[1]) mit ihren Siedepunkten ergab, die Brechungsmessungen an Argon nicht merklich stören.

§ 10. Zur Absorption von N_2 wurde ein Gemisch von Ca + 5% Ca_3N_2, das in einem verlöteten Eisenrohr in Hellglut miteinander verschmolzen war, benutzt. Diese Legierung absorbiert, so lange noch unangegriffenes Ca da ist, bei 850° C den Stickstoff vollständig.[2]) An das elektrisch heizbare Stickstoffabsorptionsrohr R_2 (Fig. 5), das in einem Drahtkästchen Stücken der Legierung enthielt, waren die anderen Reinigungsapparate angeschlossen. Durch zwei mit konzentrierter Kalilauge (F_1) und konzentrierter Schwefelsäure (F_2) beschickte Waschflaschen strömte das Rohgas aus dem Gasometer (G)

1) Gehlhoff, Phys. Ztschr. 14. S. 838. 1913.

2) Diese elegante Methode verdanke ich Hrn. Prof. Dr. O. Ruff, der sie mir noch vor Veröffentlichung (Otto Ruff und Helmuth Hartmann, Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie. 121. S. 167. 1922) zur Verfügung stellte. Hierfür sowie für die Überlassung des Rohargons sei auch an dieser Stelle der beste Dank ausgesprochen.

durch die Hähne (H_1 und H_2) in die Reinigungsapparatur (von H_2 bis H_8), die vorher bis auf die Flaschenreihe $H_2F_2 \cdots F_6H_5$ luftleer gepumpt war; dann wurde mit dem Heizen begonnen, wobei der durch Ausdehnung entstehende Überdruck bei geschlossenen Hähnen H_3 und H_7 durch Öffnen von H_8 ausgeglichen wurde. (H_3 war im weiteren Verlauf geschlossen, H_4 und H_5 dauernd geöffnet.) In R_1 befand sich hellglühendes Kupfer zur Sauerstoff-, in R_3 rotglühendes Kupferoxyd zur Wasserstoffabsorption. Da in der benutzten Legierung geringe Spuren von Phosphor und (allerdings nur bei einem nicht benutzten Vorversuche der Darstellung, offenbar durch ein Versehen beim Verlöten des Eisenrohres) Calciumcarbid nachgewiesen werden konnte, mußten außer CO_2 und H_2O (Verbrennungsprodukte in R_3) und NH_3 noch C_2H_2, C_2H_4 und PH_3 absorbiert werden. Dies geschah in den Flaschen F_2 bis F_6; F_2 enthielt konzentrierte Kalilauge, um Kohlendioxyd; F_4 Kupfersulfatlösung, um Phosphorwasserstoff; F_5 in konzentrierter Schwefelsäure gelöstes Vanadinsäureanhydrid, um Kohlenwasserstoffe; und F_6 konzentrierte Schwefelsäure, um Ammoniak und Wasserdampf zu absorbieren. Im U-Rohr P befand sich umsublimiertes — von niederen Oxyden freies — Phosphorpentoxyd. Das Gas wurde durch den Zirkulationsanbau (A, Z, H_6, H_7) bei geschlossenem H_3 in dauerndem Kreisen in der Richtung R_1, R_2, R_3, P, R_1 gehalten. Durch Heben (oder Senken) des Quecksilbergefäßes A bei entsprechend offenem H_7 und geschlossenem H_6 (oder umgekehrt) wurde das Gas nach R_1 gedrückt (oder aus P gesaugt). Der durch Absorption entstandene Unterdruck wurde durch Einlassen von neuem Rohgas ausgeglichen, bis keine Absorption mehr stattfand. Proben des Gases wurden in einer hinter H_8 angeschmolzenen, mit den Pumpen verbundenen Spektralröhre untersucht. Als spektral keine Verunreinigungen mehr zu beobachten waren, außer einer Spur von H_2, der offenbar in geringen Mengen von den Aluminiumelektroden festgehalten

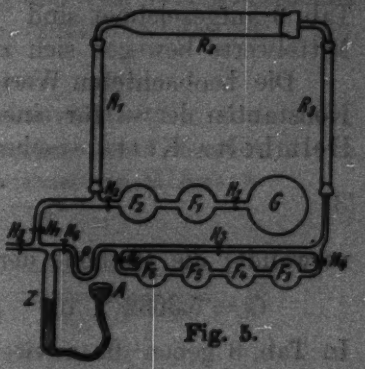


Fig. 5.

worden war, wurde nach etwa dreistündigem Zirkulieren das Argon in das auf Hochvakuum ausgepumpte Röhrensystem (Fig. 4, § 8) eingelassen.

Meßergebnisse.

§ 11 *An Luft* wurden für jede Wellenlänge im Sichtbaren 12, im Ultrarot 9 Messungen angestellt, deren Ergebnisse in Tab. 3 aufgezeichnet sind Die wahrscheinlichen Fehler dieser Mittelwerte bewegen sich zwischen 0,5 und 0,7.

Die beobachteten Werte wurden zur Berechnung der zwei Konstanten der — für eine Eigenschwingung spezialisierten — Helmholtz-Kettelerschen Formel:

$$(3) \qquad \nu_0 - 1 = \frac{C}{n_0^2 - n^2}$$

verwandt; die Methode der kleinsten Quadrate ergab:

$$C = 5{,}3682 \times 10^{27}; \qquad n_0^2 = 18537 \times 10^{27}.$$

In Tab. 3 geben die zweite und dritte Spalte die den Wellenlängen in Spalte 1 zugeordneten Brechungsquotienten an, die durch Beobachtung bzw. Berechnung erhalten wurden; Spalte 4 zeigt die Differenz zwischen beobachteten und berechneten Werten.

Tabelle 3.

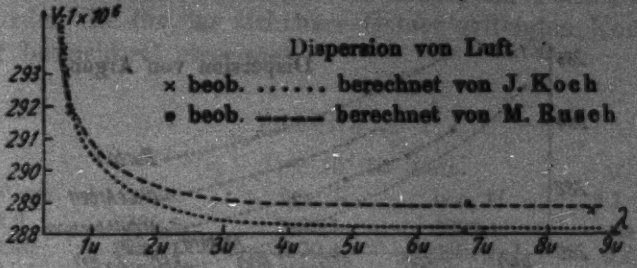
6763,2 $\times 10^{-7}$	2889,5 $\times 10^{-7}$	2889,1 $\times 10^{-7}$	$+ 4 \times 10^{-7}$
656,30 „	2920,0 „	2921,7 „	− 17 „
579,05 „	2931,6 „	2931,2 „	+ 4 „
576,95 „	2932,3 „	2931,5 „	+ 8 „
546,10 „	2936,5 „	2936,6 „	− 1 „

Tabelle 4.

Beobachter	Jahr	$(\nu_0 - 1)_D \times 10^7$
Walker	1903	2928
Scheel	1907	2916
Herrmann	1908	2939
Rentschler	1908	2924
Ahrberg	1909	2918
Cuthbertson	1909	2929
Kesseler	1909	2917
Koch	1909	2930
Loria	1909	2922
Gruschke	1910	2939
Posepjal	1917	2920
Traub	1920	2926
diese Arbeit	1922	2930

Zum Vergleich sind in Tab. 4 die seit 1900 gemessenen Werte für den Brechungsquotienten der Luft bei Natriumlicht zusammengestellt. Die Werte sind außer denen von Loria[1]), Posepjal[2]) und Traub[3]) aus dem Tabellenwerk Landolt und Börnstein, 4. Aufl., 1912. Der sich aus vorliegender Arbeit ergebende Wert stimmt mit denen von J. Koch und C. und M. Cuthbertson überein.

Kurve 3 zeigt die von J. Koch[4]) und dem Verf. gemessenen Werte und die durch die Formeln erhaltenen Kurven. Der



Kurve 3.

in dieser Arbeit gewonnenen Kurve paßt sich außer den Werten im Sichtbaren auch der für die Eigenschwingung des Gipses von Koch erhaltene an. Dieser Frequenzbereich ist aber wesentlich schärfer und einheitlicher als der des Kalkspates; die erste der im § 2 angeführten Fehlerquellen kommt kaum mehr in Betracht; aus dem Einpassen dieses Wertes aber in die Kurve läßt sich dann die Vermutung ziehen, bei Gips sei die Abhängigkeit der Eigenschwingung von der Temperatur der Reststrahlenplatten nicht so groß, daß sie bei der von J. Koch angewandten Methode beachtet zu werden braucht. Messungen hierüber fehlen jedoch noch.

§ 12. Die aus je 15 Einzelmessungen gemittelten Brechungsquotienten *für Argon* (die wahrscheinlichen Fehler sind 0,8 bis 0,4) sind in Tab. 5 (Spalte 2) und *Kurve 4* dargestellt.

Die Konstanten der Formel 8 (§ 11) ergeben sich zu:

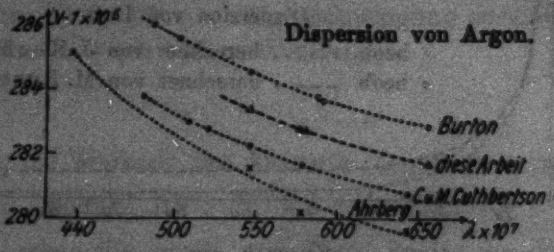
$$C = 4{,}216 \times 10^{27} \qquad n_0^2 = 15177 \times 10^{27};$$

1) St. Loria, Ann. d. Phys. **29**. S. 619. 1909.
2) V. Posepjal, Ann. d. Phys. **53**. S. 638. 1917.
3) W. Traub, Ann. d. Phys. **61**. S. 533. 1920.
4) J. Koch, Nov. Act. Reg. Soc. Scient. Upsal. Ser. IV. **22**. Nr. 5.

mit ihnen sind die berechneten Werte in Spalte 3 erhalten, während Spalte 4 die Abweichungen zwischen berechneten und beobachteten Werten angibt.

Tabelle 5.

6763,2	$\times 10^{-7}$	2778,0 $\times 10^{-7}$	2778,2 $\times 10^{-7}$	-2×10^{-5}
656,30	„	2817,6 „	2816,7 „	+ 9 „
579,05	„	2827,7 „	2827,9 „	− 2 „
567,95	„	2828,2 „	2828,3 „	− 1 „
546,10	„	2833,8 „	2834,2 „	− 4 „



Kurve 4.

Zum Vergleich sind aus den früheren Arbeiten von Burton[1]), Ahrberg[2]) und C. und M. Cuthbertson[3]) in Kurve 4 die Refraktionswerte im Sichtbaren und in Tab. 6 die von Cuthbertson berechneten Konstanten der 3 Arbeiten und die zugehörenden Werte von $(\nu_0 - 1)_{\lambda=\infty}$ zusammengestellt. In beiden sind die Resultate der vorliegenden Arbeit eingefügt. (*C* ist mit Cuthbertson verdoppelt, um einen Vergleich mit zweiatomigen Gasen anstellen zu können.) Unter „diese Arb. I" sind die ohne den ultraroten Wert berechneten Konstanten angegeben.

Tabelle 6.

Beobachter	$2C \times 10^{-37}$	$n^2_0 \times 10^{-27}$	$(\nu_0-1)_\infty 10^7$
Burton	9,124	16 335	2799
Ahrberg	7,437	13 516	2751
Cuthbertson	9,4326	17 009	2773
diese Arb. I	9,0042	18 348	2781
diese Arb. II	8,4321	15 177	2778

1) W. Burton, Proc. Roy. Soc. A. 80. S. 404. 1908.
2) Ahrberg, Dissertation. Halle 1909.
3) C. u. M. Cuthbertson, Proc. Roy. Soc. A. 84. S. 13. 1911.

Sieht man von Ahrberg ab, dessen Meßmethode nicht die nötige Genauigkeit liefert, so sind die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen wohl auf geringe Spuren von Verunreinigungen des schwer zu isolierenden Gases zurückzuführen. Die Dispersion ist in allen drei Arbeiten die gleiche.

§ 13. Die deutlich aus dem Bereich der wahrscheinlichen Fehler herausfallenden, wenn auch geringen, Abweichungen der Werte für die rote Wasserstofflinie gaben Veranlassung zur Untersuchung des Gültigkeitsbereiches der Formel 8 (§ 11). Es wurden die für das sichtbare Gebiet geltenden Konstanten (mit I bezeichnet) errechnet.

Tabelle 7.

$(\nu_0 - 1) \times 10^7$ für Luft

$\lambda \times 10^7$ cm	beob.	ber. I	ber. II	Δ I	Δ II
6763,2	2889,5	2883,1	2889,1	+ 6,4	+ 0,4
656,30	2920,0	2920,4	2921,7	− 0,4	− 1,7
579,05	2931,6	2931,3	2931,2	+ 0,3	+ 0,4
576,95	2932,3	2931,6	2931,5	+ 0,7	+ 0,8
546,10	2936,5	2936,7	2936,6	− 0,2	− 0,1

$(\nu_0 - 1) \times 10^7$ für Argon

$\lambda \times 10^7$ cm	beob.	ber. I	ber. II	Δ I	Δ II
6763,2	2778,0	2781,8	2778,2	− 3.8	− 0,2
656,30	2817,6	2817,5	2816,7	+ 0,1	+ 0.9
579,05	2827,7	2827,9	2827,9	− 0,2	− 0,2
576,95	2828,2	2828,2	2828,3	± 0,0	− 0,1
546,10	2833,8	2833,8	2834,2	± 0,0	− 0,4

Tabelle 8.

		Für Luft	
	$C \times 10^{-27}$	$n_0^2 \times 10^{-27}$	$(\nu_0 - 1)_\infty \times 10^7$
Diese Arbeit I	4,6756	16 219	2883
C. u. M. Cuthbertson[1]) . .	4,6463	16 125	2885
Diese Arbeit II	5,3632	18 537	2889

Aus dem Vergleich der Abweichungen Δ I und Δ II in der Tab. 7 ist zu ersehen, daß Formel 8 (§ 11) nur für ein kleines Gebiet die beobachteten Werte mit genügender Genauigkeit darstellt. Eine mehr oder minder experimentelle mehrkonstantige Formel zu versuchen, hat zurzeit wenig Interesse.

So sei zum Schluß nur noch auf eine Regelmäßigkeit

1) C. u. M. Cuthbertson, Proc. Roy. Soc. A. 83. S. 151. 1910.

hingewiesen, die in dem Größerwerden des Wertes $(\nu_{\lambda\to\infty}-1)$ für Luft mit nach dem Ultrarot hin verschobenem Meßbereich in Tab. 9 dargestellt ist.

Tabelle 9.

Forscher	Gebiet	$(\nu_{\lambda\to\infty}-1)\times 10^7$
Traub[1])	185—546 $\mu\mu$	2876
Cuthbertson	481—656 „	2885
Diese Arbeit	546—6763 „	2889

§ 14. *Zusammenfassung.* Es wird der Schwerpunkt des Kalkspateigenschwingungsgebietes zu $6763{,}2\times 10^{-7}$ cm bestimmt und qualitativ dessen Wachsen mit zunehmender Erwärmung der Reststrahlplatten festgestellt.

Im zweiten Teile wird der Brechungsquotient der Luft und des an Ort und Stelle gereinigten Argons mit Hilfe des Michelsonschen Interferenzapparates an 5 Stellen des Gebietes 546 bis 6763 $\mu\mu$ gemessen und festgestellt, daß das von J. Koch im Ultrarot gemessene Wiederansteigen der Dispersionskurve für Luft durch Fehler der Methode bedingt ist. Endlich wird gezeigt, daß die Formel $\nu_0 - 1 = \frac{C}{n_0^2 - n^2}$ nur in einem beschränktem Gebiet die beobachteten Werte wiedergibt.

Vorstehende Arbeit wurde im physikalischen Institut der Universität Breslau ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Geheimrat Prof. Dr. O. Lummer für Überlassung der Apparate und wohlwollendes Interesse, besonders aber Hrn. Prof. Dr. E. Buchwald für Anregung und viele wertvolle Ratschläge meinen besten Dank auszusprechen.

Danzig-Langfuhr, im Oktober 1922.

1) W. Traub, Ann. d. Phys. 61. S. 533. 1920.

(Eingegangen 30. Oktober 1922.)

3. *Über Leitfähigkeitserregung bei Hitzeaustreiben der Phosphore;* *von E. Rupp.*

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität zu Heidelberg.)

Die Untersuchungen der Herren Lenard und Saeland[1]) und neuerdings Gudden und Pohl[2]) über Leitfähigkeitsänderung bei Erregung der Phosphore durch Licht ließen vermuten, daß auch die Lichtemission der erregten Phosphorzentren mit einer Leitfähigkeitsänderung verbunden sein könnte, welche um so deutlicher in Erscheinung treten wird, je kürzer die Zeit des Abklingens, also je größer die Zahl der in der Zeiteinheit zurückkehrenden erregten Elektronen[3]) durch äußere Eingriffe (Austreiben des Phosphorlichtes durch Wärme, Ultrarot, elt. Feld) gewählt werden kann. Für den Fall des Ausleuchtens mit Ultrarot konnte auch von den Herren Gudden und Pohl[4]) bei ZnMn eine solche Leitfähigkeitserregung gefunden werden, während sie sich bei ZnCu und anderen Phosphoren nicht zeigte. Bei der besonders großen Ausleuchtung des ZnMn-Phosphors[5]) wird dieses Ergebnis verständlich, da nur bei ihm obige Forderung auf möglichste Verkürzung der Abklingungszeit sich leicht beim Ausleuchten erreichen läßt. Bei ZnCu hingegen tritt an Stelle der Ausleuchtung kräftige Tilgung[6]) ohne Lichtemission und damit das Fehlen nachweisbarer Leitfähigkeitsänderung.

1) Ann. d. Phys. 28. 1909. Vgl. auch F. Schmidt, Ann. d. Phys. 44. 1914. Diese Leitfähigkeitsänderung wurde von Hrn. Lenard in „Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht" III. S. 80. Heidelb. Akad. 1918 als „innere aktinodielektrische Wirkung" charakterisiert.

2) Zeitschr. f. Physik II. u. III. 1920.

3) Vgl. über den Mechanismus des Leuchtens der Phosphore: P. Lenard, Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht I. S. 7ff. Heidelberg. Akad. 1917.

4) Zeitschr. f. Physik III. 1920.

5) Vgl. „Ausleuchtung und Tilgung" III. S. 63.

6) ZnCu α zeichnet sich vor allen anderen Phosphoren durch stark ausgeprägte Tilgung aus. Vgl. „Ausleuchtung und Tilgung" III. S. 57.

Eine Leitfähigkeitserregung bei Austreiben des Phosphorlichtes durch Wärme wurde in den hier zu beschreibenden Versuchen in der Tat bei allen Phosphoren gefunden. Gleichzeitig wurde ihre Verknüpfung mit der Lichtemission eingehend untersucht.[1])

Zur Messung wurde der in ausgebreiteter Schicht voll durcherregte Phosphor in einen einfachen, auf einem Heizblech liegenden Plattenkondensator mit Glimmerisolation eingefüllt. An den Kondensatorplatten, deren obere mit einem kleinen Gewicht beschwert war, lag das variable Feld. Kondensator und Spannungsbatterie waren in Reihe geschaltet mit einem Drehspulgalvanometer von Hartmann & Braun (größte Empfindlichkeit bei 2,5 m Skalenabstand $2 \cdot 10^{-11}$ Wb., Schwingungsdauer 18 Sek.), das die bei der Erhitzung frei werdenden Elektrizitätsmengen — im folgenden kurz als Leitfähigkeitsänderung bzw. -erhöhung bezeichnet — ballistisch maß. Das Heizblech wurde bei aufgesetztem Kondensator durch Schmelzen geeigneter Stoffe geeicht; die Stärke des Heizstromes war so gewählt, daß auch die sehr langen Zentren in kurzer Zeit zur Austreibung kamen. Eine der ersten Messungen an CaCu α sei hier mitgeteilt, die auch über den Temperaturkoeffizienten der Leitfähigkeit des Phosphors Auskunft gibt. Das Feld betrug 80 Volt/cm. Die Schichtdicke war durch Auswägen bestimmt. Die angegebenen Ausschläge sind immer Erstausschläge, die Dauerausschläge der Ohmschen Leitfähigkeit lagen 2—3 Sk. unter den Erstausschlägen.

Man erkennt deutlich den geringen Anteil der durch Ohmsche Leitfähigkeit (6 Sk.) und durch den Temperaturkoeffizienten des Phosphormaterials (Ausschlag bei Heizung des ausgetriebenen Phosphors 11 — 6 = 5 Sk. bei Erhitzung von Zimmertemperatur bis ungefähr 440° C.) frei werdenden Elektrizitätsmengen gegenüber der durch Erhitzen des erregten

1) Eine Leitfähigkeitserregung bei Austreiben durch ein elektrisches Feld wurde bis jetzt noch nicht untersucht, ist aber aus dem Ergebnis vorliegender Untersuchung bestimmt zu erwarten, da die Leitfähigkeitsänderung sich als Funktion der Lichtemission des Phosphors erweist, unabhängig von der Art des Austreibens. Auch das normale Abklingen bei Zimmertemperatur wird mit einer der Schnelligkeit des Abklingens entsprechenden, jedoch bei ihrer Geringfügigkeit schwer zu messenden Leitfähigkeitsänderung verbunden sein.

Tabelle I. CaCu *a*.

Meßbedingungen		Ausschlag Sk.
Bei voll erregtem Phosphor:	ohne Feld: Nullstellung	0
	mit Feld	6
	erhitzt mit 8,2 Wb. (440° C)	122
Bei jetzt ausgetriebenem Phosphor:	Heizung abgeschaltet	5
	Heizung wieder angeschaltet w. o.	11
	ohne Feld mit Heizung	3
	ohne Heizung und ohne Feld . . .	0
Ohne Phosphor:	mit Heizung und Feld.	2

Phosphors erhaltenen Leitfähigkeitsänderung (122 − 11 = 111 Sk.). Dieser Erstausschlag von 122 Sk. ging entsprechend der Dämpfung des Galvanometers langsam wieder gegen 11 Sk. zurück. Daß es sich tatsächlich um Leitfähigkeitserhöhung während der Lichtemission handelt, erkennt man am Fehlen des Ausschlags am bereits ausgetriebenen Phosphor, wobei bei angelegter Heizung nur ein der Ohmschen Leitfähigkeit und dem Temperaturkoeffizienten entsprechender Ausschlag einsetzt, bei abgeschalteter Heizung und ohne Feld das Galvanometer jedoch in seiner Nullstellung verharrt. Die Änderung der Leitfähigkeit der Glimmerisolation kann, wie aus der letzten Zeile der Tabelle ersichtlich, bei größeren Ausschlägen vernachlässigt werden.

CaS ohne Metallzusatz, nach Art des Phosphors geglüht, zeigt keine Wirkung als die der Ohmschen Leitfähigkeit entsprechende. Erhitzung mit kleiner Bunsenflamme (Kondensator auf Asbest) gab 108 Sk. Ausschlag unter denselben Verhältnissen wie in Tab. I. Stromwenden gab dieselben Werte.

Mißt man bei verschiedenen Heizstromstärken nacheinander die zugehörigen Leitfähigkeitsänderungen, so muß, falls die Leitfähigkeitsänderung mit der bei einem bestimmten Heizstrom ausgetriebenen Lichtenergie zusammenhängt, die Summe der einzeln frei gewordenen Elektrizitätsmengen mit der bei größtem Heizstrom erregten Menge des erneut belichteten Phosphors übereinstimmen. Dies zeigen in der Tat die Messungen an CaCu *a* der Tab. II. Gleiche Meßbedingungen wie oben. Messung 5 Min. nach Schluß der Erregung.

Tabelle II. CaCu *a*.

Heizstrom Wb.		Leitfähigkeits-änderung Sk.
nacheinander	2	12
	4	72
	6	34
	8	0
		118
auf einmal	8	126

Die Größe des Ausschlags richtet sich dabei nach der bei einer bestimmten Heizstromstärke zur Ausleuchtung kommenden Zentrenzahl, daher bei 4 Wb. (Zentren mittlerer und längerer Dauer: der Hauptteil der Zentren des CaCu-Phosphors) der größte Ausschlag. Bei 8 Wb. (420° C.) leuchtet der Phosphor nur noch fahl, der noch verbleibende Rest an Zentren längster Dauer hätte nicht mehr merkbar zum gemessenen Ausschlag beigetragen, so daß höhere Heizstromstärken nicht angewendet wurden, um die Mitwirkung des Temperaturkoeffizienten auf möglichst geringem Prozentsatz der Gesamtänderung zu halten. Bei den weiteren Messungen wurde daher unmittelbar 8 Wb. Heizstrom zur Austreibung eingeschaltet.

Außer bei ausgetriebenem Phosphor und reinem CaS blieb die Leitfähigkeitsänderung auch aus, wenn man den Phosphor *druckzerstörte*. Ein CaCu-Präparat, in obiger Weise gemessen, ergab 80 Sk. Leitfähigkeitsänderung; durch längeres Reiben zwischen Glasplatten teilweise druckzerstört, ging der Ausschlag auf 62 Sk. zurück. Noch weitere Druckzerstörung durch kräftige Hammerschläge ließ die Leitfähigkeitsänderung auf 36 Sk. sinken, also eine Abnahme der Leitfähigkeitsänderung von über 50 Proz. Man konnte dabei auch einen deutlichen Rückgang des Leuchtens beobachten.

Das Hitzeaustreiben der Phosphore verursacht also eine mit der Lichtemission eng verbundene Leitfähigkeitserhöhung.

Messungen an anderen Phosphoren bei voller Erregung mit der Quecksilberlampe und ungefähr 200 Volt/cm Feld, gemessen 5 Min. nach Schluß der Erregung, Heizstrom 8 Wb., sind im folgenden zusammengestellt.

Tabelle III.

Phosphor	Leitfähigkeits-erhöhung Sk.	Temp.-Koeffiz. Sk.	Phosphor	Leitfähigkeits-erhöhung Sk.	Temp.-Koeffiz. Sk.
CaBi *a* .	128	7	ZnCu .	184	15
SrBi . .	67	7	ZnMn .	213	16
BaBi . .	48	9	CaOBi .	9	10
CaCu . .	97	8	CaOCu .	11	12
SrCu . .	62	8			

Die zweite Spalte gibt die reine Leitfähigkeitserhöhung, die dritte den dem *Temperaturkoeffizienten* entsprechenden Erstausschlag bei Erwärmen von Zimmertemperatur auf ungefähr 420° C. Da die gemessenen Phosphore infolge ihrer verschiedenen Erregungs- und Tilgungsverteilung durch das volle Licht der Quecksilberlampe recht verschieden gut erregt werden, lassen sich die Ausschläge nicht miteinander vergleichen. Die Oxydphosphore waren bei der gewählten Heizstromstärke noch nicht ganz ausgetrieben. Doch wurde von weiterer Erwärmung abgesehen, da der Einfluß des Temperaturkoeffizienten verhältnismäßig sehr stark hervortrat. Bei den Erdalkaliphosphoren untereinander zeigen sich die *Ausschläge abhängig von der Erregungs- und Zentrenverteilung* in Einklang mit der Kenntnis der Lichtemission dieser Phosphore. So ist die frei gewordene Elektrizitätsmenge bei BaBi kleiner als bei SrBi, da die Erregungsverteilung des BaBi (d_1 bei 470 $\mu\mu$, d_2 bei 360 $\mu\mu$) in bezug zu den Hg-Linien ungünstiger liegt als die des SrBi (d_1 bei 440 $\mu\mu$, d_2 bei 330 $\mu\mu$); und so stehen BaBi und SrBi hinter CaBi zurück, entsprechend der größeren Zahl Zentren langer und mittlerer Dauer bei CaBi. Dasselbe gilt auch für SrCu gegenüber CaCu. Die Sauerstoffphosphophosphore geben recht geringe Ausschläge, entsprechend der geringen erregenden Absorption ihrer bei Zimmertemperatur tief im unteren Momentanzustand befindlichen Zentren.[1]) Die Zinksulfidphosphore jedoch ergeben weit größere Leitfähigkeiten sowie auch größere Temperaturkoeffizienten als die Erdalkaliphosphore, was mit einer größeren Beweglichkeit der Elektrizität

1) Quantitative Untersuchung der erregenden Absorption der Sauerstoffphosphore bei E. Rupp, „Über erregende Absorption und Tilgung der Phosphore". Heidelb. Diss. v. 12. Mai 1922.

transportierenden Teilchen (Elektronen, Ionen) in den kristallinen Zinksulfiden zusammenhängen dürfte. Vgl. weiter unten.

Die *Abhängigkeit der Leitfähigkeitsänderung vom Feld* ist in Fig. 1 wiedergegeben.

CaBi unter denselben Bedingungen wie Tab. III gemessen.

Die frei werdenden Elektrizitätsmengen sind von mittleren Feldstärken ab nahe proportional dem angelegten Feld, während für kleine Felder der Ausschlag langsamer anwächst. Bei etwa 7000 Volt/cm biegt die Kurve zur Sättigung um, die bei 14000 Volt/cm (angelegte Spannung 350 Volt) erreicht wird. Bei proportionalem Anstieg ist die Wanderungsgeschwindigkeit der Ladungsträger proportional dem angelegten Feld; der Sättigungsteil der Kurve hingegen ist unabhängig von der Wanderungsgeschwindigkeit, denn hier gelangen sämtliche bei Hitzeaustreiben frei gewordenen Elektrizitätsmengen zur Messung. Ein Vergleich der Elektrizitätsmengen bei Sättigung für verschiedene Phosphore gäbe ein Mittel in die Hand, die Zahl der Elektrizitätsträger zu bestimmen und bei bekanntem Metallgehalt des Phosphors die pro Metallatom frei gewordenen Elementarquanten zu errechnen.

Abhängigkeit der Leitfähigkeitserhöhung vom angelegten Feld

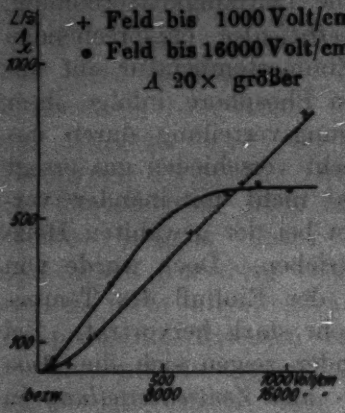


Fig. 1.

Die *Abhängigkeit der Leitfähigkeitsänderung* von der vollerregten *Schichtdicke* zeigt Tab. IV.

CaCu. Meßbedingungen wie Tab. III. Feld 500 Volt/cm.

Tabelle IV.

Dicke der Schicht mm	Leitfähigkeitsänderung Sk.	Leitfähigkeitsänderung / Dicke
0,048	151	30
0,10	312	31

Man erkennt genaue Proportionalität der Leitfähigkeitserhöhung mit der Schichtdicke unter gleichem Feld.

Zahlenmäßige Auskunft über diese Leitfähigkeitserregung bei Hitzeaustreiben der Phosphore verglichen mit deren Lichtemission ließen sich gewinnen durch Ermittlung dieser Lichtemission, also durch *Lichtsummenmessungen*. Der Phosphor wurde mit der Hg-Lampe verschieden lang erregt, dann 5 Min. nach Schluß der Erregung seine Lichtsumme lichtelektrisch gemessen.[1]) Daraufhin wurde er nochmals dieselbe Zeit erregt, das Kondensatorfeld 150 Volt/cm angelegt, nach 5 Min. mit 8 Wb. Heizstrom plötzlich ausgetrieben und der Ausschlag ermittelt. Tab. V gibt eine Zusammenstellung solcher Messung für CaBi und CaCu.

Tabelle V.

Phosphor	Lichtsumme Sk.	Leitfähigkeitserhöhung Sk.	Lichtsumme / Leitfähigkeitserhöh.	Phosphor	Lichtsumme Sk.	Leitfähigkeitserhöhung Sk.	Lichtsumme / Leitfähigkeitserhöh.
CaBi	87	12	7,2	CaCu	23	38	0,60
	268	36	7,5		49	80	0,61
	412	55	7,5				

Aus der Tabelle ergibt sich eine *vollständige Parallelität zwischen Leitfähigkeitserhöhung bei Hitzeaustreiben und Lichtsumme* der Phosphore. Man kann also bei ein und demselben Phosphor aus Leitfähigkeitsmessungen quantitativ die Lichtemission bestimmen.

Um dieses Ergebnis noch eingehender zu prüfen, wurde die *spektrale Verteilung der Lichtemission* eines CaBi *a* bei Erregung mit den Quecksilberlinien durch Lichtsummen- und Leitfähigkeitsmessungen ermittelt.[2]) Die Leitfähigkeiten wurden unter denselben Bedingungen wie Tab. V gemessen. Die gewonnenen Ergebnisse zeigt Tab. VI.

---

1) Vgl. P. Lenard, Über Lichtsummen der Phosphore, S. 4ff. Heidelb. Akad., ferner E. Rupp, Heidelb. Diss. S. 8. 1922.

2) Über Einrichtung des Spektralapparates und Art der Messungen vgl. „Lichtsummen" S. 5 und E. Rupp, Diss.

Tabelle VI. CaBi α.

λ μμ	Leitfähigkeitserhöhung Sk.	Lichtsumme Sk.	Lichtsumme / Leitfähigkeitserhöhung
435	86	261	2,93
404	63	198	3,15
365	55	162	2,94
300	68	208	3,06
253	47	148	3,15

Die Spalte 4 gestattet den Vergleich der Messungen untereinander, wobei der Quotient sich als gut konstant erweist. Wieder erkennt man *vollständige Proportionalität der lichtelektrisch gemessenen Lichtsumme mit der Leitfähigkeitserhöhung*, soweit die Genauigkeit der Messungen reicht, und zwar sowohl bei Erregung mit unzerlegtem Licht wie bei spektraler Erregung des Phosphors mit einzelnen Wellenlängen. Es läßt sich also die spektrale Verteilung der Lichtemission eines Phosphors aus Messung der Leitfähigkeitsänderung bei Hitzeaustreiben gewinnen, was unter Umständen einen weitgehenden Vorteil gegenüber der lichtelektrischen Methode der Lichtsummenmessungen bieten kann. Die Messungen können schneller einander folgen, das Meßgerät ist bedeutend einfacher und durchsichtiger. Langwellige Phosphorbanden können ebenfalls gemessen werden. Nur bei Banden, die erst bei sehr hohen Temperaturen ausgetrieben werden, so daß der Temperaturkoeffizient wesentlich hervortritt, versagt die Methode.

Als Anwendungsbeispiel dieses neuen Weges zur Messung der Lichtsumme sei hier die *Abklingung eines ZnCu α*-Phosphors mitgeteilt. Der Phosphor wurde mit dem Gesamtlicht der Hg-Lampe erregt, die Feldstärke betrug 200 Volt/cm. Die jeweilige Leitfähigkeitsänderung von der als Abszisse aufgetragenen Zeit nach Schluß der Erregung an wurde gemessen. Fig. 2 zeigt die so gewonnene Abklingungskurve, die ganz analog der von den Herren Lenard und Hausser in „Abklingung der Phosphoreszenz“ [1]) S. 20 wiedergegebenen Tabelle verläuft.

1) Heidelb. Akad. 1912.

Nach dem von Hrn. Lenard an den Phosphoren zuerst erschlossenen, später in das Rutherford-Bohrsche Atommodell eingegangenen *Mechanismus der Lichtemission* tritt Leuchten bei Rückkehr eines erregten Elektrons ein. Da die Zahl der rückkehrenden Elektronen die Lichtsumme bedingt, und diese Lichtsumme wieder mit der Leitfähigkeitsänderung bei Hitzeaustreiben parallel geht, müssen *die durch Wärmebewegung beschleunigt zurückkehrenden Elektronen auch mit der Leitfähigkeitsänderung in ursächlichem Zusammenhang* stehen, sei es, daß sie selber diese Leitfähigkeitserhöhung übernehmen, sei es, daß sie bei ihrer Rückkehr den Phosphor in einen solchen leitenden Zustand versetzen, daß die Leitungselektronen mit größerer Wanderungsgeschwindigkeit das Phosphormaterial passieren können. Liegt auch Ionenwanderung vor und ist deren Zahl n_i, ihre Wanderungsgeschwindigkeit ω_i, entsprechend für Elektronen n_e und ω_e, ferner ε ihre Ladung, so setzt sich die Gesamtstromdichte zusammen aus

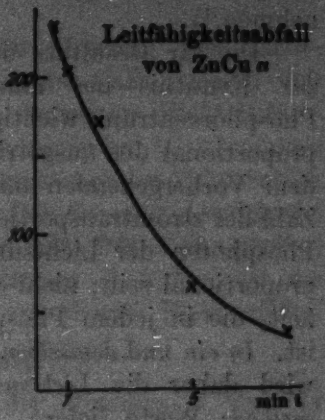


Fig. 2.

$$j = (n_e \omega_e + n_i \omega_i) \cdot \varepsilon .$$

Dabei ist n_e und n_i unmittelbar proportional der Zahl der bei Hitzeaustreiben zurückkehrenden Elektronen wie aus der Proportionalität von Lichtsumme und Leitfähigkeitsänderung folgt, also bei CaBi proportional 4 Elektronen pro Zentrum.[1]) Die Wanderungsgeschwindigkeit ω hingegen ist eine Materialkonstante des Phosphorgrundmaterials und wohl auch des Zusatzes wie der Vergleich der Leitfähigkeitsänderung von CaS- und ZnS-Phosphore auch erkennen läßt. Da ω_i sehr klein gegen ω_e wird bei vorhandener Elektronenwanderung Ionenwanderung kaum in Betracht kommen, höchstens bei ganz schwachen Feldstärken. Der bei kleiner Feldstärke schwache Anstieg der Leitfähigkeit mit dem Feld läßt hier

1) Vgl. P. Lenard und W. Hausser, Absolute Messung der Energieaufspeicherung der Phosphore, S. 35. Heidelb. Akad. 1918.

mitwandernde Ionen vermuten, während anzunehmen ist, daß für größere Felder (Proportionalität zwischen Feld und Leitfähigkeitsänderung) die Elektronen allein die Leitung übernehmen.[1])

Die für Resultate der Lichtsummenmessungen, besonders zur Kenntnis der maximalen Energieaufspeicherung eines Phosphorzentrums wichtige Frage, ob die Leitfähigkeitsänderung proportional der ausgetriebenen Lichtenergie sei, läßt sich aus dem Vorhergehenden mit guter Sicherheit beantworten. Die Zahl der stromtransportierenden Teilchen wird bei verschiedenen Phosphoren der Lichtsumme in absolutem Maße unmittelbar proportional sein; nicht so jedoch die Wanderungsgeschwindigkeit, die in jedem Phosphorgrundmaterial anders zu erwarten ist. *In ein und demselben Grundmaterial* und bei gleichem Zusatz wird daher die *Lichtsummenmessung nach der Leitfähigkeitsmethode* Werte liefern, die jedenfalls *der Lichtsumme in absolutem Energiemaß proportional* sind und zwar bei verschiedenem wirksamen Metall unabhängig von den Wellenlängen der emittierten Banden im Gegensatz zur lichtelektrischen Methode. Z. B. wird die Lichtsumme eines CaS-Phosphors mit bestimmtem Zusatz sowohl für CaBi, CaCu, CaMn usw. unmittelbar im Verhältnis der absoluten Energiemengen erhalten, entsprechend für SrSBi, SrCu, SrAg. Die Durchführung einer solchen Methode könnte neben einer bedeutenden Vereinfachung zu einer wichtigen Kontrolle der bisherigen, sehr schwierigen absoluten Messungen der Energieaufspeicherung eines Phosphors führen.

Die Leitfähigkeitsänderung bei Hitzeaustreiben der Phosphore fügt zu den vielen direkten Bestätigungen der *lichtelektrischen Theorie der Phosphore* eine weitere mehr indirekte hinzu, denn auf Grund der lichtelektrischen Theorie sind die beschriebenen Versuche zwanglos zu erklären und sie stützen bereits bekannte Bilder von einer ganz anderen Seite experimenteller Betrachtung aus.

Drückt man die bei der Leitfähigkeitsänderung frei werdenden Elektrizitätsmengen einerseits und andererseits die bei der Lichtemission vom Metallatom des Phosphors weggehenden

1) Genauere Auskunft verspricht eine in Gang befindliche Untersuchung über Leitfähigkeitsänderung bei Bestrahlung mit Kathodenstrahlen.

Ladungen in in CGS.-Einheiten aus, so gelangt man zu folgendem wichtigen Vergleich:

Gewählt sei CaBi α $^1/_{10}$ n. bei Erregung mit der blauen Hg-Linie 435 $\mu\mu$, also d_1.

Aus den Daten der „Absoluten Messung der Lichtaufspeicherung der Phosphore“[1]) für d_1 des CaBi α lassen sich einerseits die bei der Lichtemission bewegten Elektrizitätsmengen ermitteln. Auf 1 g Phosphor kommen bei $^1/_{10}$ normalem $2{,}14 \cdot 10^{-5}$ g Bi. Der Verdampfungsverlust bei der Präparation ist etwa 50 Proz. dieser Metallmenge. Das Gewicht der Schicht betrug 0,024 g. Ein Bi-Atom (Gewicht $9{,}81 \cdot 208 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-24}$ g) gibt bei maximaler Erregung 4 Elektronen ab. Also ist die gesamte bei der Lichtemission frei werdende Elektrizitätsmenge

$$4 \cdot 10^{-6} \text{ CGS.} \cdot \text{eltmag.}^2)$$

Der Galvanometerausschlag bei der Messung in Tab. VI betrug $a = 86$ Sk., der gewöhnliche Reduktionsfaktor des Meßinstruments war $C = 2 \cdot 10^{-11}$ CGS., die Schwingungsdauer 18 Sek., die Dämpfungskonstante $k = 12{,}3$. Daraus berechnet sich die frei gewordene Elektrizitätsmenge zu $4 \cdot 10^{-6}$ CGS. bei 150 Volt/cm Feld. Zum Vergleich dieses Wertes mit dem aus der Lichtemission muß man den ballistischen Ausschlag auf den Sättigungswert der Fig. 1 beziehen, denn nur dort hat man die gesamte bei Hitzeaustreiben frei gewordene Elektrizitätsmenge wirklich gemessen und nur die läßt sich mit der Gesamtzahl der bei der Lichtemission zurückkehrenden Elektronen vergleichen. Wie Fig. 1 zeigt, war der Sättigungsausschlag 12000 Sk. Zur Reduktion auf Sättigung ist also die Elektrizitätsmenge $4 \cdot 10^{-6}$ CGS. mit 140 zu multiplizieren. Da Fig. 1 bei Erregung mit dem vollen Licht der Quecksilberlampe ermittelt wurde, ist die ballistische Elektrizitätsmenge noch wegen der Tilgung der einzelnen Hg-Linien[3]) mit etwa 1,4 zu multiplizieren. Der Vergleichswert wird so

$$8 \cdot 10^{-4} \text{ CGS.} \cdot \text{eltmag.}$$

---

1) Vgl. P. Lenard und W. Hausser, Absolue Messung der Energieaufspeicherung der Phosphors, S. 35. Heidelb. Akad. 1913.

2) Die Tilgung der blauen Hg-Linie, wobei die Zahl $4 \cdot 10^{-6}$ durch 1,13 (vgl. Rupp, Diss.) zu dividieren wäre, ist wegen ihrer Geringfügigkeit unberücksichtigt.

3) Aus Messungen der erregenden Absorption und der Tilgung ermittelt nach E. Rupp, Diss. 1928.

Die *gesamte bei der Leitfähigkeitsänderung frei gewordene Elektrizitätsmenge stimmt* also *mit der aus der bei maximaler Erregung abgegebenen absoluten Elektronenzahl der Bi-Atome des Phosphors* größenordnungsweise *überein* und zwar ist der Wert aus der Leitfähigkeitsänderung größer als der aus der Lichtemission. Diese Übereinstimmung läßt sich dadurch deuten, daß jedes zurückkehrende Elektron auf seinem Weg zum Bi-Atom durch Sekundärstrahlwirkung eine kleine Zahl Elektronen geringer Geschwindigkeit auslöst, die dann den Stromtransport übernehmen und, vom äußeren Feld erfaßt, die Leitfähigkeitsänderung verursachen. Die vorhandene Kenntnis der Phosphore stützt dieses einesteils darin, daß bei der Erregung das Elektron den Verband des Bi-Atoms gänzlich verläßt[1]) und anderenteils bei dem sperrigen Bau des Phosphorzentrums[2]) das rückkehrende Elektron einen beträchtlichen Weg zu durchlaufen hat, bei dem es sehr wohl Sekundärelektronen befreien kann, besonders an dem elektropositiven Ca-Atom.

Diese Deutung steht ferner in bemerkenswerter Übereinstimmung mit der von Hrn. Lenard zur Erklärung der Aufspeicherung der Erregung im Phosphor eingeführten Theorie des „thermischen Überschusses". In „Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht"[3]) stellt Hr. Lenard zwei Möglichkeiten der Aufspeicherung der Erregung einander gegenüber.

1. Die „konservative Aufspeicherung": das vom Metallatom mit bestimmter kinetischer Energie entwichene Elektron behält diese Energie in unveränderlicher Größe bei, bis es früher oder später (durch Nähewirkung ausgelöst) wieder zurückkehrt.

2. Die Theorie des *„thermischen Überschusses"*: das Elektron kehrt mit größerer Geschwindigkeit zum Metallatom zurück als es dieses verlassen hat, aber nur soviel der dabei mitgebrachten Energie wird vom Atominnern aufgenommen, als vorher beim Entweichen des Elektrons abgegeben worden war, während der Überschuß in Wärmebewegung übergeht.

---

1) Vgl. P. Lenard, Ann. 31. S. 667ff. 1910 und F. Schmidt, Ann. 64. S. 731. 1921.

2) P. Lenard, Elster und Geitel-Festschrift. 1915.

3) Teil I. S. 10 u. 11. Heidelb. Akad. 1917.

Die Energie des vom Metallatom entwichenen Elektrons ist bei der Absorption nicht „konservativ" aufgespeichert, sondern sie geht ganz oder teilweise in Wärmeinhalt der Umgebung über und wird bei der Wiederabtrennung durch Nähewirkung mit einem Überschuß aus eben diesem Wärmeinhalt wieder ersetzt. Damit ein solcher Überschuß vorhanden ist, muß die Abtrennung des absorbierten Elektrons stets mindestens mit gleicher Geschwindigkeit erfolgen als die Entweichung vom Metallatom durch lichtelektrischen Effekt. — Dieser zweiten Theorie schreibt Hr. Lenard mehr Wahrscheinlichkeit zu und stellt sie in obiger Abhandlung in den Vordergrund der Erklärung.

Der Vergleich der bei Lichtemission zurückkehrenden Elektrizitätsmenge mit der bei der Leitfähigkeitsänderung in vorliegenden Versuchen frei gewordenen läßt erkennen, daß durch ein zurückkehrendes Elektron eine kleine Zahl Sekundärelektronen ausgelöst wird, vielleicht bis zu zehn, da man annehmen muß, daß sehr viele frei gewordenen Elektronen im Füllmaterial und in den die Phosphorkörner stets umgebenden Luftschichten absorbiert werden und somit nicht zur Messung gelangen. Dabei muß das zurückkehrende Elektron mit der beträchtlichen Mindestenergie von vielleicht mehreren Volt das aufspeichernde Atom verlassen, denn auf seinem Weg zum Metallatom wird es nach Maßgabe der von ihm befreiten Sekundärelektronen Geschwindigkeitsverluste erleiden, es muß aber andererseits mit einer Energie am Metallatom ankommen, die dem Lichtquant der emittierten Bande entspricht. Das heißt aber, es muß mit sehr viel größeren Energiebetrag die aufspeichernde Stelle verlassen, als den es bei der Erregung mitgebracht hatte, ganz im Sinne des „thermischen Überschusses". — Es zeigte sich also durch vorliegende Messungen zum erstenmal eine Prüfungsmöglichkeit der vorhandenen Theorien der Energieaufspeicherung im Phosphor, und zu gleicher Zeit spricht diese Prüfungsmöglichkeit zugunsten der Theorie des „thermischen Überschusses". Denn nur im Falle der Abtrennung mit besonders großer Mindestenergie kann das zurückkehrende Elektron Sekundärstrahlen unter Geschwindigkeitsverlust auslösen und dennoch mit dem zur Lichtemission der Bande nötigen Energiebetrag am Metallatom anlangen. Aus Messungen der Leitfähigkeitsänderung beim Hitzeaustreiben wird man somit zu dem Schluß geführt,

daß die *Energieaufspeicherung im Phosphor nach der Theorie des „thermischen Überschusses"* zu erfolgen scheint.

Um selbst an elektropositiven Metallatomen Sekundärelektronen auslösen zu können, sind Anfangsgeschwindigkeiten des aufgespeicherten Elektrons nötig, die den thermischen Mittelwert der Geschwindigkeit auch bei der hohen Ausleuchtungstemperatur weit übertreffen. Doch sind solch große Abtrennungsgeschwindigkeiten bei Nähewirkung auch anderweitig angezeigt, worauf Hr. Lenard schon bei Untersuchung der Abklingung der Phosphoreszenz[1]) hingewiesen hat. Auch bei der Elektrizitätsleitung in Gasen kann der gaskinetische Mittelwert überschritten werden.[2])

Zusammenfassung.

Bei Austreiben des Phosphorlichtes durch Wärme tritt bei allen Phosphoren eine Leitfähigkeitserhöhung auf, die in Abhängigkeit von angelegtem Feld und Lichtemission untersucht wird.

Die Leitfähigkeitserhöhung ist proportional der Lichtsumme des Phosphors und zwar bei gleichem Grundmaterial der Lichtsumme in absolutem Maß unabhängig von der spektralen Bandenlage.

Die Leitfähigkeitserhöhung wird durch die beim Hitzeaustreiben rückkehrenden Elektronen verursacht.

Auf die Proportionalität der Leitfähigkeitsänderung mit der lichtelektrisch gemessenen Lichtsumme läßt sich eine neue Methode der Lichtsummenmessung gründen, die für die spektrale Emissionsverteilung des CaBi α und die Abklingung des ZnCu α praktisch durchgeführt wird.

Hrn. Lenards Theorie des „Thermischen Überschusses" bei Aufspeicherung der Erregung im Phosphor erfährt hier erstmalig eine Prüfungsmöglichkeit, die zu einer Bestätigung dieser Theorie führte gegenüber der der „konservativen Aufspeicherung".

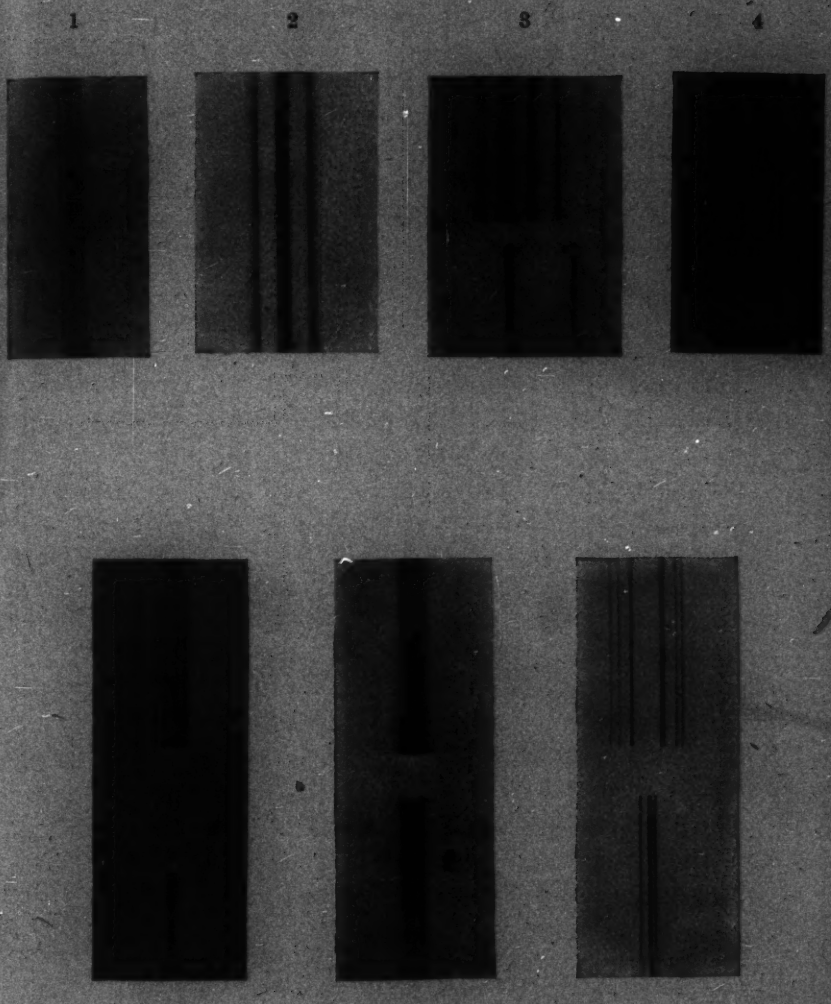
Heidelberg, Radiologisches Institut. 30. Oktober 1922.

1) P. Lenard und W. Hausser, Heidelb. Akad. 1912. S. 54 und Ausleuchten und Tilgung IV. S. 36. 1918. Die Abtrennungsgeschwindigkeit wird dort nicht so sehr hoch erwartet als unsere Resultate sie anzeigen.

2) Vgl. P. Lenard, Elektrizitätsleitung durch Elektronen und Träger, Teil II. Ann. d. Phys. 41. S. 77—82. 1913.

(Eingegangen 18. November 1922.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



Tafel der Vergrößerungen.

E. Back.

1923. № 6.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 70.

1. *Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen;*

von Friedrich Kottler.

Die klassische Kirchhoffsche Beugungstheorie gilt bekanntlich als eine zwar gut brauchbare, jedoch prinzipiell unzulässige Näherung. Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, sie als eine exakte, in aller Strenge gültige Lösung eines ganz bestimmten Beugungsproblems nachzuweisen.

Dieses Problem betrifft die Beugung am schwarzen Schirm. Gewöhnlich pflegt man den schwarzen Schirm als ein Randwertproblem aufzufassen, obwohl sich keine widerspruchsfreien Randbedingungen hierfür angeben lassen. Anderseits pflegt man, wie dies schon Kirchhoff selbst getan hat, die Kirchhoffsche Formel als Lösung eines Randwertproblems anzusehen mit ganz bestimmten Randwerten, die angeblich an der Oberfläche des schwarzen Schirms herrschen sollen. Bei dieser Auffassung stößt man auf die erwähnten prinzipiellen Unzulässigkeiten. In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß die Kirchhoffsche Formel nicht als Lösung eines Randwertproblems, sondern eines „Sprungwertproblems" aufgefaßt werden muß. Darunter ist das Problem verstanden, eine Differentialgleichung zu integrieren, wenn nicht die Randwerte der Funktion, sondern bloß gewisse Unstetigkeiten (Sprungwerte) derselben die sie auf vorgegebenen Flächen besitzen soll, bekannt sind. Dies führt sofort auf eine Definition des schwarzen Schirms, welche allen ideellen Anforderungen genügt, wenn sie auch nicht strenge realisierbar ist: der Sprung entsteht an der beleuchteten Seite des schwarzen Schirms dadurch, daß das Licht aus dem physikalischen Raum in einen andern fingierten Raum austritt. (Abschnitt I.)

Zur näheren Erforschung der bezüglichen Verhältnisse wird weiter die *stetige Fortsetzung* der Sprungwerte angewendet. Man wird dadurch ganz naturgemäß auf die Benutzung der mehrfachen Riemannschen Räume hingeführt, zu welcher

Sommerfeld bei dem speziellen Problem der blanken Halbebene durch das Verfahren der *Spiegelung* gelangte, was dann von Voigt nachträglich auf die schwarze Halbebene angewendet wurde. (Abschnitt III.)

Vorher ist jedoch — zur genauen Festlegung dieser Fortsetzung — eine gewisse Umformung des in der Kirchhoffschen Formel auftretenden Flächenintegrals in ein Linienintegral erforderlich, die schon vor langer Zeit von Maggi angegeben wurde, aber leider nicht so allgemein bekannt ist, wie es wünschenswert wäre. Darum wird eine neue systematische Ableitung derselben in Abschnitt II eingefügt.

Diese Transformation führt auf eine Zerlegung der Kirchhoffschen Lösung in einen Teil, welcher die Licht- und Schattenverteilung nach der geometrischen Optik bestimmt, und in einen zweiten Teil, jenes Linienintegral, welches über die Berandung der beleuchteten Seite des schwarzen Schirms zu erstrecken ist und welches angibt, wie die am Rande entstehende Beugungswelle die unstetige Lichtverteilung der geometrischen Optik zu einer stetigen ergänzt. Dadurch ist aber ein neues Sprungwertproblem, das sich auf die Grenze des geometrischen Schattens bezieht, an Stelle des auf die beleuchtete Seite des schwarzen Schirms bezüglichen gesetzt. (Abschnitt IV.)

Hier ist es nun möglich durch Betrachtung dieses neuen Sprungwertproblems für das erwähnte Linienintegral auch die Sommerfeld-Voigtsche Theorie nicht nur für die Halbebene, sondern auch für schwarze Schirme *beliebiger Gestalt* zu formulieren und auf eine der Kirchhoffschen Theorie ganz analoge Form zu bringen. Letztere Theorie ist jedoch nicht wie die erstere auch auf den blanken Schirm anwendbar. Der beide Theorien umfassende allgemeinste Ansatz führt auf eine komplizierte Integralgleichung. (Abschnitt V.)

Zum Schlusse wird die neue Auffassung an dem Problem der schwarzen Halbebene erprobt. Das Sprungwertproblem für die Beugungswelle läßt sich in diesem Falle mittels einer Methode der Entwicklung in Fouriersche Reihen lösen. Man erhält so unter anderem eine neue direkte Ableitung der bekannten Sommerfeldschen Formeln. (Abschnitt VI.)

Die für die schwarze Halbebene erhaltenen Formeln der Kirchhoffschen und der Sommerfeldschen Theorie werden

dann mit den Beobachtungen verglichen. Hierbei ist wesentlich, daß der numerischen Auswertung der ersteren das Linienintegral zugrunde gelegt werde und nicht die durchaus ungenügende Annäherung, die Kirchhoff selbst von seinem Flächenintegral in Anlehnung an Fresnel gegeben hat und die in den Lehrbüchern der Optik allgemein verbreitet ist. Der Vergleich mit den spärlichen Beobachtungen an annähernd schwarzen Schirmen scheint zugunsten der richtig ausgewerteten Kirchhoffschen Formel zu sprechen, die einen viel schärferen Abfall der Lichtamplitude im Schatten ergibt als die zweiwertige Sommerfeldsche und selbst die unendlichwertige Voigtsche Lösung. (Abschnitt VII.)

Bei allen diesen Überlegungen wird nur von der Wellengleichung und nicht von den Maxwellschen Gleichungen Gebrauch gemacht, was zunächst ausreicht, da das am schwarzen Schirm gebeugte Licht bekanntlich unpolarisiert ist. Die genauere elektromagnetische Theorie der Beugung am schwarzen Schirm wird Gegenstand einer späteren Abhandlung sein.[1])

Eine vorläufige Mitteilung der hier vorgetragenen Resultate ist in den Wiener Berichten erschienen.[2])

I. Die Kirchhoffsche Beugungsformel und der schwarze Schirm.

1. Das Huyghens-Kirchhoffsche Prinzip.

Es sei $u^0(L, P)$ die ungestörte Lichtwirkung eines Lichtpunktes L im Aufpunkt P. Es werde ein sogenannter *schwarzer Schirm* in den Gang der Lichtstrahlen gebracht, d. h. ein Körper, welcher das Licht weder reflektiert noch durchläßt. Gefragt ist nach der gestörten Lichtwirkung $u(L, P)$, die jetzt in P herrscht.

Beide Funktionen sollen der Schwingungsgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

genügen. Daher ist der Greensche Satz anwendbar. Man erhält:

$$(1)\quad \begin{cases} 4\pi u(L,P) = 4\pi u^0(L,P) \\ \qquad + \int df_Q \left\{ u(L,Q) \dfrac{\partial w(P,Q)}{\partial n} - w(P,Q) \dfrac{\partial u(L,Q)}{\partial n} \right\}. \end{cases}$$

1) Elektromagnetische Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen. Zitiert als B.

2) F. Kottler, Zur Theorie der Beugung etc. Wiener Ber. IIa, 129. S. 3—25. 1920.

Hierin bedeutet df das Element der *geschlossenen* Oberfläche des schwarzen Schirms, n die nach außen gerichtete Normale derselben, ferner ist

$$w(P,Q) = \text{Reeller Teil von } \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}},$$

wo r_{PQ} die Entfernung von Q nach P bedeutet. (Q ist ein beliebiger Punkt der Schirmoberfläche.)

Die Formel (1), die nach Kirchhoff[1]) das Huyghenssche Prinzip heißt, setzt die Kenntnis der Randwerte von u und $\partial u/\partial n$ an der Oberfläche des schwarzen Schirms voraus.

2. Die physikalische Unmöglichkeit eines schwarzen Schirms.

Der oben definierte schwarze Schirm soll das Licht weder reflektieren noch hindurchlassen. Diese Bedingungen sind jedoch durch keinerlei Annahme über die optischen Materialkonstanten zu realisieren:

Um nichts zu reflektieren, müßte der Schirm, wie schon Kirchhoff[2]) bemerkt, den Brechungsindex seiner Umgebung, in unserem Falle den des Äthers, besitzen. Um nichts durchzulassen, müßte er aber entweder *blank* wie die Metalle sein, d. h. *alles* auffallende Licht zurückwerfen, was nach der ersten Annahme ausgeschlossen ist, oder er müßte zwar in der Übergangsschicht an der Oberfläche durchlässig sein, dafür aber das Licht im Innern durch zahllose Reflexionen *absorbieren* und in Wärme verwandeln. Auf die letztere Art wird in der *Strahlungstheorie* tatsächlich der *schwarze Körper* realisiert. Für die Zwecke der Optik ist dies aber nicht zu brauchen. Denn infolge dieser Absorption des Lichts müßte eine gleich starke Emission von schwarzer Strahlung verschiedener Wellenlängen aus dem Schirm austreten, welche überdies mit der Dauer der Belichtung anfänglich wachsen würde. Außerdem wäre die Schwärze des Schirms von seiner Dicke abhängig; in unendlich dünnen Schichten wäre ein solcher Schirm niemals schwarz.

Weil hingegen in der theoretischen Optik verlangt werden muß, daß der Schirm das einfallende Licht unabhängig von

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Optik, 1891. Zweite Vorlesung § 2, Formel (13).

2) z. B. G. Kirchhoff, Zur Theorie der Lichtstrahlen, Berl. Ber. 1882. (Nachtrag zu den ges. Abh. S. 44.)

Dicke und Belichtungsdauer restlos beseitigt, so ist klar, daß ein solcher Schirm praktisch in Strenge nicht verwirklicht werden kann. Da in ihm das Licht spurlos verschwinden müßte, würde er das Energieprinzip verletzen. Gleichwohl kann die Beugungstheorie für ihre Grundlagen einen solchen Schirm nicht entbehren, weil es darauf ankommt, diese Grundlagen möglichst unabhängig von den spezifischen Eigenschaften der Schirmmaterie zu entwickeln.

Man muß daher trachten, den schwarzen Schirm von seinen inneren Widersprüchen zu befreien und ihn wenigstens durch eine Gedankenkonstruktion *strenge* zu realisieren.

3. Die Kirchhoffsche Lösung für den schwarzen Schirm.

Ohne auf diese Widersprüche in den Randbedingungen einzugehen, hat Kirchhoff[1]) Annahmen über die unbekannten Randwerte von u und $\partial u/\partial n$ an der Oberfläche des schwarzen Schirms in (1) gemacht. Sie sind die folgenden:

Nach der *geometrischen* Optik zerfällt die Oberfläche f des Schirms in einen *beleuchteten* Teil f_1 und in einen unbeleuchteten (*beschatteten*) Teil f_2. Die Grenzlinie s zwischen beiden Teilen ist diejenige Linie, längs welcher der Kegel der von L an die Oberfläche f gelegten Tangenten berührt. Nach Kirchhoff soll nun sein:

Auf f_1: $u = u^0$, $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u^0}{\partial n}$, d. h. ungestörte Lichtwirkung.

Auf f_2: $u = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$, d. h. Lichtwirkung Null.

Damit verwandelt sich (1) in die *Kirchhoffsche Lösung*:

$$(2)\quad \begin{cases} 4\pi u(L,P) = 4\pi u^0(L,P) \\ \qquad + \int df_{1,Q} \left\{ u^0(L,Q) \dfrac{\partial w(P,Q)}{\partial n} - w(P,Q) \dfrac{\partial u^0(L,Q)}{\partial n} \right\}, \end{cases}$$

wo das Integral über den beleuchteten Teil f_1 der Oberfläche f des Schirms zu erstrecken ist. Diese Kirchhoffschen Annahmen sind nun bekanntlich falsch.[2])

Erstens nämlich kann die Lichtwirkung an f_1 nicht die

1) G. Kirchhoff, Optik, a. a. O. § 3.

2) Vgl. z. B.: A. Sommerfeld, Zur mathematischen Theorie der Beugungserscheinungen, Gött. Nachr. 1894, insbes. S. 341.

ungestörte, die an f_2 nicht Null sein. Denn zufolge (1) kommt ja überall zur ungestörten Wirkung die Wirkung der Beugung hinzu. Berechnet man also nachträglich aus (2) die Randwerte von u und $\partial u/\partial n$ an f_1 bzw. f_2, so findet man sie von den Kirchhoffschen Annahmen völlig *verschieden*. Diesen ersten Einwand könnte man noch, wie es gewöhnlich geschieht, dadurch zu begegnen versuchen, daß man die Kirchhoffschen Randwerte als eine für die Optik ausreichende *Näherung*, etwa als erstes Glied einer Kette von sukzessiven Approximationen, ansieht.

Zweitens aber sind die Kirchhoffschen Annahmen von vornherein unmöglich. Die Randwerte von u allein oder von $\partial u/\partial n$ allein genügen bekanntlich schon zur Bestimmung des Randwertproblems; beide zusammen können also nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden.

Drittens ist der Greensche Satz [und damit die Formel (1)] bei den Kirchhoffschen Annahmen nicht mehr anwendbar; denn der Integrand besitzt nach diesen Annahmen an der Linie s eine Unstetigkeit, da dort die Randwerte von u bzw. $\frac{\partial u}{\partial n}$ von u^0 bzw. $\frac{\partial u^0}{\partial n}$ auf Null springen.

Gleichwohl ist bekannt, daß die Formel (2) die Erscheinungen sehr gut wiedergibt, ja es wird gezeigt werden, daß sie sie vorzüglich wiedergibt, wofern man nur an die Stelle der in den Lehrbüchern der Optik üblichen angenäherten Auswertung von (2) die exakte Formel (2) selbst setzt. (Vgl. Nr. 29.)

4. Eine neue mathematische Interpretation der Kirchhoffschen Lösung: „Sprungwerte" anstatt „Randwerte".

Die Formel (2) muß also offenbar auf ganz anderen Voraussetzungen beruhen, als sie bei der gewöhnlichen Ableitung zugrundegelegt werden. Folgendes ist die einfache Aufklärung des Tatbestandes:

Die berandete Fläche f_1, der beleuchtete Teil des schwarzen Schirms, ist eine *Unstetigkeitsfläche* für die Funktion u. Nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie, die auch für die

Schwingungsgleichung gelten[1]), hat die durch (2) definierte Funktion u die folgenden *Sprünge* an f_1:

$$(3) \qquad (u)^+ - (u)^- = u^0, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^- = \left(\frac{\partial u^0}{\partial n}\right),$$

wobei die Normale n von der „$-$"-Seite zur „$+$"-Seite hin gezogen ist.

Das, was also Kirchhoff als *Randwerte* ansah, sind in Wirklichkeit die *Sprungwerte*, d. h. die Differenzen der Randwerte zu beiden Seiten der f_1.

5. Physikalische Bedeutung der neuen Interpretation: widerspruchsfreie Konstruktion eines schwarzen Schirms.

Um die physikalische Bedeutung dieser neuen Auffassung zu erkennen, seien die beiden Zweige der Funktion u, die an der beleuchteten Seite der Schirmfläche zusammenstoßen, durch diese hindurch stetig fortgesetzt, wodurch gewissermaßen der Sprung beseitigt wird. Um die hierdurch entstehende Zweiwertigkeit der Funktion u zu vermeiden, ist man, wie in der Riemannschen zweidimensionalen Funktionentheorie gezwungen, den Raum doppelt (eventuell mehrfach) überdeckt vorzustellen und in jedes Exemplar des so entstandenen *mehrfachen Riemannschen Raumes* je einen Zweig der Funktion zu verweisen.

Wir nennen den wirklichen Raum den *physikalischen Raum* und die anderen fingierten Räume die *nichtphysikalischen Räume*. Der physikalische Raum kommuniziert mit dem ersten nichtphysikalischen Raum, ebenso dieser mit dem zweiten, usf., endlich der letzte nichtphysikalische Raum wieder mit dem physikalischen Raum vermittels der verschiedenen Exemplare der „Verzweigungsfläche" f_1, die von der „Verzweigungslinie" s [der Grenze zwischen beleuchtetem (f_1) und unbeleuchtetem (f_2) Schirmteil] berandet wird.

Bei Zuhilfenahme dieser Begriffe erkennt man leicht die physikalische Bedeutung der neuen Auffassung: An Stelle des Sprungs, den die Funktion u im physikalischen Raum allein betrachtet aufweist, tritt jetzt ein stetiger Übergang,

1) Vgl. z. B.: H. Poincaré, Mathematische Theorie des Lichts, Berlin 1894, § 79 und 80 oder J. Larmor, The mathematical expression of the principle of Huygens, Lond. Math. Soc. Proceed. 1. 1903. § 3.

der an der beleuchteten Seite des schwarzen Schirms aus dem physikalischen Raum hinaus in die nichtphysikalischen Räume (sozusagen in eine „transzendente" Welt) hinüberführt. Das auf die Schirmfläche einfallende Licht wird also nicht vernichtet, sondern nur aus dem physikalischen Raum abgeleitet.

Freilich könnte ebensogut wie das Licht in den folgenden nichtphysikalischen Raum hinaus verschwindet, Licht aus dem vorhergehenden nichtphysikalischen Raum — die sämtlichen Räume bilden ja eine in sich geschlossene Kette — in den physikalischen Raum eintreten. Denn unser schwarzer Schirm ist ja offenbar ganz *durchlässig*, er besteht sozusagen aus *Äther*, nur daß es Äther ist, der mit einem anderen Raum kommuniziert. Wir werden also (in der späteren Mitteilung)[1]) zu zeigen haben, daß die Kirchhoffsche Lösung so beschaffen ist, daß der schwarze Schirm das Licht nur hinausläßt, aber in summa nichts hereinläßt.

Das Vorstehende ist offenbar die logisch einwandfreie Lösung des Problems des schwarzen Schirms. Daß wir zu nichtphysikalischen Räumen unsere Zuflucht nehmen mußten, ist nur die Folge davon, daß derselbe im physikalischen Raum allein betrachtet das Energieprinzip verletzen würde. Daß unser schwarzer Schirm aus Äther besteht, ist die logische Konsequenz der Kirchhoffschen Bedingung für den Brechungsindex des schwarzen Körpers.

In diesem Zusammenhang sei an die ähnliche Konstruktion des schwarzen Schirms nach Voigt und Sommerfeld erinnert, die allerdings (im Gegensatz zu unserer obigen nach Kirchhoff) nicht für *beliebige* Gestalt des beugenden Schirms, sondern nur für den speziellen Fall der *Halbebene* gilt. Sommerfelds ursprünglicher Ansatz[2]) bezog sich auf einen völlig *blanken* Schirm, wobei *Spiegelung* auftritt, die auf einen Riemannschen Doppelraum (Spiegelbild in dem nichtphysikalischen Exemplar desselben) führt. Hingegen kamen wir hier durch *stetige Fortsetzung* zu den Riemannschen Räumen. Die erstere Methode entspricht eben einem *Randwertproblem*, die letztere einem Problem, das wir passend *Sprungwertproblem* nennen können. Aus dieser ursprünglichen Sommerfeldschen

1) B, Nr. 11.

2) A. Sommerfeld, Mathematische Theorie der Diffraktion, Math. Ann. 47. S. 319. 1896.

Lösung leitete Voigt[1]) die Lösung für eine *schwarze* Halbebene ab, indem er in der ersteren nachträglich das reflektierte Licht wegstrich. Der blanke Schirm ist ja ebenfalls undurchlässig, freilich auf anderer Grundlage, wie der schwarze Schirm; läßt man also nachträglich das reflektierte Licht weg, so hätte man beide charakteristischen Eigenschaften des schwarzen Schirms beieinander, wenn man von dem angedeuteten Widerspruch zwischen der Ursache der Undurchlässigkeit des blanken und des schwarzen Schirms absehen will. Später zeigte sich, daß der so erhaltene Schirm nicht genügend schwarz ist, weshalb Voigt[2]) vorschlug, statt des Doppelraums einen mehrfachen, ja einen unendlichfachen Raum anzunehmen. Wir kommen auf diese Sommerfeld-Voigtsche Lösung noch zurück.

II. Umformung des Kirchhoffschen Flächenintegrals in ein Linienintegral.

Es erwächst uns jetzt die Aufgabe einer exakten Formulierung des genannten Sprungwertproblems, das der Kirchhoffschen Lösung zugrunde liegt. Bevor dies geschehen kann, ist jedoch ein Exkurs über eine Umformung des in (2) auftretenden Kirchhoffschen Flächenintegrals in ein Integral über die Berandung s der beleuchteten Schirmfläche f_1 nötig. Diese Umformung, die wesentlich für das Folgende ist, ist zwar leider sehr wenig bekannt, jedoch durchaus nicht neu. Sie stammt von G. A. Maggi[3]), der in ihrer Ableitung auch

1) W. Voigt, Kompendium der theoret. Physik. II. Bd. S. 768. 1896.

2) W. Voigt, Zur Theorie der Beugung ebener inhomogener Wellen an einem geradlinig begrenzten unendlichen und absolut schwarzen Schirm. Gött. Nachr. 1899, insbes. S. 3; A. Sommerfeld, Theoretisches über die Beugung der Röntgenstrahlen, Zeitschr. f. Math. u. Physik 46. 1901, insbes. S. 14; A. Wiegrefe, Über einige mehrwertige Lösungen der Wellengleichung etc. Dissertation. Leipzig, J. A. Barth, insbes. S. 12. 1912. Auszug in Ann. d. Phys. 39. S. 449. 1912.

3) G. A. Maggi, Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo, Ann. di Matem. (2) 16. 1888, insbes. II. Teil § 6; vgl. auch A. Rubinowicz, Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugungserscheinungen, Ann. d. Phys. 53. S. 257. 1917, insbes. § 1, wo, im Anschluß an Th. Youngs bekannte Vorstellungen über die Beugung („Inflexion") als eine Randwirkung, aus dieser Umformung die ausgezeichnete Rolle des Randes bei der Beugung in der Kirchhoffschen Theorie bestätigt wird.

schon den Stokesschen Integralsatz benutzte. Wir geben im nachfolgenden der prinzipiellen Wichtigkeit halber und im Hinblicke auf anderswo zu erörternde wichtige Zusammenhänge mit der Lehre von den Integralformen der mathematischen Physik eine neue systematische Ableitung dieser Umformung.

6. Der Greensche Satz für geschlossene Flächen.

Das Integral

$$\int df_Q \left\{ u^0(L,Q) \frac{\partial w(P,Q)}{\partial n} - w(P,Q) \frac{\partial u^0(L,Q)}{\partial n} \right\}$$

erstreckt über die sämtlichen Punkte Q einer *geschlossenen* Fläche f, wobei $w(P,Q) = \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}$ mit P als „Aufpunkt" (Pol), $u^0(L,Q)$ die ungestörte Lichtfunktion mit L als „Lichtpunkt" (Pol) (beides sonst überall reguläre Lösungen der Schwingungsgleichung) bedeuten, hat den Wert

$$4\pi u^0(L,P) \text{ oder Null}$$

je nachdem die Fläche f den Lichtpunkt L und den Aufpunkt P *trennt* oder nicht; n ist hierbei die von der Fläche f nach der Seite, auf welcher P liegt, hin gezogene Normale. Die Funktion u^0 muß dabei im Unendlichen in bekannter Weise verschwinden (z. B. wie $\frac{e^{-ikr_L}}{r_L}$, wenn r_L die Entfernung von L bedeutet).[1])

Man hat hier ein Beispiel eines Integrals über eine geschlossene Fläche, welches zwar nicht beständig verschwindet, immer jedoch einen von der Gestalt der Fläche unabhängigen Wert liefert. In der Tat ist die Fläche f beliebig deformierbar, sofern nur Lichtpunkt und Aufpunkt hierbei getrennt (bzw. nicht getrennt) bleiben, wenn sie anfänglich getrennt (bzw. nicht getrennt) waren. Diese Bedingung läßt sich offenbar wie folgt realisieren: Man verbinde die beiden Pole des Integranden L und P durch eine gerade Strecke und schließe die unmittelbare Umgebung dieser Strecke durch eine sie umhüllende unendlich schmale *Röhre* aus dem übrigen Volumen des Raums aus. Hat die Fläche f einen Durchstoßpunkt mit

1) Eine Ableitung dieses Satzes siehe z. B. bei H. Poincaré, Mathem. Theorie des Lichts, §§ 81, 82.

dieser Röhre (mit anderen Worten: trennt sie Lichtpunkt und Aufpunkt), so ist die dabei entstandene unendlich kleine Schnittkurve als Berandung der Fläche f aufzufassen, die also in diesem Falle aufhört, eine geschlossene Fläche zu sein. Innerhalb des restlichen Gebietes des Raumes ist (bei Festhaltung dieser Berandung, falls sie existiert) *die Fläche f frei deformierbar.* Es ist anschaulich klar, daß, wie immer auch die Deformation sich gestalte, Lichtpunkt und Aufpunkt auf diese Weise getrennt (nicht getrennt) bleiben müssen, so wie sie es anfänglich waren.

7. Anwendung auf eine ungeschlossene Fläche.

Hieraus ergibt sich: Das Integral in (2)

$$\int df_{1,Q}\left\{u^0(L,Q)\frac{\partial u(P,Q)}{\partial n} - u(P,Q)\frac{\partial u^0(L,Q)}{\partial n}\right\}$$

erstreckt über eine ungeschlossene, von der Linie s berandete Fläche f_1 *hängt nur von der Berandung ab*, wenn darunter außer s noch jene unendlich kleine Kurve s_0 verstanden wird, die eventuell auf f_1 durch die unendlich schmale Röhre LP ausgeschnitten wird.

In der Tat, ergänzt man die Fläche f_1 zu einer geschlossenen Fläche f durch eine ebenfalls von s berandete Fläche f_2, die ganz beliebig sein kann, wofern sie bloß die Röhre LP nicht durchquert, so findet man das Integral über f gleich Null, wenn f_1 keinen Durchstoßpunkt mit der LP besitzt. D. h. *der Wert des Integrals über f_1 ist gleich dem Wert des Integrals über f_2*, wenn auf der letzteren Fläche die entgegengesetzte Richtung der Normale wie die von f gewählt wird. Das Integral über f_1 hängt in diesem Fall nur von der Berandung s ab. Besitzt jedoch f_1 einen Durchstoßpunkt mit der Röhre LP, der weder mit L noch mit P zusammenfallen möge und auch nicht auf die Berandung s zu liegen komme[1]), so ist der Wert des Integrals über f nach Nr. 6 gleich $\pm 4\pi u^0(L,P)$, je nachdem die Normale n von f_1 im Durchstoßpunkt mit der Richtung von L nach P übereinstimmt oder nicht, d. h. $\cos(\overrightarrow{LP}, n) \gtrless 0$ ist. Das Integral über f_1 ist in diesem Falle bis auf den Summanden $\pm 4\pi u^0(L,P)$, welcher von der Existenz der kleinen Randkurve s_0 abhängt, gleich dem Integral über f_2; es hängt somit außer von s_0 wieder nur von s ab.

1) Vgl. Nr. 8.

Nach dem Stokesschen Satz ist aber ein Integral über eine ungeschlossene Fläche f_1 in ein Integral über die Berandung s derselben verwandelbar, wenn beliebige Deformationen der Binnenfläche von f_1 bei Festhaltung der Linie s seinen Wert nicht ändern. Sei

$$\int J\, df_1$$

dieses Integral, so hat man nach den Regeln der Vektoranalysis

$$J = (\mathrm{rot}\, \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{n})$$

anzusetzen, d. h. gleich dem skalaren Produkte aus dem Einheitsvektor der Normalen $\mathfrak{n}$ und der Rotation aus einem Vektorpotential $\mathfrak{A}$. Dieses Vektorpotential $\mathfrak{A}$ ist nur bis auf den Gradienten aus einem Skalar, $\mathrm{grad}\, \Phi$, bestimmbar, da $\mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, \Phi \equiv 0$. Wählt man irgendeinen Wert $\mathfrak{A}$, der die obige Gleichung befriedigt, so findet man in bekannter Weise, wenn f_1 keinen Durchstoßpunkt mit der LP besitzt:

$$\int J\, df_1 = \oint (d\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{A}),$$

wo $d\mathfrak{s}$ das gerichtete Element der geschlossenen Randlinie s bedeutet, deren Umlaufssinn so bestimmt wird, daß sie die Normale $\mathfrak{n}$ im positiven Koordinatensinn umkreist. Das Linienintegral $\oint$ geht längs der geschlossenen Berandung s. Besitzt jedoch die f_1 einen Durchstoßpunkt mit LP, so hat man mit $d\mathfrak{s}_0$ als gerichtetem Element der kleinen Berandung s_0:

$$\int J\, df_1 = \oint (d\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{A}) - \oint (d\mathfrak{s}_0 \cdot \mathfrak{A}).$$

Der Wert des zweiten Integrals rechts ist offenbar nach dem vorigen gleich $\mp 4\pi u^0 (L, P)$, je nachdem $\cos (\overrightarrow{LP}, n) \gtrless 0$. Also gilt

$$\int J\, df_1 = \oint (d\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{A}) \pm \{\{4\pi u^0 (L, P)\}\},$$

wo der doppelt umklammerte Term nur auftritt, wenn ein Durchstoßpunkt der f_1 mit der LP vorhanden ist. Wir nennen das Linienintegral rechts über die Berandung das *Beugungsintegral* und bezeichnen es mit $4\pi u^B (L, P)$.

Um die Umformung des Flächenintegrals in (2) in ein Randintegral vorzunehmen, hat man infolgedessen, weil die Normale n des schwarzen Schirms auf der beleuchteten Seite f_1

nach außen, d. i. gegen L hin zeigt: $\cos(\overrightarrow{LP}, n) < 0$. Mithin

$$\int df_1 \left\{ u^0(L,Q) \frac{\partial w(P,Q)}{\partial n} - w(P,Q) \frac{\partial u^0(L,Q)}{\partial n} \right\} = 4\pi u^B(L,P) - \{\{4\pi u^0(L,P)\}\},$$

somit kommt statt (2):

$$u(L,P) = u^*(L,P) + u^B(L,P). \tag{4}$$

Hierin bedeutet $u^*(L,P)$ das sogenannte *Residuum*, welches gleich $u^0(L,P)$ oder Null ist, je nachdem die Gerade $\overrightarrow{LP}$ die beleuchtete Schirmfläche nicht trifft oder trifft. Die physikalische Bedeutung des Residuums u^* ist einfach die Lichtverteilung nach den Regeln der *geometrischen Optik*: Im „Schatten" ist sie Null, im „Licht" hat sie den vollen Wert der ungestörten Lichtfunktion. Zu dieser geometrisch-optischen Verteilung tritt in der *Wellenoptik* die Beugungswelle u^B hinzu. Kirchhoff hat bewiesen[1]), daß das $\int J\, df_1$ im Grenzfalle unendlich kleiner Wellenlänge ($\lim k \to \infty$) sich auf $-\{\{4\pi u^0(L,P)\}\}$ reduziert, daß mithin $\lim_{k\to\infty} u^B \to 0$ wird. D. h. das Licht breitet sich geradlinig aus, wenn von der Beugung abgesehen werden kann. Dies ist die nachträgliche Rechtfertigung unserer Auszeichnung der geraden Verbindungslinie LP, an deren Stelle jede andere (krumme) Verbindungslinie LP als Indikatrix dafür hätte genommen werden können, ob die Fläche f_1 mit ihr einen Durchstoßpunkt besitzt und daher L und P trennt oder nicht trennt, was natürlich andere u^* und u^B in (4) zur Folge hätte.

8. Die Ausnahmefälle.

Ausgeschlossen waren bisher die Fälle, daß der Durchstoßpunkt der Fläche f_1 mit der LP nach L oder P selbst bzw. auf die Randkurve s zu liegen komme. Im ersten Fall hat man es, z. B. wenn der Aufpunkt P in die Fläche rückt, mit der bekannten Unstetigkeit (Sprung) des Flächenintegrals vom Typus (3) zu tun. Im letzteren Fall, wenn der Durchstoßpunkt auf s zu liegen kommt, ist zwar das Flächenintegral stetig, nicht aber das Linienintegral u^B. Der Aufpunkt P befindet sich dann in der Verlängerung eines vom Lichtpunkt L nach einem Randpunkte des Schirms gezogenen

1) G. Kirchhoff, Optik. Zweite Vorlesung §§ 4, 5.

Strahls, also auf der Grenze des Schattens, den der Schirm nach der geometrischen Optik werfen soll. Das Beugungsintegral u^B ist demnach an der *Schattengrenze* unstetig. Und zwar ist die Unstetigkeit von u^B gemäß (4) der Unstetigkeit von u^* an der Schattengrenze genau entgegengesetzt gleich, da u selbst, wie aus der Stetigkeit des Flächenintegrals in (2) an der Schattengrenze hervorgeht, dortselbst stetig ist. Hieraus berechnet sich, weil das Residuum u^* offenbar an der Schattengrenze die Sprünge

$$(u^*)_{\text{Licht}} - (u^*)_{\text{Schatten}} = u^0, \quad \left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right)_{\text{Licht}} - \left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right)_{\text{Schatten}} = \frac{\partial u_0}{\partial n}$$

aufweist, der Sprung von u^B wie folgt

$$(5)\quad (u^B)_{\text{Licht}} - (u^B)_{\text{Schatten}} = -u^0, \quad \left(\frac{\partial u^B}{\partial n}\right)_{\text{Licht}} - \left(\frac{\partial u^B}{\partial n}\right)_{\text{Schatten}} = -\frac{\partial u^0}{\partial n}.$$

Hingegen ist u^B an der beleuchteten Schirmfläche f_1 nach (4) stetig, da u und u^* dortselbst die gleichen Unstetigkeiten besitzen.

Es mag noch bemerkt werden, daß im Falle des Auftretens mehrerer Durchstoßpunkte der f_1 mit der LP der Wert (4) von u sich nicht ändert, wenn diese in ungerader Anzahl auftreten. Paarweise auftretende Durchstoßpunkte liefern hingegen für die Summe der $\oint (d\mathfrak{s}_0\, \mathfrak{A})$ über die bzgl. Randkurven s_0 zusammen Null, wie eine leichte Rechnung ergibt.

9. Durchführung der Transformation des Flächenintegrals in einem Spezialfalle.

Es erübrigt nunmehr die praktische Berechnung des Linienintegrals u^B. Hierzu müssen wir die ungestörte Lichtfunktion u^0 kennen; wir nehmen an, daß u^0 eine *gewöhnliche Kugelwelle* mit dem Zentrum in L sei:

$$u^0(L,P) = \frac{e^{-ikr_{LP}}}{r_{LP}}.$$

Somit schreibt sich der Integrand J des Flächenintegrals:

$$J = \frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\right) - \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}}\right).$$

Die Differentation gilt selbstverständlich für die Stelle Q der f_1. Wir schreiben J weiter als skalares Produkt:

$$J = (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{n}),$$

wobei gesetzt ist:

$$\mathfrak{B} = \frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \operatorname{grad}_Q \left(\frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \right) - \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \operatorname{grad}_Q \left(\frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \right).$$

Wir haben also die Vektorgleichung zu lösen

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$$

mit $\mathfrak{A}$ als Unbekannter.

Hierzu führen wir passend rotations-elliptische Koordinaten ein. Wir nehmen $\overrightarrow{LP}$ als die doppelte Brennweite eines konfokalen Büschels von Rotationsellipsoiden bzw. 2schaligen Rotationshyperboloiden mit den Brennpunkten in L und P. Wir nehmen die $\overrightarrow{LP}$ zur z-Achse, den Ursprung in der Mitte von LP, setzen $LP = 2f$ und haben

$$x = f \sinh\lambda \sin\mu \cos\nu, \qquad y = f \sinh\lambda \sin\mu \sin\nu,$$
$$z = f \cosh\lambda \cos\mu,$$

wobei $0 \leqq \lambda \leqq \infty$, $0 \leqq \mu \leqq \pi$, $0 \leqq \nu \leqq 2\pi$ sind.

Man findet, wenn Q irgendein Punkt ist:

$$r_{PQ} = f \cdot (\cosh\lambda - \cos\mu), \qquad r_{LQ} = f \cdot (\cosh\lambda + \cos\mu).$$

Führt man Vektorkomponenten nach den generalisierten Koordinaten $\lambda\, \mu\, \nu$ ein, so hat man

$$\mathfrak{B}_\lambda = \mathfrak{B}_x \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \mathfrak{B}_y \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \mathfrak{B}_z \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \right)$$
$$- \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \right)$$

$$\mathfrak{B}_\mu = \ldots \qquad = \ldots$$

$$\mathfrak{B}_\nu = \ldots \qquad = \ldots$$

und ferner wegen $\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ nach den Regeln des absoluten Differentialkalküls[1])

1) Für eine Maßbestimmung $ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ hat man, wenn a die Determinante, a^{ik} die Reziproken der a_{ik} sind:

$$\sqrt{a} \sum_{k=1}^{3} a^{1k}\, \mathfrak{B}_k = \frac{\partial}{\partial x_2} \mathfrak{A}_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} \mathfrak{A}_2 \quad \text{usw.}$$

$$f \sinh\lambda \sin\mu \, \mathfrak{B}_\lambda = \frac{\partial \mathfrak{A}_\nu}{\partial \mu} - \frac{\partial \mathfrak{A}_\mu}{\partial \nu},$$

$$f \sinh\lambda \sin\mu \, \mathfrak{B}_\mu = \frac{\partial \mathfrak{A}_\lambda}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathfrak{A}_\nu}{\partial \lambda},$$

$$f \frac{(\cosh^2\lambda - \cos^2\mu)}{\sinh\lambda \sin\mu} \mathfrak{B}_\nu = \frac{\partial \mathfrak{A}_\mu}{\partial \lambda} - \frac{\partial \mathfrak{A}_\lambda}{\partial \mu}.$$

Wegen der *axialen Symmetrie* des Problems gilt $\frac{\partial}{\partial \nu} = 0$, also auch $\mathfrak{B}_\nu = 0$. Der unbekannte Vektor $\mathfrak{A}$ ist, wie schon erwähnt, nur bis auf einen willkürlichen grad von einem Skalar bestimmbar.

Wegen der letzten der drei vorstehenden Gleichungen und wegen $\mathfrak{B}_\nu = 0$ sieht man, daß $\mathfrak{A}_\lambda = \frac{\partial}{\partial \lambda}(\ldots)$, $\mathfrak{A}_\mu = \frac{\partial}{\partial \mu}(\ldots)$ wird; somit kann man $\mathfrak{A}_\lambda = \mathfrak{A}_\mu = 0$ nehmen, da dies nur die Weglassung eines grad in $\mathfrak{A}$ bedeutet. Dann ergibt sich leicht aus den zwei ersten Gleichungen:

$$\mathfrak{A}_\nu = -\frac{\sin^2\mu}{f(\cosh^2\lambda - \cos^2\mu)} e^{-2ikf\cosh\lambda}.$$

Kehrt man zu kartesischen Koordinaten zurück, so bestätigt man leicht die Vektordarstellung

$$(6) \qquad \mathfrak{A} = \frac{e^{-ik(r_{PQ}+r_{LQ})}}{r_{PQ}\, r_{LQ}} \cdot \frac{1}{r_{PQ}\, r_{LQ} + (\mathfrak{r}_{PQ} \cdot \mathfrak{r}_{LQ})} \cdot [\mathfrak{r}_{PQ}\, \mathfrak{r}_{LQ}].$$

Hierin bedeuten $\mathfrak{r}_{PQ}$ bzw. $\mathfrak{r}_{LQ}$ die von P bzw. L nach Q hin gezogenen Radienvektoren; $[\mathfrak{r}_{PQ}\, \mathfrak{r}_{LQ}]$ ist deren Vektorprodukt, $(\mathfrak{r}_{PQ} \cdot \mathfrak{r}_{LQ})$ deren skalares Produkt. Daher gilt für die gesamte gestörte Lichtfunktion nach (4):

$$(7) \quad \begin{cases} u(L,P) = u^*(L,P) + \frac{1}{4\pi} \oint (d\mathfrak{S}_Q \cdot [\mathfrak{r}_{PQ}\, \mathfrak{r}_{LQ}]) \\ \qquad \frac{1}{r_{PQ}\, r_{LQ} + (\mathfrak{r}_{PQ} \cdot \mathfrak{r}_{LQ})} \frac{e^{-ik(r_{PQ}+r_{LQ})}}{r_{PQ}\, r_{LQ}}, \end{cases}$$

wobei $u^*(L,P)$ im „Licht" gleich $\frac{e^{-ikr_{LP}}}{r_{LP}}$, im „Schatten" gleich Null ist. Man beachte, daß die Unstetigkeit des Beugungsintegrals

$$u^B = \frac{1}{4\pi} \oint (d\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{A})$$

an der Schattengrenze sich durch eine Unendlichkeit von $\mathfrak{A}$ zu erkennen gibt. Wenn nämlich der Randpunkt Q auf der Strecke LP liegt, so ist

$$r_{PQ}\, r_{LQ} + (\mathfrak{r}_{PQ} \cdot \mathfrak{r}_{LQ}) = 0\,,$$

da $\mathfrak{r}_{PQ}$ und $\mathfrak{r}_{LQ}$ alsdann entgegengesetzt parallel sind; mithin $\mathfrak{N} \to \infty$.

III. Die stetige Fortsetzung der Kirchhoffschen Lösung.

10. Fortsetzung von Residuum und Beugungswelle.

Zur Beseitigung des Sprunges, den nach Nr. 4 die Kirchhoffsche Lösung an der beleuchteten Fläche des schwarzen Schirms aufweist, war in Nr. 5 die stetige Fortsetzung der daselbst auftretenden beiden Funktionszweige in fingierte nichtphysikalische Räume hinaus eingeführt worden, was gleichzeitig als physikalische Interpretation der Art und Weise, wie der schwarze Schirm das auffallende Licht „vernichtet", diente. Es handelt sich jetzt darum, die stetige Fortsetzung der beiden Teile, in welche nach (4) die Lichtfunktion zerspalten wurde, *getrennt* durchzuführen.

Nach dem in Nr. 8 Gesagten ist die Beugungswelle u^B an der beleuchteten Fläche f_1 stetig. Die stetige Fortsetzung von u^B kann daher nichts Neues liefern. Die Beugungswelle der Kirchhoffschen Theorie ist demnach *einwertig*.

Anders das geometrisch-optische Residuum u^*. Dieses weist an f_1 die gleichen Sprungwerte wie die gesamte Lichtfunktion u auf. Die stetige Fortsetzung von u ist also gleichbedeutend mit der von u^*. Die beiden Zweige von u^* sind aber volles Licht u^0 und Null. Es ist klar, daß daher die stetige Fortsetzung von u^* auf einen zweiten, nichtphysikalischen Raum führt, in welchem sich die genau *komplementäre* Lichtverteilung zu der Lichtverteilung im physikalischen Raum wiederfindet; d. h. wo „Licht" im physikalischen Raum ist, ist im nichtphysikalischen „Schatten" und umgekehrt. Die folgende Fig. 1 veranschaulicht schematisch an einem ebenen Querschnitt senkrecht zur Schirmfläche die Lichtverteilung in beiden Räumen (Blättern der Querschnittsebene).

Hierbei bedeuten: L den Lichtpunkt, f_1 die beleuchtete Seite des schwarzen Schirms, F_I bzw. F_{II} die Schattengrenze im physikalischen Raum I bzw. nichtphysikalischen Raum II (unter Schattengrenze wird hier nach Nr. 8 nur der in der Figur angedeutete Mantel eines Kegelstumpfs, der einerseits durch f_1, anderseits durch ∞ begrenzt wird, verstanden und

nicht auch die f_1 selber, die streng genommen zur Schattenbegrenzung gehören würde). Der beleuchtete Teil des Raums (das „Licht") ist in der Figur weiß gelassen, der beschattete (der „Schatten") schraffiert.

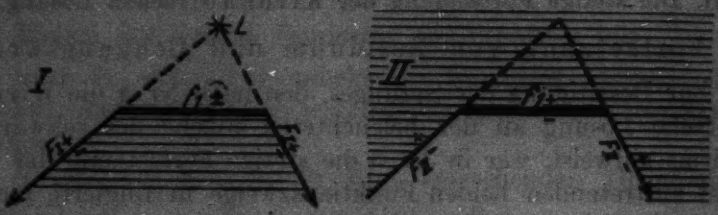


Fig. 1.

Nach dem vorstehenden genügen demnach 2 Räume (ein physikalischer und ein nichtphysikalischer) zur Unterbringung der Lichtfunktion u^* und ebenso von u. Die Kirchhoffsche Lösung u ist demnach *zweiwertig*.

11. Die Verhälnisse im nichtphysikalischen Raum.

Durch die vorstehend angegebene stetige Fortsetzung ist der Sprung, den die Lichtfunktion im physikalischen Raum aufwies, weggeschafft; dies entspricht den physikalischen Gesetzen, welche Stetigkeit verlangen, wenn der Brechungsindex (vgl. die Kirchhoffsche Forderung für den schwarzen Körper, Nr. 2 oder Nr. 5) stetig ist. Betrachten wir aber den nichtphysikalischen Raum II.

Um einen Überblick über die Lichtverteilung in beiden Räumen zu gewinnen, wollen wir einen doppelten Umlauf auf einem kleinen Kreise, dessen Mittelpunkt ein Randpunkt, dessen Ebene senkrecht zum Schirmrand sein möge, vollführen. Es genügt eine schematische Kenntnis der Lichtamplituden. Infolgedessen wollen wir die ungestörte Lichtfunktion u^0 auf diesem kleinen Kreise überall konstant annehmen. Die Kirchhoffsche Beugungswelle u^B läßt sich dann leicht ermitteln (vgl. später Nr. 28); wir wollen einstweilen das Resultat als bekannt vorwegnehmen und in die Fig. 2 eintragen.

Wir nehmen den Schirm in die Nähe des betrachteten Randpunktes R als eben an und führen auf dem Kreise einen Winkel φ ein, der entgegen dem Sinne des Uhrzeigers gezählt werde, wie es Fig. 2 a andeutet. Der Strahl, welcher den Lichtpunkt L

mit R verbindet, bilde den Winkel φ_L; wir können immer $0 < \varphi_L < \pi$ nehmen. (Vgl. Anmerkung 1) zu Nr. 19.) Die Schattengrenze bildet daher den Winkel $\varphi_L + \pi$. Der Teil des Raumes von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_L + \pi$ ist beleuchtet ($u^* = u_0$), der restliche Teil beschattet ($u^* = 0$). Wir nehmen nun den nichtphysikalischen Raum hinzu und zwar wollen wir ihn von $\varphi = -2\pi$ bis $\varphi = 0$ reichen lassen und tragen

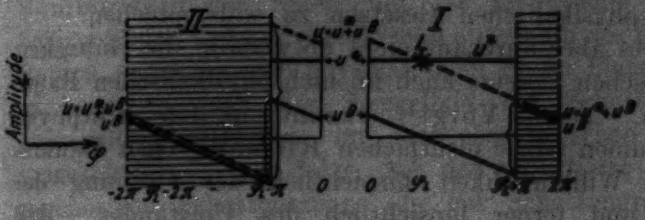


Fig. 2.

Fig. 2a.

in Fig. 2 die Winkel φ als Abszissen, die zugehörigen Amplituden als Ordinaten auf. u^* erscheint wegen der vorausgesetzten Konstanz als Parallele zur Abszissenachse, soweit es von Null verschieden ist, also im physikalischen Raum I von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_L + \pi$, im nichtphysikalischen Raum II im komplementären Teil von $\varphi = \varphi_L + \pi - 2\pi = \varphi_L - \pi$ bis $\varphi = 2\pi - 2\pi = 0$. Die Beugungswelle u^B ist einwertig, daher in beiden Räumen gleich. Und zwar weist sie an der Schattengrenze $\varphi = \varphi_L + \pi$ in beiden Räumen den gleichen Sprung [Nr. 8, Gleichung (5)]

$$u^B(\varphi_L + \pi - 0) - u^B(\varphi_L + \pi + 0) = -u^0,$$

ebenso $$u^B(\varphi_L - \pi - 0) - u^B(\varphi_L - \pi + 0) = -u^0$$

auf. Der übrige Verlauf von u^B ist, wie in der Fig. 2 angegeben, der einer geneigten Geraden, die durch den Punkt $\varphi = \varphi_L$ bzw. $\varphi = \varphi_L - 2\pi$ der Abszissenachse geht. Die Werte von u_B in $\varphi = 0$ und in $\varphi = 2\pi$ und ebenso in $\varphi = -2\pi$ und $\varphi = 0$ sind natürlich genau gleich.

Zeichnet man nun die gesamte Lichtfunktion $u = u^* + u^B$ ein, so bekommt man die gestrichelte Linie. Im physikalischen Raum I ist sie daher durchaus stetig, im nichtphysikalischen Raum jedoch an der Schattengrenze *unstetig*; man hat dort offenbar

$$u(\varphi_L - \pi - 0) - u(\varphi_L - \pi + 0) = -2u^0,$$

da ja das Residuum

$$u^*(\varphi_L - \pi - 0) - u^*(\varphi_L - \pi + 0) = -u^0$$

sich dort zum Residuum an der Schattengrenze des physikalischen Raums komplementär (anstatt gleich) verhält.

Dieses Verhalten der Funktion u scheint auf den ersten Blick unzulässig. Der Sprung, den wir mittels der stetigen Fortsetzung hinausschaffen wollten, ist nun neuerlich da; allerdings inmitten des nichtphysikalischen Raums. Dies scheint den physikalischen Gesetzen zu widersprechen.

Nun ist es aber durchaus nicht notwendig, die Gültigkeit der physikalischen Gesetze auch im nichtphysikalischen Raum zu verlangen. Schon Voigt[1]) erkannte in den nichtphysikalischen Räumen seines mehrfachen Riemannschen Raumes eine gewisse Willkürlichkeit hinsichtlich der Ordnung der Vielfachheit und ferner hinsichtlich des Umstandes, „daß man offenbar, ohne mit den Festsetzungen des Problems in Widerspruch zu kommen, in den nichtphysikalischen Teilen des Raumes abermals schwarze Körper und damit neue Verzweigungsschnitte als vorhanden annehmen kann. Dagegen ist natürlich die Anwesenheit von Licht-, d. h. Energiequellen und auch von reflektierenden Körpern in jenen Teilen durch die Definition der absolut schwarzen Körper ausgeschlossen". Sommerfeld[2]) geht im Anschluß hieran so weit, „daß man nicht genötigt wäre, den Zustand auf den fingierten Blättern den Maxwellschen Gleichungen zu unterwerfen, insoweit als durch eine andersartige Fortsetzung des Zustandes keine Reflexionsvorgänge erzeugt werden". (Sommerfeld geht bekanntlich vom blanken Schirm durch Spiegelung aus und gelangt zum schwarzen Schirm durch Streichung des reflektierten Lichts.) Voigt hat seine Auffassung dahin präzisiert, daß er die Art der Schwärze des Schirms willkürlich läßt bis auf die Bedingung, daß der Vektor des Poyntingschen Energieflusses allemal auf der Oberfläche des schwarzen Körpers nach *innen* gerichtet sein muß.

Indem wir uns den Nachweis, daß diese Bedingung bei der vorstehend skizzierten Kirchhoffschen Lösung erfüllt ist, für die spätere Mitteilung[3]) vorbehalten, sieht man auf

1) W. Voigt, Gött. Nachr. l. c. S. 3—4. 1899.
2) A. Sommerfeld, Ztschr. Math. Phys. l. c. S. 14. 1901.
3) B, Nr. 11.

Grund der zitierten Erwägungen leicht, daß der Sprung der Funktion u im nichtphysikalischen Raum *ohne Belang* ist. Die Stetigkeit der Funktion muß bloß für den physikalischen Raum verlangt werden.

Diese Ungültigkeit der physikalischen Gesetze an einer Stelle des nichtphysikalischen Raums hat allerdings zur Folge, daß die Kirchhoffsche Lösung unbrauchbar ist für die Darstellung der Reflexion am *blanken* Schirm. Fügt man nämlich wie bei Sommerfeld das Spiegelbild der Lichtquelle am (ebenen) Schirm hinzu, welches naturgemäß außerhalb des physikalischen Raums, somit im nichtphysikalischen Raum Platz finden muß, so bekommt man das Spiegelbild der Schattengrenze des physikalischen Raums im nichtphysikalischen Raum und umgekehrt. Hieraus folgt, daß das reflektierte Licht an der zugehörigen Schattengrenze (die zur Schattengrenze des einfallenden Lichtes spiegelbildlich symmetrisch liegt), im physikalischen Raum einen analogen Sprung aufweist wie das einfallende Licht an der Schattengrenze im nichtphysikalischen Raum. Wollte man diesen Sprung aber beseitigen, so könnten die *Randbedingungen* an der Schirmfläche nicht erfüllt sein, wie eine leichte Überlegung ergibt.

Hingegen ist natürlich die Sommerfeldsche zweiwertige Lösung[1]) an beiden Schattengrenzen sowohl des physikalischen als des nichtphysikalischen Raums stetig und daher zur Anwendung beim blanken Schirm geeignet. Anderseits weist diese Lösung, wie wir in Nr. 17 sehen werden, an der Fläche f_1 des schwarzen Schirms ganz andere, komplizierte Sprungwerte auf, als die Kirchhoffsche sie gemäß (3) aufweist und ist daher zur Interpretation durch das Sprungwertproblem in der Form (3), welches die einfachste Realisierung eines schwarzen Schirms ist, nicht geeignet.

12. Eine Methode zur Beseitigung des Sprunges der Kirchhoffschen Lösung im nichtphysikalischen Raum.

Es ist jedoch möglich, den Sprung der Kirchhoffschen Lösung auch im nichtphysikalischen Raum zu beseitigen, wenn man die Anwesenheit von Lichtquellen daselbst zuläßt, was allerdings mit dem Voigtschen Begriff vom schwarzen

1) A. Sommerfeld, Math. Ann. l. c. 1896.

Körper (vgl. das obenstehende Zitat) in scharfem Widerspruch steht.

Dies gelingt durch eine Methode[1]), die vom mathematischen Gesichtspunkt der im vorstehenden skizzierten Bedeutung der Kirchhoffschen Lösung am angemessensten erscheint. Sie beruht auf der konsequenten Anwendung der stetigen Fortsetzung auch in den nichtphysikalischen Räumen. Die stetige Fortsetzung, angewendet auf den Sprung an der Schattengrenze des nichtphysikalischen Raums (vgl. Fig. 2, wo jetzt die strichlierte Kurve stetig fortgesetzt zu denken ist) führt sofort auf das Folgende:

Man denke sich nicht einen, sondern *unendlich viele* nichtphysikalische Räume, die so zusammenhängen, daß sie eine Kette bilden, in deren Mitte der physikalische Raum liegt. Seien $\pm I$, $\pm II$, $\pm III$ usf. die Nummern dieser nichtphysikalischen Räume, die des physikalischen sei diesmal *Null* (anstatt *I* wie vorhin!) Dann denke man sich außer der wirklichen Lichtquelle u^0 im Raume Null, fingierte Lichtquellen von den Amplituden: $+2u^0$ in $-I$, $+3u^0$ in $-II$ usf. und 0 in $+I$, $-u^0$ in $+II$, $-2u^0$ in $+III$ usf. Das Residuum u^* ist also im Raume $-I$ (dem Raum *II* der früheren Fig. 2) von $\varphi = -2\pi$ bis $\varphi = \varphi_L - \pi$ nicht Null, sondern $+2u^0$, von $\varphi = \varphi_L - \pi$

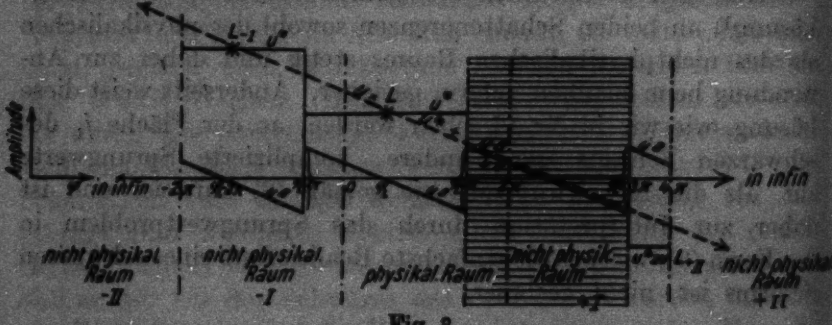


Fig. 3.

bis $\varphi = 0$ bleibt es gleich $+u^0$, im physikalischen Raume Null (dem Raum *I* der Fig. 2) ist es $+u^0$ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_L + \pi$ und Null von $\varphi = \varphi_L + \pi$ bis $\varphi = 2\pi$. Ebenso ist es Null im anschließenden Raum $+I$ von $\varphi = 2\pi$ bis $\varphi = \varphi_L + 3\pi$ und gleich $-u^0$ von $\varphi = \varphi_L + 3\pi$ bis $\varphi = 4\pi$ usf. in infinitum.

1) Der Verfasser verdankt diese Methode einem frdl. Vorschlag von Prof. W. Wirtinger in Wien.

Die vorstehende Fig. 3 läßt erkennen, daß die resultierende Gesamtfunktion $u = u^* + u^B$ (die gestrichelte Kurve) *stetig* ist. Die Bedeutung der entgegengesetzten Vorzeichen bei den Amplituden der einzelnen Lichtpunkte LL_{+II} bzw. $L_{-I}L_{+III}$ usf. ist die, daß es Lichtpunkte sind, die mit gleicher Intensität, jedoch entgegengesetzter Phase schwingen. Diese Lichtpunkte sind natürlich *kohärent* zu denken.

An dem Verhalten der Kirchhoffschen Lösung u innerhalb des physikalischen Raums ändert sich indes durch die Einführung der vorstehenden Fiktionen, wie Fig. 3 im Vergleich zu Fig. 2 zeigt, gar nichts. Es soll daher im folgenden auf die hier skizzierte Auffassung nicht weiter eingegangen werden.

IV. Die Formulierung des Sprungwertproblems.

Wir haben nunmehr alles Rüstzeug zur exakten Formulierung des der Kirchhoffschen Lösung zugrunde liegenden Sprungwertproblems beieinander. Bemerkt sei, daß dieses Problem, eine Funktion nicht durch ihre Randwerte, sondern auf Grund vorgegebener Unstetigkeiten allein zu bestimmen, in der einschlägigen mathematischen Literatur ziemlich unbekannt zu sein scheint, wenngleich seine Lösung nach den bekannten Methoden Greens sofort gelingt. Hierher gehört etwa das, was bei Pockels[1]) über die Integration der Schwingungsgleichung auf geschlossenen Flächen bei gegebenen Unstetigkeiten nach einer Idee von F. Klein ausgeführt wird.

13. Das Sprungwertproblem.

Wir beginnen im schlichten (= einfach überdeckten) physikalischen Raum.

Es sei eine Funktion $u(L, P)$ zu bestimmen unter den folgenden Bedingungen:

1. $\Delta u + k^2 u = 0$ im ganzen Raum außer in den sub 2 und 3 erwähnten Stellen.

2. u hat in L einen Pol, wo es sich wie $1/r_{PL}$ für $\lim P \to L$ verhält.

3. u hat an der berandeten Fläche f_1 die *Sprungwerte*

$$(u)^+ - (u)^- = U\,, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^- = V.$$

---

1) F. Pockels, Über die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. S. 335f. 1891.

4. u verschwindet im Unendlichen derart, daß ein noch näher anzugebendes Integral über eine unendlich ferne Fläche verschwindet. Der Greensche Satz liefert

$$\int dv\,(u\,\Delta w - w\,\Delta u) = -\,\Sigma\int df\left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right).$$

Die Integration links geht über das ganze Gebiet v, das von der oder den Flächen f begrenzt ist, über welche rechts integriert wird. Diese sind so zu wählen, daß innerhalb des Volumens v keine Singularitäten von u liegen. Die Normale n zielt ins *Innere* von v.

Wenn nun w ebenfalls eine innerhalb v reguläre Lösung der Schwingungsgleichung ist, so verbleibt

$$\Sigma\int df\left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0.$$

Für w wähle man nun eine sogenannte *Grundlösung* der Schwingungsgleichung, d. h. eine solche, welche im Punkte P einen Pol besitzt, wo sie wie $1/r_{PQ}$ für $\lim Q \to P$ unendlich wird, sonst überall regulär ist und im Unendlichen wie $1/r_{PQ}$ für $\lim Q \to \infty$ verschwindet. Eine solche Grundlösung ist durch diese Bedingungen, anders als ihr Analogon in der Laplaceschen Potentialtheorie, *nicht* eindeutig bestimmt. Denn bei der Schwingungsgleichung gibt es *überall reguläre Lösungen*, die im Unendlichen verschwinden, wie z. B. $\frac{\sin k r_{PQ}}{r_{PQ}}$. Wir wählen daher unter den möglichen Grundlösungen eine willkürlich aus und zwar:

$$w\,(P, Q) = \text{Reeller Teil von } \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}.$$

Für u nehmen wir die gemäß den Bedingungen 1—4 zu bestimmende Funktion. Daher sind aus dem Integrationsvolumen v durch umhüllende Flächen auszuschließen: L, P und die berandete Unstetigkeitsfläche f_1. Gegen das Unendliche begrenzen wir das Integrationsvolumen durch eine f_∞. Man erhält in leicht verständlicher Schreibweise:

$$\left(\int_{(f_1)} df + \int_{(L)} df + \int_{(P)} df + \int df_\infty\right)\left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0.$$

Zur Auswertung in P hat man für $\lim Q \to P$, wenn Q irgendein Punkt des Integrationsgebietes ist, zu beachten, daß alle

Teile des auf P bezüglichen Integrals verschwinden bis auf

$$\int df_Q\, u(L,Q)\cdot\left(-\frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}^{\,2}}\right),$$

welches

$$-4\pi\, u(L,P)$$

liefert. Zur Auswertung in L setze man gemäß 2.

$$u(L,Q) = 1/r_{LQ}\cdot g(Q),$$

wo $g(Q)$ für $\lim Q \to L$ regulär ist. Man erhält von dem auf L bezüglichen Integral

$$+4\pi\, w(P,L)\, g(L).$$

Zur Auswertung im Unendlichen machen wir die sub 4 vorbehaltene Annahme, daß u im Unendlichen so verschwinden soll, daß

$$\int df_\infty \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right) \to 0.$$

Wir kommen auf diese Bedingung noch näher zurück.

Dann behält man

$$\int_{(f_1)} df_Q \left\{u(L,Q)\frac{\partial w(P,Q)}{\partial n} - w(P,Q)\frac{\partial u(L,Q)}{\partial n}\right\} + 4\pi w(P,L)g(L) - 4\pi u(L,P) = 0.$$

Läßt man nun die um f_1 geschlagene geschlossene Fläche auf beiden Seiten $\pm$ der f_1 unendlich nahe gegen die f_1 zusammenschrumpfen, so kommt:

$$\int df_{1,Q}\left\{u(L,Q_+) - u(L,Q_-)\right\}\frac{\partial w(P,Q)}{\partial n_+} - \int df_{1,Q}\left\{\frac{\partial u(L,Q_+)}{\partial n_+} - \frac{\partial w(L,Q_-)}{\partial n_+}\right\} w(P,Q) + 4\pi\, w(P,L)\, g(L) - 4\pi\, u(L,P) = 0.$$

Oder nach Voraussetzung 3 mit $n \equiv n_+$:

$$\int df_{1,Q}\left\{U(L,Q)\frac{\partial w(P,Q)}{\partial n} - V(L,Q)\, w(P,Q)\right\} + 4\pi w(P,L)\, g(L) - 4\pi u(L,P) = 0.$$

In den vorausgegangenen Abschnitten hatten wir die ungestörte Lichtfunktion $u^0 L, P)$ eingeführt, die *ohne Schirm* f_1 herrschen würde. Aus obiger Gleichung folgt somit:

$$u^0(L,P) = w(P,L)\, g(L).$$

Somit ergibt sich endlich als *Lösung unseres Sprungwertproblems*

$$4\pi u(L,P) = 4\pi u^0(L,P) + \int df_{1,Q}\left\{U(L,Q)\frac{\partial w}{\partial n}(P,Q) - V(L,Q)\,w(P,Q)\right\}.$$

Macht man nun noch die speziellen Kirchhoffschen Annahmen (3) über die vorgegebenen Sprungwerte:

$$U = u^0, \quad V = \frac{\partial u^0}{\partial n},$$

so erhält man tatsächlich die *Kirchhoffsche Lösung*:

$$(2)\quad \begin{cases} 4\pi u(L,P) = 4\pi u^0(L,P) \\ \quad + \int df_{1,Q}\left\{u^0(L,Q)\dfrac{\partial w(P,Q)}{\partial n} - w(P,Q)\dfrac{\partial u^0(L,Q)}{\partial n}\right\}. \end{cases}$$

14. Die Bedingung im Unendlichen.

Damit das Integral

$$\int df_\infty\left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right)$$

verschwinde, reicht es nicht mehr (wie in der Potentialtheorie) hin, daß sich $u(L,Q)$ für $\lim Q \to \infty$ wie $1/r_{LQ}$ verhalte. Z. B. würde die Lösung

$$u' = \frac{\sin k r_{LQ}}{r_{LQ}}$$

diese letztere Bedingung erfüllen; jedoch ergibt sich mit u' für das angeführte Integral der Grenzwert

$$4\pi u'(L,P) = \frac{\sin k r_{LP}}{r_{LP}}$$

statt Null.

Hingegen ergibt $u'' = \dfrac{\cos k r_{LQ}}{r_{LQ}}$ Verschwinden des $\int df_\infty(\ldots)$.

Damit also das

$$\int df_\infty\left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right),$$

wo $w(P,Q) = \dfrac{\cos k r_{PQ}}{r_{PQ}}$ ist, verschwinde, ist *hinreichend*, daß $u(L,Q)$ sich für $\lim Q \to \infty$ wie $\dfrac{\cos k r_{LQ}}{r_{LQ}}$ verhalte.

Wir werden später (Nr. 27) tatsächlich zeigen, daß unsere Kirchhoffsche Lösung (2) im Unendlichen diese Bedingung erfüllt, daß daher die Annahme 4 in Nr. 18 zulässig war.[1])

15. Eindeutigkeit der Lösung.

Wenn alle 4 in Nr. 18 angegebenen Bedingungen befriedigt sind, dann und nur dann ist die gefundene Lösung eindeutig bestimmt. Angenommen nämlich, es gäbe zwei Lösungen $u_1(L, P)$ und $u_2(L, P)$, welche den angegebenen Bedingungen Genüge leisten, dann ist $u_3 = u_1 - u_2$ ebenfalls eine Lösung, die *überall regulär* ist und auch die Bedingung

$$\int df_\infty \left(u_3 \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u_3}{\partial n} \right) = 0$$

befriedigt. Nach dem Greenschen Satz gilt für eine solche Lösung (vgl. Nr. 13):

$$4\pi u_3(P) = \int df_\infty \left(u_3 \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u_3}{\partial n} \right) = 0,$$

d. h. u_3 muß identisch Null sein oder $u_1 = u_2$.

V. Das Sprungwertproblem für das Beugungsintegral nach Kirchhoff und Sommerfeld.

Es handelt sich jetzt um den Übergang zu den mehrfachen Riemannschen Räumen, während das Vorstehende sich auf den einfachen physikalischen Raum bezog. Dabei wird sich Gelegenheit ergeben, auch die Sommerfeld-Voigtsche Lösung für die schwarze Halbebene der hier dargelegten Theorie einzugliedern.

16. Umgruppierung des Sprungwertproblems.

Hierzu ist vor allem der Übergang von der Gesamtfunktion u auf die Beugungswelle u^B notwendig: *Das Residuum u^* kann nach den Regeln der geometrischen Optik immer als bekannt vorausgesetzt werden.*

Der Sprung von u^B liegt nach Nr. 8 nicht mehr an der beleuchteten Schirmfläche f_1, sondern an der Schattengrenze F_1. Wir erhalten so *eine andere Form des Sprungwertproblems.*

---

1) Über die Schwierigkeiten, die das Unendlichferne bei der Schwingungsgleichung bereitet, vgl. z. B. Pockels, l. c. S. 314—316.

Da u^B einwertig ist, können wir noch immer im schlichten physikalischen Raum operieren. Die gesuchte Funktion u^B muß also die 4 Bedingungen erfüllen:

1. $\Delta u^B + k^2 u^B = 0$ außer an der Schattengrenze F.
2. u^B hat nirgends einen Pol,
3. u^B hat an der Schattengrenze vorgegebene Sprungwerte[1]):

$$(u^B)_+ - (u^B)_- = \mathfrak{u}, \qquad \left(\frac{\partial u^B}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial u^B}{\partial n}\right)_- = \mathfrak{v},$$

4. u^B verschwindet im Unendlichen so, daß das

$$\int df_\infty \left(u^B \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u^B}{\partial n}\right) \to 0.$$

(Diese Bedingung muß auch u^B erfüllen, da u und u^* sie erfüllen und $u = u^B + u^*$.)

Man findet, genau wie in Nr. 13, als eindeutige Lösung dieses Sprungwertproblems:

$$(8) \qquad 4\pi u^B(P) = + \int dF_Q \left\{\mathfrak{u}(L,Q) \frac{\partial w(P,Q)}{\partial n} - w(P,Q)\,\mathfrak{v}(L,Q)\right\}.$$

Hierbei ist die Normale $n = n_+$ der Schattengrenze F vom „Schatten" ins „Licht" gerichtet.

17. Das Sprungwertproblem für die Sommerfeldsche Lösung.

Das vorstehend entwickelte Sprungwertproblem für das Beugungsintegral ist einer Ausdehnung auf *mehrfache* Riemannsche Räume fähig. Man gelangt dadurch zu dem allgemeinen Ansatz für die Sommerfeldsche Lösung für *Schirme beliebiger Gestalt*, während diese bekanntlich bisher nur für die Halbebene bekannt ist.

Wir nehmen also z. B. eine zweiwertige Funktion $v^B_{(3)}$. Bei der Sommerfeldschen Lösung sind, wie schon in Nr. 11 erwähnt, alle Sprünge der gesamten Lichtfunktion $v_{(3)}$ auch im nichtphysikalischen Raum vermieden. Wir werden wieder

$$v_{(3)} = v^B_{(3)} + u^*$$

---

1) Die Kirchhoffschen Sprungwerte sind:

$$\mathfrak{u} = -u^0, \qquad \mathfrak{v} = -\frac{\partial u^0}{\partial n}.$$

Ist insbesondere u^0 eine Kugelwelle, so ist $\partial u^0/\partial n$ an der Schattengrenze Null, also $\mathfrak{v} = 0$.

ansetzen, wo u^* das geometrisch-optische Residuum ist, das gemäß dem in Nr. 10 Gesagten so in den nichtphysikalischen Raum fortzusetzen ist, daß die Belichtung dortselbst komplementär ist zu der im physikalischen Raum. Bezeichnen wir die Schattengrenze des physikalischen Raums mit F_I, die des nichtphysikalischen Raums mit F_II, so erstreckt sich also der Wert $u^* = u^0$ von der „$-$"-Seite der F_II durch die Schirmfläche hindurch bis zur „$+$"-Seite der F_I, der Wert $u^* = 0$ von der „$-$"-Seite der F_I zur Schirmfläche und weiter bis zur „$+$"-Seite der F_II (Fig. 1). Diese Sprungwerte von u^* müssen an *beiden* Schattengrenzen durch entsprechende Sprungwerte von $v^B_{(2)}$ kompensiert werden, während bei der Kirchhoffschen Lösung u^B nur der Sprung an F_I kompensiert wird. Man hat daher für $v^B_{(2)}$ die Bedingungen:

1. $\Delta v^B_{(2)} + k^2 v^B_{(2)} = 0$ außer an den beiden Schattengrenzen F_I und F_II.

2. $v^B_{(2)}$ hat nirgends einen Pol.

3. $$(v^B_{(2)})_+ - (v^B_{(2)})_- = -u^0, \quad \left(\frac{\partial v^B_{(2)}}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial v^B_{(2)}}{\partial n}\right)_- = -\left(\frac{\partial u^*}{\partial n}\right) \text{ an } F_\mathrm{I},$$

$$(v^B_{(2)})_+ - (v^B_{(2)})_- = +u^0, \quad \left(\frac{\partial v^B_{(2)}}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial v^B_{(2)}}{\partial n}\right)_- = +\left(\frac{\partial u^0}{\partial n}\right) \text{ an } F_\mathrm{II}\ ^1),$$

4. $v^B_{(2)}$ verschwindet im Unendlichen, so daß ein noch näher anzugebendes Integral verschwindet.

Man bemerke zur Bedingung 3. den Unterschied gegen die entsprechende Bedingung für das Kirchhoffsche u^B. Wegen dessen *Einwertigkeit* hat man *sowohl an* F_I *wie an* F_II

$$(u^B)_+ - (u^B)_- = -u^0, \quad \left(\frac{\partial u^B}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial u^B}{\partial n}\right)_- = -\frac{\partial u^0}{\partial n},$$

weshalb nur der Sprung von u^* an F_I, nicht auch der an F_II kompensiert wird. Anderseits sieht man aus dieser *Zweiwertigkeit* des Sommerfeldschen Beugungsintegrals $v^B_{(2)}$, daß

1) Wenn u^0 eine Kugelwelle ist, so ist $\partial u^0/\partial n$ an beiden Schattengrenzen Null.

es im physikalischen Raum *I* betrachtet an der Schirmfläche f_1 nicht stetig ist, wie das Kirchhoffsche u^B. Infolgedessen hat die Sommerfeldsche Gesamtlösung $v_{(1)} = u^* + v^B_{(2)}$ an f_1 im physikalischen Raum *I* betrachtet nicht bloß den Sprung von u^* allein, wie die Kirchhoffsche $u = u^* + u^B$. Während also nach Kirchhoff der schwarze Schirm an seiner beleuchteten Fläche f_1 das einfallende Licht u^0 *restlos* ableitet und nur vom Rand der Fläche f_1 ausgehend eine Beugungswelle u^B emittiert (vgl. Abschnitt II), welche im physikalischen Raum die gleiche ist wie im nichtphysikalischen, bewirkt nach Sommerfeld der schwarze Schirm, im physikalischen Raum betrachtet, *keine* restlose Ableitung des einfallenden Lichts, da die Differenz der Gesamtamplituden $v_{(1)}^+ - v_{(1)}^-$ an beiden Seiten des Schirmes nicht mehr u^0, sondern wie wir aus Nr. 29 sehen können, kleiner als u^0 ist. Dabei entspringt die Beugungswelle nach Sommerfeld[1]) ebenfalls am Rande der Schirmfläche (also an der beiden Räumen *gemeinsamen* Verzweigungslinie). Im Gegensatz zur Kirchhoffschen Beugungswelle ist jedoch die Sommerfeldsche zweiwertig; daher weist sie im physikalischen Raum allein betrachtet an der Schirmfläche einen Sprung auf, was auf die Existenz einer leuchtenden Doppelschicht daselbst, oder auf die nicht restlose Vernichtung des auffallenden Lichts hinausläuft. Die Sommerfeldsche zweiwertige Lösung ist daher zur Darstellung eines *genügend* schwarzen Schirms nicht geeignet.

Diese ungenügende Schwärze veranlaßte Voigt[2]), zu einer *N*-wertigen Lösung, ja zu einer unendlichwertigen zu greifen. Der eigentliche Grund hierfür ist, wie wir sehen werden, der, daß der Sprung der Beugungswelle an der Schirmfläche hierdurch zwar nicht beseitigt, jedoch verkleinert wird. Das Problem des *blanken* Schirms, von dem Sommerfeld ausging, bleibt natürlich nach wie vor auf die zweiwertige Lösung beschränkt. Aber von diesem Problem zum Problem des *schwarzen* Schirms scheint eben nicht der einfache Weg zu führen, durch Streichung des reflektierten Lichts die Eigenschaften der Schwärze (keine Durchlässigkeit, keine Reflexion) sozusagen aus denen der

1) A. Sommerfeld, Math. Ann. 47. S. 369 f. 1896.
2) W. Voigt, Gött. Nachr. 1899 u. Wiegrefe, Dissertation. S. 12/3.

Blankheit (keine Durchlässigkeit) *additiv* zusammenzusetzen. Der Voigtsche Ausweg, statt *eines* nichtphysikalischen Raums deren *mehrere* einzuschalten, empfiehlt sich nach Sommerfeld[1]) „durch die Überlegung, daß die Lichtbewegung um so weniger Grund haben wird zum physikalischen Blatt zurückzukehren, je mehr Raum zur Ausbreitung ihr außerhalb des physikalischen Blattes dargeboten wird". Man sieht, daß es von dieser Auffassung nur mehr ein Schritt ist zu der hier entwickelten Auffassung der Beugung am schwarzen Schirm als eines *Sprungwertproblems* (im physikalischen Raum allein betrachtet), das nichts mit dem ursprünglichen *Randwertproblem* des blanken Schirms zu tun hat. Die einfachste Lösung des Sprungwertproblems ist aber die Kirchhoffsche mit einwertigem Beugungsintegral; wir werden später sehen, daß erst das ∞-wertige Voigtsche Beugungsintegral einen ähnlichen Grad von Schwärze liefert wie das Kirchhoffsche. (Nr. 29.)

Wünscht man in dem obigen Sprungwertproblem statt zweier Räume N Räume einzuführen, derart daß der erste (physikalische) Raum mit dem zweiten (nichtphysikalischen), dieser mit dem dritten usf., endlich der N-te (nichtphysikalische) wieder mit dem ersten (physikalischen) zusammenhängt, so hat man statt $v^B_{(2)}$ ein $v^B_{(N)}$ zu bestimmen, welches die zu 1, 2, 4 analogen Bedingungen und überdies statt 3 die Bedingung erfüllt:

$$3.\quad (v^B_{(N)})_+ - (v^B_{(N)})_- = -u^0, \quad \left(\frac{\partial v^B_{(N)}}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial v^B}{\partial n}\right)_- = -\frac{\partial u^0}{\partial n} \text{ an } F_1$$

$$(v^B_{(N)})_+ - (v^B_{(N)})_- = +u^0, \quad \left(\frac{\partial v^B_{(N)}}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial v^B}{\partial n}\right)_- = +\frac{\partial u^0}{\partial n} \text{ an } F_N$$

und an $F_{\text{II}}\, F_{\text{III}} \ldots F_{N-1}$ stetig.

In den zwischen I und N zwischengeschalteten Räumen $II, III \ldots N-1$ ist nämlich u^* durchaus Null, daher $v^B_{(N)}$ an den bezüglichen Schattengrenzen stetig.

18. Aufstellung einer Integralgleichung.

Um das vorstehend skizzierte Sprungwertproblem nach den Methoden des Greenschen Satzes wie in Nr. 13 zu lösen, bedarf es der Kenntnis der *Grundlösung* $w_{(N)}(P, Q)$ für den N-fachen Riemannschen Raum.

1) A. Sommerfeld, Ztschr. Math. Phys. 46. S. 14. 1901.

Diese Grundlösung ist unbekannt. Ja es stellt sich sogar heraus, daß sie geradezu identisch wird mit der gesuchten Gesamtfunktion

$$v_{(N)}(P, Q)$$

sofern P statt L als deren Pol angenommen wird. Um dies einzusehen, bedenke man, daß $v_{(N)}(L, Q)$ genau die Bedingungen erfüllt, die für eine Grundlösung zu verlangen sind. Es besitzt nämlich $v_{(N)}(L, Q)$ keine Unstetigkeit und keinen andern Pol als L, da ja $v_{(N)} = u^* + v^B_{(N)}$ und $v^B_{(N)}$ keinen Pol, u^* nur den Pol L im physikalischen Raum hat. Demgemäß ist $v_{(N)}$ eine Lösung der Schwingungsgleichung, die im Punkte L des physikalischen Raums I ihren einzigen Pol hat und insbesondere auch in den korrespondierenden Punkten $L_{II}, L_{III} \ldots L_N$ der nichtphysikalischen Räume regulär ist. In dem Pol L wird $v_{(N)}$ wie $1/r_{LQ}$ für $\lim Q \to L$ unendlich, da u^* dort in dieser Weise unendlich wird. Im Unendlichen verschwindet u^* und gemäß Bedingung 4 der Nr. 17 auch $v^B_{(N)}$ wie $1/r_{LQ}$ für $\lim Q \to \infty$ Dies sind sämtliche an eine Grundlösung zu stellende Anforderungen. Die Funktionen $v_{(N)}(P, Q)$ und $w_{(N)}(P, Q)$ können sich also höchstens um eine überall reguläre, im Unendlichen verschwindende Lösung der Schwingungsgleichung unterscheiden. Infolgedessen ist es erlaubt, geradezu zu setzen:

$$w_{(N)}(P, Q) = v_{(N)}(P, Q).$$

Vorausgesetzt ist dabei nur, daß die Lösung $v_{(N)}$ existiert.

Angenommen, es wäre $v_{(N)}$ bekannt; dann kann man die Lösung des Sprungwertproblems für $v^B_{(N)}$ ansetzen. Wir nehmen im folgenden der Einfachheit halber $N = 2$.

Man findet nach der Methode von Nr. 13[1]) [vgl. Nr. 16 (8)]:

$$4\pi v^B_{(2)}(P) = -\int dF_{I,Q}\left\{u^0(L,Q)\frac{\partial w_{(2)}(P,Q)}{\partial n} - w_{(2)}(P,Q)\frac{\partial u^0(L,Q)}{\partial n}\right\}$$
$$+\int dF_{II,R}\left\{u^0(L,R)\frac{\partial w_{(2)}(P,R)}{\partial n} - w_{(2)}(P,R)\frac{\partial u^0(L,R)}{\partial n}\right\}.$$

1) Hierbei wird ein

$$\int df_\infty\left(v_{(2)}\frac{\partial w_{(2)}}{\partial n} - w_{(2)}\frac{\partial v_{(2)}}{\partial n}\right)$$

gemäß Bedingung (4) von Nr. 17 vernachlässigt. Die f_∞ erstreckt sich dabei durch beide Räume hindurch.

Ordnet man die Punkte Q der Schattengrenze F_{II} des physikalischen Raums I und die Punkte R der Schattengrenze F_{II} des nichtphysikalischen Raums II einander so zu, daß „zusammenfallende" Punkte korrespondieren und bezeichnet diese, um sie auseinanderzuhalten, mit Q_I bzw. Q_{II}, so wird:

$$4\pi v^B_{(2)}(P) = -\int dF_Q\, u^0(L,Q)\left\{\frac{\partial w_{(2)}(P,Q_I)}{\partial n} - \frac{\partial w_{(2)}(P,Q_{II})}{\partial n}\right\}$$
$$+\int dF_Q\, \frac{\partial u^0(L,Q)}{\partial n}\left\{w_{(2)}(P,Q_I) - w_{(2)}(P,Q_{II})\right\}.$$

Hier ist wegen der Einwertigkeit von u^0 für $u^0(L,Q_I) = u^0(L,Q_{II})$ kurz $u^0(L,Q)$ geschrieben. Bedenkt man

$$w_{(2)}(P,Q) = v_{(2)}(P,Q) = v^B_{(2)}(P,Q) + u^0(P,Q),$$

so kommt:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} 4\pi v_{(2)}(L,P) = 4\pi u^0(L,P) &- \int dF_Q\, u^0(L,Q)\left\{\frac{\partial v_{(2)}(P,Q_I)}{\partial n} - \frac{\partial v_{(2)}(P,Q_{II})}{\partial n}\right\} \\ &+ \int dF_Q\, \frac{\partial u^0(L,Q)}{\partial n}\left\{v_{(2)}(P,Q_I) - v_{(2)}(P,Q_{II})\right\}. \end{aligned}\right.$$

Da die Funktion $v_{(2)}$ unbekannt ist, kann man (9) als eine *Integralgleichung* für $v_{(2)}$ auffassen. *Dies ist der allgemeine Ansatz für das Sommerfeldsche Beugungsproblem bei beliebiger Gestalt des schwarzen Schirms.* Wir bemerken noch, daß für $N > 2$ die Formel (9) für $v_{(N)}$ unverändert gilt, wenn an Stelle des Index II der Index N genommen wird. *Für $N = 1$ bekommt man die Kirchhoffsche Formel* [vgl. (8)], wenn $w(P,Q)$ mit $u^0(P,Q)$ identifiziert wird (Grundlösung = ungestörte Lichtfunktion), was offenbar gestattet ist; hierbei entfallen selbstverständlich die auf die Punkte Q_{II} bezüglichen Werte des Integranden und es verbleiben nur die auf $Q = Q_I$ bezüglichen. *Man hat hiermit also das Sommerfeldsche und das Kirchhoffsche Beugungsproblem für den schwarzen Schirm bei beliebiger Gestalt auf eine gemeinsame Formel reduziert.*

VI. Das Problem der schwarzen Halbebene.

In der *Integralgleichung* (9) haben wir den allgemeinen Ansatz für das Problem der Beugung am schwarzen Schirm beliebiger Gestalt, welcher sowohl die Kirchhoffsche als die Sommerfeld-Voigtsche Lösung umfaßt.

Im nachfolgenden wollen wir jedoch das Problem der Beugung am schwarzen Schirm auf Grund der von uns zugrunde

gelegten Auffassung desselben als eines Sprungwertproblems für einen speziellen Fall, den der schwarzen Halbebene, nach einer anderen Methode mittels *Reihenentwicklung* lösen. In diesem speziellen Falle ist nicht nur die Kirchhoffsche Lösung (2), sondern auch die Sommerfeldsche Lösung schon bekannt und wir können daher die zu findenden Resultate nachträglich an diesen bekannten Formeln verifizieren.

19. Die Kirchhoffsche Lösung für die Halbebene.

Wir geben zunächst diese bekannten Formeln an. Die Halbebene sei die zx-Ebene für $x > 0$; die Normale sei die $+y$-Achse. Die Berandung ist die z-Achse, und zwar ist sie von $z = -\infty$ bis $z + \infty$ zu orientieren, wenn sie zusammen mit dem Unendlichen die Normale im positiven Sinne umkreisen soll. Wir führen in der xy-Ebene Zylinderkoordinaten ϱ, φ ein:

$$x = \varrho \cos \varphi, \qquad y = \varrho \sin \varphi.$$

Die Koordinaten des Lichtpunktes seien: $x_L = \varrho_L \cos \varphi_L$, $y_L = \varrho_L \sin \varphi_L$, z_L, wobei $0 < \varphi_L < \pi$ sei[1]); die des Aufpunkts seien: $x_P = \varrho_P \cos \varphi_P$, $y_P = \varrho_P \sin \varphi_P$, z_P.

Wir führen ferner die Bezeichnung

$$\vartheta = \varphi_L - \varphi_P$$

ein. Dem Werte

$$\vartheta = -\pi$$

entspricht also die Schattengrenze $\varphi_P = \varphi_L + \pi$. Dann erhält man im Falle, daß u^0 eine gewöhnliche Kugelwelle

$$u^0(L, Q) = \frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}}$$

ist, aus (7) für das Kirchhoffsche Beugungsintegral u^B über die Berandung (z-Achse):

$$(10) \qquad 4\pi u^B = \int_{-\infty}^{\infty} db \, \frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)} \, \frac{\sin \vartheta}{\cosh b + \cos \vartheta},$$

1) Der Grenzfall $\varphi_L = 0$ ist offenbar unmöglich; der Grenzfall $\varphi_L = \pi$ ist auszuschließen, weil die Halbebene dann beiderseitig beleuchtet wäre, also der schwarze Schirm dann sozusagen nicht existierte. Der Fall $\pi < \varphi_L < 2\pi$ läßt sich in einfacher Weise durch Änderung der Definition des Winkels φ auf $0 < \varphi_L < \pi$ reduzieren.

wo gesetzt ist:

$$R^2(b) = \varrho_P^2 + \varrho_L^2 + 2\varrho_P\varrho_L \cosh b + (z_P - z_L)^2 .$$

Die Kirchhoffsche Lösung ist dann im „Licht", d. i. von $\varphi_P = \varphi_L - \pi$ oder $\vartheta = +\pi$ (Schattengrenze des nicht physikalischen Raums) bis zu $\varphi_P = \varphi_L + \pi$ oder $\vartheta = -\pi$ (Schattengrenze des physikalischen Raums):

$$u = u^0 + u^B , \qquad -\pi < \vartheta < \pi .$$

Der „Schatten" reicht über den Rest des nichtphysikalischen Raums, d. i. von $\varphi_P = -2\pi$ oder $\vartheta = 2\pi + \varphi_L$ bis zu $\varphi_P = \varphi_L - \pi$ oder $\vartheta = +\pi$ *einerseits* und über den Rest des physikalischen Raums, d. i. von $\varphi_P = \varphi_L + \pi$ oder $\vartheta = -\pi$ bis zu $\varphi_P = 2\pi$ oder $\vartheta = \varphi_L - 2\pi$ *anderseits*. Da aber die Funktionen u, u^B periodische Funktionen von $\varphi_L - \varphi_P = \vartheta$ sind, denen wegen der Zweiwertigkeit von u^* (u^B selbst ist

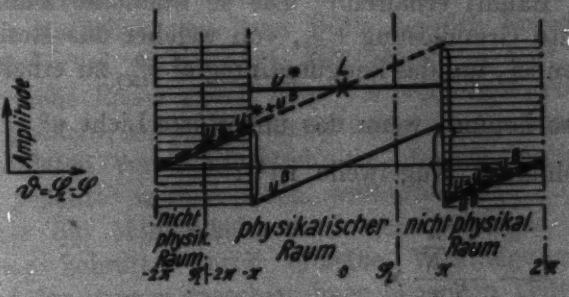


Fig. 4.

einwertig) die Periode 4π zukommt, kann man den Schatten des nichtphysikalischen Raumes bei $\vartheta = 2\pi$ *abschneiden* und an den Schatten des physikalischen Raums von $\vartheta = \varphi_L - 2\pi$ an bis $\vartheta = -2\pi$ *anschließen* lassen, wobei offenbar das Stück von $\vartheta = 2\pi$ bis $\vartheta = 2\pi + \varphi_L$ ersetzt ist durch das Stück von $\vartheta = 2\pi - 4\pi = -2\pi$ bis $\vartheta = 2\pi + \varphi_L - 4\pi = \varphi_L - 2\pi$, also von der *Periode* 4π *der Funktion* $u = u^* + u^B$ *Gebrauch gemacht ist*. In diesem neuen „Schatten" hat man:

$$u = u^B , \qquad (\pi < |\vartheta| < 2\pi) .$$

Die Fig. 4 veranschaulicht schematisch die bezüglichen Verhältnisse.

Die angewendete Symbolik ist die gleiche wie in Fig. 2 u. 3.

20. Die Sommerfeldsche Lösung für die Halbebene.

Die Sommerfeldsche Lösung[1]) $v_{(N)}$ gewinnt man, wie schon in Nr. 18 bemerkt, wenn die „Grundlösung" der Schwingungsgleichung für den betreffenden N-fachen Riemannschen Raum bekannt ist, indem man sie dieser gleich setzt. Es kommt also alles darauf an, diese Grundlösung zu finden.

Die Methode Sommerfelds besteht in folgendem: Die Grundlösung für den einfachen Raum ist $e^{-ikr_{LP}}/r_{LP}$ mit dem Pol in L. Sommerfeld stellt diese durch ein Cauchysches Integral in der komplexen Ebene des Winkels φ dar, in welchem periodische Funktionen dieses Winkels auftreten. Nachher ersetzt er unter diesem Integral die Periode 2π durch die Periode $2\pi N$. [Der Riemannsche Raum für die Halbebene wird nämlich einfach durch N-malige Umkreisung der begrenzenden Kante (an Stelle der einmaligen Umkreisung im schlichten Raum) erhalten.] Die so erhaltene Funktion ist die gesuchte Grundlösung $v_{(N)}$, von welcher das Residuum u^0 abzuspalten ist, um das Beugungsintegral $v^B_{(N)}$ zu erhalten. Auf diese Weise kommt, wenn das ungestörte Licht $u^0 = \frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}}$ eine gewöhnliche Kugelwelle ist[2]):

$$(11)\quad v^B_{(N)} = -\frac{\sin\frac{\pi}{N}}{N\pi} \times \int_0^\infty db\, \frac{e^{-ikR(b)}}{Rb} \frac{\cos\frac{\vartheta}{N}\cosh\frac{b}{N} - \cos\frac{\pi}{N}}{\left(\cos\frac{\vartheta}{N}\cosh\frac{b}{N} - \cos\frac{\pi}{N}\right)^2 + \sin^2\frac{\vartheta}{N}\sinh^2\frac{b}{N}}.$$

Insbesondere für $N = 2$[3])

$$(11a)\quad v^B_{(2)} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty db\, \frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)} \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}\cosh\frac{b}{2}}{\cosh b + \cos\vartheta}.$$

---

1) A. Sommerfeld, Gött. Nachr. S. 267. 1895 (für $N = 2$); Math. Ann. 47. 1896; vgl. auch H. S. Carslaw, London Math. Soc. Proceed. 30. S. 130. 1899.

2) Vgl. Wiegrefe, Dissertation, § 4 (in komplexer Form).

3) Carslaw, a. a. O.

Die Gesamtlösung ist

$$v_{(N)} = u^0 + v^B_{(N)} \quad \text{für} \quad -\pi < \vartheta < \pi$$
$$= \quad v^B_{(N)} \quad \text{für} \quad \pi < |\vartheta| < N\pi,$$

Bemerkt sei, daß beim *blanken Keil* auch gebrochene Werte von N anstatt ganzzahliger betrachtet werden. (χ/π anstatt N, wobei χ kein ganzes Vielfaches von π ist; der physikalische Raum, d. i. der Raum außerhalb des Keils reicht dann bloß von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\chi$ anstatt $\varphi = 2\pi$.) Für den *schwarzen* Schirm ist *dies jedoch ohne jede Bedeutung*, was wir hier hervorheben, da in der Literatur die Lösung mit χ/π anstatt N irrtümlich als Lösung für den schwarzen Keil interpretiert worden ist. In unserer Auffassung der schwarzen Beugung ist die Gestalt des nichtbeleuchteten Teils des schwarzen Schirms vollkommen gleichgültig, *da es nur auf die Berandung des beleuchteten Teils ankommt*. Sogar die Binnenfläche des beleuchteten Teils ist im wesentlichen bedeutungslos, abgesehen natürlich von ihrer Rolle bei der Begrenzung des Schattens.[1]) Vgl. auch Voigt, Gött. Nachr. a. a. O. S. 4: „Ist der mehrfache Raum durch seine Verzweigungskurven charakterisiert gedacht, so bleibt immer noch die Gestalt der durch sie umrandeten Verzweigungsschnitte, die als dünne schwarze Schirme gedeutet werden sollen, willkürlich . . . Ja es bietet sich sogar die Möglichkeit, statt eines einzigen *zwei verschiedene* Schnitte durch dieselbe Verzweigungskurve zu legen und den ganzen zwischen ihnen liegenden Teil des Raums als einen massiven schwarzen Körper zu betrachten. Die Lösung, die zunächst dem unendlich dünnen Schirm angepaßt war, muß dann auch die Beugung an jenem Körper darstellen." Über die Unverwendbarkeit des nicht ganzen χ/π für schwarze Schirme vgl. auch Wiegrefe.[2])

1) Man beachte hierbei, daß in unserer Auffassung der schwarze Schirm aus *Äther* besteht, welcher Äther allerdings mit andern (nichtphysikalischen) Räumen kommuniziert. Nur die Randlinie des beleuchteten Teils des Schirms ist als Verzweigungslinie allen diesen Räumen und auch dem physikalischen Raum gemeinsam. Infolgedessen verhält sich der Schirm im physikalischen Raum *undurchsichtig* für das auffallende Licht, jedoch *durchsichtig* (!) für die Beugungswelle, da diese an der gemeinsamen Verzweigungslinie aller Räume entspringt.

2) Wiegrefe, a. a. O. § 2. S. 13; § 7. S. 55.

Wir geben zum Schlusse noch den Grenzwert von (11) für $N = \infty$ (Voigtsche *schwärzeste* Lösung).

$$(11\,b) \qquad v^B_{(\infty)} = -2\int_0^\infty db\, \frac{e^{-(k\,R(b)}}{R(b)}\, \frac{b^2 - \vartheta^2 + \pi^2}{(b^2 - \vartheta^2 + \pi^2)^2 + 4\vartheta^2 b^2}\,.$$

Die Verhältnisse für $N = 2$ bzw. für $N = \infty$ mögen die folgenden schematischen Figg. 5 bzw. 6 veranschaulichen:

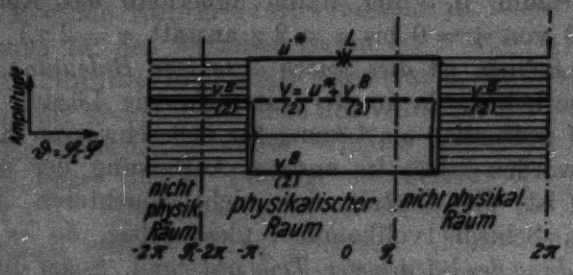


Fig. 5. ($N = 2$)

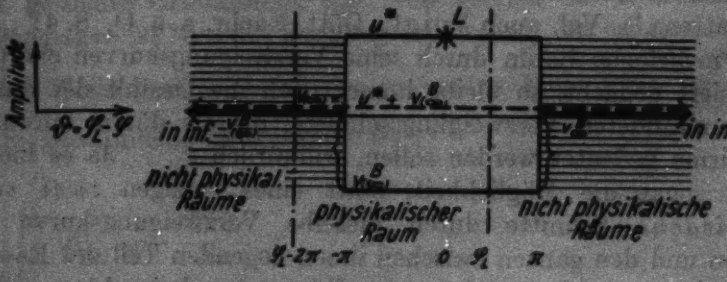


Fig. 6. ($N = \infty$)

Man erkennt durch Vergleich von Fig. 5 mit Fig. 6, wie die Vermehrung der Zahl N die resultierende Amplitude $v_{(N)}$ herunterdrückt. (Zunahme der Schwärze.) Durch Vergleich von Fig. 4 mit Fig. 6 erkennt man die Überlegenheit der Kirchhoffschen Lösung hinsichtlich Schwärze durch den *scharfen Abstieg* der resultierenden Amplitude u wenigstens im Schatten des physikalischen Raums ($\vartheta = \varphi_L - 2\pi$ bis $\vartheta = -\pi$). Man sieht auch das *symmetrische* Verhalten der Sommerfeldschen $v^B_{2))}$ an beiden Seiten des Schirms $\vartheta = \varphi_L$ und $\vartheta = \varphi_L - 2\pi$ im Gegensatz zur Kirchhoffschen *Antisymmetrie*. Auf diese Symmetrie geht es zurück, daß die Sommerfeldsche Lösung nach Hinzufügung des Spiegelbildes von L *zur Erfüllung der*

Randbedingungen an beiden Seiten der *blanken* Schirmfläche zu gebrauchen ist, während dies die Kirchhoffsche wegen ihrer Antisymmetrie nicht tut. Daher ist die letztere für den *blanken Schirm* nicht zu brauchen.

22. Ansatz der Reihenentwicklung für das Sprungwertproblem bei der Halbebene.

Wir wollen nunmehr das Kirchhoffsche Beugungsintegral u^B und z. B. das zweiwertige Sommerfeldsche $v^B_{(2)}$ mittels Reihenentwicklung aus dem Sprungwertproblem bestimmen.

Von den 3 Koordinaten ϱ_P, ϑ, z_P ist ϑ diejenige Variable, welche an den Schattengrenzen konstante Werte annimmt. Die Sprungwerte treten also für kritische Werte von ϑ auf. Demgemäß denken wir uns u^B als eine Fouriersche Reihe nach ϑ angesetzt:

$$u^B = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_n a_n \cos n\vartheta + \sum_n b_n \sin n\vartheta . \tag{12}$$

Dabei sind die a, b Funktionen von ϱ_P, z_P. Die Funktion u^B besitzt natürlich, als einwertig, die Periode 2π in ϑ. Die Entwicklung (12) gelte für das Intervall $(-\pi, \pi)$.

Das Sprungwertproblem verlangt:

1. $\Delta u^B + k^2 u^B = 0$.
2. u^B hat keinen Pol.
3. $u^B(-\pi + 0) - u^B(-\pi - 0) = -u^0(-\pi)$
   $u^B(+\pi + 0) - u^B(+\pi - 0) = -u^0(+\pi)$,

während $\frac{\partial u^B}{\partial n}$ *stetig ist.* Denn $\frac{\partial u^0}{\partial n} = 0$, da ja $u^0 = \frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}}$ und die Normale n der Schattengrenze senkrecht steht zu dem von L aus durch den Schirmrand nach dem Punkt Q der Schattengrenze gezogenen Radiusvektor r_{LQ}.

4. Das gewisse $\int df_\infty$ verschwindet.

Aus 3. ist zu schließen, daß die trigonometrische Reihe (12) an den Enden des Intervalls $(-\pi, \pi)$ eine Unstetigkeit aufweist. *Daher konvergiert sie nicht gleichmäßig, und ist auch nicht nach ϑ gliedweise differentierbar.* Daher ist die Differentialgleichung sub 1 keineswegs für die einzelnen Glieder der Reihe erfüllt!

Für das Sommerfeldsche $v^B_{(2)}$ setzen wir analog an:

$$(13) \qquad v^B_{(2)} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_n a_n \cos n\frac{\vartheta}{2} + \sum_n \beta_n \sin n\frac{\vartheta}{2}.$$

Periode: 4π. Intervall: $(-2\pi, 2\pi)$. Bedingungen 1, 2, 4 wie oben. Anstatt 3:

3. $v^B_{(2)}(-\pi+0) - v^B_{(2)}(-\pi-0) = -u^0(-\pi)$
$v^B_{(2)}(+\pi+0) - v^B_{(2)}(+\pi-0) = +u^0(-\pi)$
$\frac{\partial v^B_{(2)}}{\partial n}$ wieder stetig.

Für das Sommerfeldsche $v^B_{(N)}$ hätte man:

$$(14) \qquad v^B_{(N)} = \tfrac{1}{2}A_0 + \sum_n A_n \cos n\frac{\vartheta}{N} + \sum_n B_n \sin n\frac{\vartheta}{N}.$$

Periode: $2N\pi$. Intervall: $(-N\pi, N\pi)$. Schattengrenzen wieder: $\vartheta = -\pi$ bzw. $\vartheta = +\pi$. Sprungwerte wie vorhin.

23. Einige Eigenschaften der Fourierkoeffizienten der Entwicklung einer unstetigen Funktion.

Sei im Intervall $(-l, +l)$:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_n a_n \cos\left(n\frac{x\pi}{l}\right) + \sum_n b_n \sin\left(n\frac{x\pi}{l}\right)$$

die Entwicklung der Funktion, so hat man:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} y\cos\left(n\frac{x\pi}{l}\right)dx = \frac{1}{\pi n}\left|y\sin\left(n\frac{x\pi}{l}\right)\right|_{-l}^{l} - \frac{1}{\pi n}\int_{-l}^{l} y'\sin\left(n\frac{x\pi}{l}\right)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} y\sin\left(n\frac{x\pi}{l}\right)dx = -\frac{1}{\pi n}\left|y\cos\left(n\frac{x\pi}{l}\right)\right|_{-l}^{l} + \frac{1}{\pi n}\int_{-l}^{l} y'\cos\left(n\frac{x\pi}{l}\right)dx$$

sofern die Funktion $y(x)$ im Innern und an den Enden des Intervalls stetig und stetig differentiierbar ist. Wenn aber an den Enden $\pm l$ und im Innern des Intervalls etwa an den Stellen

$$a_1, a_2 \ldots$$

Unstetigkeiten auftreten, wobei jedoch die Dirichletschen Bedingungen (keine Unendlichkeit, endliche Anzahl der Unstetigkeiten und abteilungsweise Monotonie) erfüllt seien, hat man:

$$a_n = -\frac{1}{\pi n}\sum_i [y(\alpha_i + 0) - y(\alpha_i - 0)] \sin n\frac{\alpha_i \pi}{l} - \frac{1}{\pi n}\int_{-l}^{l} y' \sin n\frac{x\pi}{l}\, dx,$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi n}[y(l-0) - y(-l+0)] \cos n\pi + \frac{1}{\pi n}\sum_i [y(\alpha_i+0) - y(\alpha_i - 0)] \cos n\frac{\alpha_i \pi}{l} + \frac{1}{\pi n}\int_{-l}^{l} y' \cos n\frac{x\pi}{l}\, dx.$$

Hierbei ist die Ableitung $y'(x)$ als eine stetige Funktion im ganzen Intervall $-l \leqq x \leqq l$ angenommen. Denkt man sie in eine Fouriersche Reihe entwickelt und bezeichnet die bezüglichen Fourierkoeffizienten mit a_n' bzw. b_n', so kann man weiter schreiben

$$n a_n = -\frac{1}{\pi}\sum_i [y(\alpha_i + 0) - y(\alpha_i - 0)] \sin n\frac{\pi \alpha_i}{l} - \frac{l}{\pi} b_n',$$

$$n b_n = -\frac{1}{\pi}[y(l-0) - y(-l+0)] \cos n\pi + \frac{1}{\pi}\sum_i [y(\alpha_i + 0) - y(\alpha_i - 0)] \cos n\frac{\pi \alpha_i}{l} + \frac{l}{\pi} a_n'.$$

Da die Fouriersche Reihe für y' konvergiert, so erhält man hieraus die von Stokes[1]) aufgestellten Kriterien für die Koeffizienten der Fourierentwicklung einer unstetigen Funktion:

$$(15)\quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} n a_n = -\frac{1}{\pi}\sum\limits_i [y(\alpha_i + 0) - y(\alpha_i - 0)] \sin n\frac{\pi \alpha_i}{l}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} n b_n = -\frac{1}{\pi}[y(l-0) - y(-l+0)] \cos n\pi + \frac{1}{\pi}\sum\limits_i [y(\alpha_i + 0) - y(\alpha_i - 0)] \cos n\frac{\pi \alpha_i}{l}. \end{cases}$$

24. Anwendung auf das Sprungwertproblem bei der Halbebene.

Die Reihe (12) für das Kirchhoffsche u^B hat gemäß Nr. 22: $l = \pi$ und Unstetigkeiten an den Enden des Intervalls. Man erhält gemäß (15):

1) G. G. Stokes, Cambr. Phil. Trans. 8. 1847; vgl. H. S. Carslaw, Introduction to the theory of Fourier's series etc., London. S. 63—65. 1906.

$$\lim_{n\to\infty} n\,a_n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} n\,b_n = -\frac{1}{\pi}\left[u^B(\pi-0) - u^B(-\pi+0)\right]\cos n\pi$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[u^B(-\pi-0) - u^B(-\pi+0)\right]\cos n\pi = -\frac{1}{\pi}u^0(\pi)\cos n\pi.$$

Hieraus folgt: Die cos-Reihe in (12) repräsentiert eine durchaus stetige, überall reguläre Funktion in ϑ und natürlich auch in ϱ_P, z_P, da ja Unstetigkeiten nur in ϑ auftreten sollen. Da es für unsere Zwecke offenbar auf eine solche überall reguläre Lösung nicht ankommt, so werfen wir sie ab und behalten als Ansatz:

$$u^B = \sum_n b_n \sin n\vartheta \tag{12a}$$

mit $\lim_{n\to\infty} n\,b_n = -\frac{1}{\pi}u^0(\pi)\cos n\pi$.

Die Reihe (13) für das Sommerfeldsche $v^B_{(2)}$ hat: $l = 2\pi$, Unstetigkeiten bei $\vartheta = -\pi$ und $\vartheta = +\pi$ im Innern des Intervalls. Man erhält gemäß (15):

$$\lim_{n\to\infty} n\,a_n = -\frac{1}{\pi}\left[v^B_{(2)}(+\pi+0) - v^B_{(2)}(+\pi-0)\right]\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{1}{\pi}\left[v^B_{(2)}(-\pi+0) - v^B_{(2)}(-\pi-0)\right]\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}u^0(\pi)\sin n\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} n\,\beta_n = 0.$$

Wir werfen infolgedessen die sin-Reihe sowie das konstante Glied ab und behalten:

$$v^B_{(2)} = \sum_n a_n \cos n\frac{\vartheta}{2} \tag{13a}$$

mit $\lim_{n\to\infty} n\,a_n = -\frac{2}{\pi}u^0(\pi)\sin\frac{n\pi}{2}$.

Somit folgt aus der von uns gewählten Form der beiden Lösungen: Das Kirchhoffsche Beugungsintegral ist *antisymmetrisch*, das Sommerfeldsche ist *symmetrisch* mit Bezug auf den einfallenden Strahl $\vartheta = 0$.

25. Kompensation der Unstetigkeiten.

Die Reihen (12a) und (13a) sind natürlich nicht gliedweise differentiierbar. Wir benötigen aber die Entwicklung der Differentialquotienten von u^B bzw. $v^B_{(2)}$ nach ϑ, um die

unbekannten Koeffizienten b_n bzw. a_n mittels der Erfüllung der Differentialgleichung $\Delta u^B + k^2 u^B = 0$ bzw. $\Delta v^B_{(2)} + k^2 v^B_{(2)} = 0$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke wollen wir von u^B bzw. $v^B_{(2)}$ die Reihenentwicklung je einer bekannten Funktion subtrahieren, welche bzw. die gleichen Unstetigkeiten aufweisen, so daß die resultierenden Reihen durchaus stetig und daher gliedweise differentiierbar sind. Wir wählen als solche bekannte Funktionen [1]):

$$u^C = -\frac{1}{\pi}\sum_n u^0(\pi)\cos n\pi \sin n\vartheta = \frac{\vartheta}{2\pi}u^0(\pi) \text{ im Intervall } (-\pi, \pi),$$

$$\text{bzw. } v^C_{(2)} = -\frac{2}{\pi}\sum_n u^0(\pi)\sin n\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\vartheta}{2} = -\frac{1}{2}u^0(\pi)\times \text{signum}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right),$$

u^C bzw. $v^C_{(2)}$ weisen in der Tat bei $\vartheta = \pm\pi$ die gleichen Sprungwerte auf wie u^B bzw. $v^B_{(2)}$.

Ferner sind $\frac{\partial u^B}{\partial \vartheta}$ bzw. $\frac{\partial v_{(2)}{}^B}{\partial \vartheta}$ an den Schattengrenzen $\vartheta = \pm\pi$ identisch mit $\frac{\partial u^B}{\partial n}$ bzw. $\frac{\partial v_{(2)}{}^B}{\partial n}$, welche Ableitungen nach Voraussetzung (für eine gewöhnliche Kugelwelle u^0) stetig sind. Daher sind $\frac{\partial u^B}{\partial \vartheta}$ bzw. $\frac{\partial v_{(2)}{}^B}{\partial \vartheta}$ an den Enden und im Innern des Intervalls stetig. Ebenso $\frac{\partial u^C}{\partial \vartheta}$ bzw. $\frac{\partial v_{(2)}{}^C}{\partial \vartheta}$.

Mithin sind die Reihen für

$$u^B - u^C \quad \text{bzw.} \quad v^B_{(2)} - v^C_{(2)}$$

nicht nur *einmal*, sondern sogar *zweimal* gliedweise differentiierbar.

26. Umformung der Schwingungsgleichung durch eine Art Laplacescher Transformation.

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist die Einführung der sogenannten Laplaceschen Transformierten für die Unbekannte, d. i. ihre Darstellung durch ein

1) Für die Bedeutung von u^C bzw. $v_{(2)}{}^C$ vgl. Anm. 1) zu Nr. 28.

bestimmtes Integral mit einer e-Potenz im Integranden bekannt.[1]) Eine analoge Transformation wird hier durch die in Nr. 19 angegebene Gestalt von u^B nahegelegt. Wir setzen daher an:

$$b_n = \int_0^\infty db \frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)} g_n(b) \quad \text{bzw.} \quad a_n = \int_0^\infty db \frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)} f_n(b),$$

wo g_n bzw. f_n noch zu bestimmende Funktionen sind.

Im nachfolgenden beschränken wir uns auf die Durchführung der Rechnung für das Sommerfeldsche $v^B_{(2)}$, da sie für das Kirchhoffsche u^B ganz analog verläuft.

Wir haben also die Reihe:

$$(16) \qquad v^B_{(2)} - v^C_{(2)} = \sum_n \left(a_n + \frac{2}{\pi n} u^0(\pi) \sin n \frac{\pi}{2} \right) \cos n \frac{\vartheta}{2}$$

der Differentation

$$\Delta() + k^2() = \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho_P^2} + \frac{1}{\varrho_P} \frac{\partial}{\partial \varrho_P} + \frac{\partial^2}{\partial z_P^2} + \frac{1}{\varrho_P^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + k^2 \right) ()$$

zu unterziehen, wenn

$$a_n = \int_0^\infty db \frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)} f_n(b)$$

mit $R^2(b) = \varrho_L^2 + \varrho_P^2 + 2\varrho_L \varrho_P \cosh b + (z_L - z_P)^2$.

Man erhält von der linken Seite von (16):

$$-(\Delta + k^2) v^C_{(2)} = \frac{2}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin n \frac{\pi}{2} \cos n \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{\varrho_L}{\varrho_P} \left\{ \frac{1}{r_{LP}} \frac{d}{d r_{LP}} \left(\frac{e^{-ikr_{LP}}}{r_{LP}} \right) \right\}_{\vartheta = \pi},$$

denn $u^0 = \dfrac{e^{-ikr_{LP}}}{r_{LP}}$ und $r_{LP}^2 = \varrho_L^2 + \varrho_P^2 - 2\varrho_L \varrho_P \cos \vartheta + (z_L - z_P)^2$.

Von der rechten Seite von (16) kommt durch gliedweise Differentiation der Reihe:

---

1) E. Hilb, Math. Enzykl. II. 2. S. 555; L. Schlesinger, Differentialgleichungen, Samml. Schubert. S. 192. 1900.

$$\frac{2}{\pi}\sum_n \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\vartheta}{2}\,\frac{\varrho_L}{\varrho_P}\left\{\frac{1}{r_{LP}}\,\frac{d}{dr_{LP}}\left(\frac{e^{-ikr_{LP}}}{r_{LP}}\right)\right\}_{\vartheta=\pi}$$

$$+\sum_n \cos n\frac{\vartheta}{2}\int_0^\infty db\, f_n(b)\left\{\frac{\varrho_L^2\sinh^2 b}{R^2(b)}\,\frac{d^2}{dR^2}-\frac{\varrho_L^2\sinh^2 b}{R^3(b)}\,\frac{d}{dR}\right.$$

$$\left.+\frac{\varrho_L}{\varrho_P}\cosh b\,\frac{1}{R(b)}\,\frac{d}{dR}\right\}\left(\frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}\right)$$

$$-\frac{1}{\varrho_P^2}\sum_n \frac{n^2}{4}\cos n\frac{\vartheta}{2}\left\{\frac{2}{\pi n}\sin n\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{-ikr_{LP}}}{r_{LP}}\right)_{\vartheta=\pi}\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty db\, f_n(b)\,\frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}\right\}.$$

Man sieht aber leicht, daß

$$\frac{d^2}{db^2}\left(\frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}\right)=\left\{\frac{\varrho_P^2\varrho_L^2\sinh^2 b}{R^2(b)}\,\frac{d^2}{dR^2}-\frac{\varrho_P^2\varrho_L^2\sinh^2 b}{R^3(b)}\,\frac{d}{dR}\right.$$

$$\left.+\varrho_L\varrho_P\cosh b\,\frac{1}{R(b)}\,\frac{d}{dR}\right\}\left(\frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}\right).$$

Somit kommt wegen

$$\int_0^\infty db\, f_n(b)\,\frac{d^2}{db^2}\left(\frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}\right)=f_n'(0)\,\frac{e^{-ikR(0)}}{R(0)}+\int_0^\infty db\, f_n''(b)\,\frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}$$

die Gleichung:

$$0=\frac{1}{\varrho_P^2}\sum_n \cos n\frac{\vartheta}{2}\left\{f_n'(0)\,\frac{e^{-ikR(0)}}{R(0)}-\frac{n}{2\pi}\sin n\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-ikR(0)}}{R(0)}\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty db\, f_n''(b)\,\frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}-\frac{n^2}{4}\int_0^\infty db\, f_n(b)\,\frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}\right\},$$

denn $r_{LP}(\pi)=R(0)$.

Diese Gleichung befriedigen wir durch

$$f_n''(b)-\frac{n^2}{4}f_n(b)=0,$$

$$f_n'(0)-\frac{n}{2\pi}\sin n\frac{\pi}{2}=0,$$

woraus

$$f_n(b)=-\frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}\,e^{-n\frac{b}{2}},$$

denn $f_n(b)\sim e^{+n\frac{b}{2}}$ wäre unbrauchbar, weil das

$$\int_0^\infty db\, f_n(b)\, \frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}$$

damit divergieren würde. Somit

$$a_n = -\frac{1}{\pi} \sin n\frac{\pi}{2} \int_0^\infty db\, e^{-n\frac{b}{2}}\, \frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}$$

und die gesuchte Sommerfeldsche Lösung wird:

$$v_{(2)}^B = -\frac{1}{\pi} \sum_n \sin n\frac{\pi}{2} \cos n\frac{\vartheta}{2} \cdot \int_0^\infty db\, \frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}\, e^{-n\frac{b}{2}} \tag{13b}$$

mit $R^2(b) = \varrho_L^2 + \varrho_P^2 + 2\varrho_L\varrho_P \cosh b + (z_L - z_P)^2$.

In (13b) darf Summation und Integration vertauscht werden, worauf die Reihe summiert werden kann. Es kommt

$$v_{(2)}^B = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty db\, \frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}\, \frac{\cos\frac{\vartheta}{2} \cosh\frac{b}{2}}{\cosh^2\frac{b}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty db\, \frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}\, \frac{\cos\frac{\vartheta}{2} \cosh\frac{b}{2}}{\cosh b + \cos\vartheta}$$

wie in (11a).

Analog ergibt sich für Kirchhoff:

$$u^B = -\frac{1}{\pi} \sum_n \cos n\pi \cdot \sin n\vartheta \cdot \int_0^\infty db\, \frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}\, e^{-nb}, \tag{12b}$$

welches summiert liefert:

$$u^B = +\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty db\, \frac{e^{-ikR(b)}}{R(b)}\, \frac{\sin\vartheta}{\cosh b + \cos\vartheta}$$

wie in (10).

27. Die Bedingung im Unendlichen.

Wir haben bei der ganzen Herleitung über das Verhalten im Unendlichen geschwiegen. Dies müssen wir jetzt nachtragen, da wir nur bei der Erfüllung der Bedingung im Unendlichen eine eindeutig bestimmte Lösung der Schwingungsgleichung erwarten dürfen.

Es muß also nach Nr. 22 das Integral

$$\int df_{\infty,Q}\left\{u^B(L,Q)\,\frac{\partial w(P,Q)}{\partial n}-w(P,Q)\,\frac{\partial u^B(L,Q)}{\partial n}\right\},$$

bzw. das Integral

$$\int df_{\infty,Q}\left\{v^B_{(2)}(L,Q)\,\frac{\partial w_{(2)}(P,Q)}{\partial n}-w_{(2)}(P,Q)\,\frac{\partial v_{(2)}{}^B(L,Q)}{\partial n}\right\}$$

erstreckt über eine unendlich ferne geschlossene Fläche verschwinden. Als diese Fläche denken wir uns eine Kugel, die mit unendlich großem Radius um den Ursprung der Koordinaten geschlagen ist.

Wir wollen nun zeigen, daß in beiden Integralen der Integrand verschwindet, sobald wir den Punkt Q auf dieser Kugel annehmen. Nehmen wir zunächst die Kirchhoffsche Lösung u^B, so ist der Grenzwert von

$$u^B(L,Q)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty db\,\frac{e^{-ikR_{LQ}(b)}}{R_{LQ}(b)}\,\frac{\sin\vartheta_{LQ}}{\cosh b+\cos\vartheta_{LQ}},$$

wenn in $R^2_{LQ}=\varrho_L{}^2+\varrho_Q{}^2+2\,\varrho_L\varrho_Q\cosh b+(z_L-z_Q)^2$ die Entfernung $r_Q=\sqrt{\varrho_Q{}^2+z_Q{}^2}$ vom Ursprung unendlich, somit $\lim R^2_{LQ}\to r_Q{}^2$ wird, gleich

$$\lim_{Q\to\infty}u^B(L,Q)=\frac{e^{-ikr_Q}}{r_Q}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty db\,\frac{\sin\vartheta}{\cosh b+\cosh\vartheta},$$

daher proportional dem Grenzwert

$$\lim_{Q\to\infty}w(P,Q)=\lim_{Q\to\infty}\frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}=\frac{e^{-ikr_Q}}{r_Q}.$$

Man ersieht übrigens hieraus, daß sich $u^B(L,Q)$ und daher auch $u(L,Q)=u^*+u^B$ im Unendlichen wie $\frac{\cos kr_{LQ}}{r_{LQ}}$ verhält. (Vgl. Nr. 14.)

Ebenso ist der Grenzwert des Differentialquotienten von $u^B(L,Q)$ nach der Normale, d. i. nach r_Q, auf der unendlichen Kugel proportional dem nämlichen Differentialquotienten von $\frac{\cos kr_{LQ}}{r_{LQ}}$. Mithin verschwindet dort der Integrand, wie behauptet wurde.

Genau analog verläuft der Beweis für das Sommerfeldsche $v^B_{(2)}$. Unsere Lösungen sind also tatsächlich die eindeutig bestimmten des Sprungwertproblems der Halbebene.

III. Vergleichung der Kirchhoffschen und der Sommerfeldschen Lösung für die schwarze Halbebene mit der Beobachtung.

28. Näherungsformeln für senkrecht zur Schirmkante einfallendes paralleles Licht.

Für die folgende numerische Vergleichung der Kirchhoffschen Lösung und der Sommerfeldschen bzw. Voigtschen beschränken wir uns auf den einfachen und praktisch wichtigsten Fall *parallelen Lichts*. Wir wollen insbesondere annehmen, daß das Licht senkrecht zur Kante des Schirms, d. i. der z-Achse, unseres Zylinderkoordinatensystems einfalle. Wir haben daher:

$$\varrho_L = \infty .$$

In diesem Falle wird das ungestörte Licht

$$\lim_{\varrho_L \to \infty} u^0(L,P) \to \frac{e^{-ik\varrho_L}}{\varrho_L} \cdot e^{-ik\varrho_P \cos\vartheta}$$

wo wir den konstanten Faktor $\frac{e^{-ik\varrho_L}}{\varrho_L}$ abwerfen wollen, so daß wir setzen können

$$u^0(P) = e^{-ik\varrho_P \cos\vartheta} ,$$

dann ergibt sich aus (10) bzw. (11a)

$$(10^*) \qquad u^B = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty db\, e^{-ik\varrho_P \cosh b} \frac{\sin\vartheta}{\cosh b + \cos\vartheta} ,$$

$$(11a^*) \qquad v^B_{(2)} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty db\, e^{-ik\varrho_P \cosh b} \frac{\cos\frac{\vartheta}{2} \cosh\frac{b}{2}}{\cosh b + \cos\vartheta} .$$

Für die Auswertung begnügen wir uns *mit einer Näherung für große Entfernung ϱ_P des Aufpunkts von der beugenden Kante.*[1])

1) Anmerkungsweise geben wir die Auswertung von (10) bzw. (11a) bzw. (11) für divergentes Licht u^0 jedoch in unmittelbarer Nähe der Kante $\varrho_P \sim 0$:

$u^B = \frac{\vartheta}{2\pi} u^0(\pi)$ für $|\vartheta| < \pi$ u. $\frac{\vartheta - \mathrm{sign}(\vartheta) 2\pi}{2\pi} u^0(\pi)$ für $\pi < |\vartheta| < 2\pi$

$v^B_{(2)} = -\frac{1}{2} u^0(\pi)$ für $|\vartheta| < \pi$ und $+\frac{1}{2} u^0(\pi)$ für $\pi < |\vartheta| < 2\pi$

$v^B_{(\infty)} = -\ u^0(\pi)$ für $|\vartheta| < \pi$ und 0 für $\pi < |\vartheta|$.

Hiervon haben wir in den schematischen Figuren 2–6 Gebrauch gemacht. Für die Ableitung vgl. B Nr. 9 und Nr. 10 oder auch die vorstehenden Formeln (13b) und (12b) in Nr. 26, welche für $\varrho_P = 0$ auf bzw. $v^C_{(2)}$ u. u^C in Nr. 25 führen, woraus die angegebenen Werte folgen.

Man sieht leicht, daß in diesem Falle die Umgebung der Stelle $b = 0$ in den Integralen (10*) bzw. (11a*) ausschlaggebend ist. Die Integrale bestehen nämlich aus einer Summe von Gliedern, die $\cos(k\varrho \cosh b)$ enthalten, also für großes ϱ_P mit wachsendem b immer häufiger ihr Zeichen wechseln; überdies nehmen sie wegen des Nenners $\cosh b + \cos\vartheta$ dem absoluten Werte nach immer mehr ab. Man begeht daher für die Zwecke unserer ersten Näherung keinen großen Fehler, wenn man in den Integralen $b = 0$ setzt; nur im Exponenten der e-Potenz muß man wegen des großen Faktors ϱ_P die hyperbolische Funktion entwickeln und $\cosh b = 1 + \frac{b^2}{2}$ setzen.[1]) Es kommt daher für großes ϱ_P:

$$(10^+) \qquad u^B \sim \frac{1}{4\pi} e^{-i\left(k\varrho_P + \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{2\pi}{k\varrho_P}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2},$$

$$(10a^+) \qquad v^B_{(2)} \sim -\frac{1}{4\pi} e^{-i\left(k\varrho_P + \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{2\pi}{k\varrho_P}} \cdot \frac{1}{\cos\vartheta/2}.$$

Auf ähnliche Weise bekommt man aus (11b) für das Voigtsche unendlichwertige

$$(11b^+) \qquad v^B_{(\infty)} \sim -\frac{1}{4\pi} e^{-i\left(k\varrho_P + \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{2\pi}{k\varrho_P}} \cdot \frac{4\pi}{\pi^2 - \vartheta^2}.$$

[Siehe Wiegrefe, a. a. O., Formeln (7) und (8)].

Bei den Näherungsformeln (10$^+$), (11a$^+$), (11b$^+$) ist natürlich vorausgesetzt, daß man sich in gehöriger Entfernung von den Schattengrenzen $\vartheta = -\pi$ des physikalischen und $\vartheta = +\pi$ des nichtphysikalischen Raums befindet.

Die Annäherung (11a$^+$) hat sich bei den Beobachtungen am blanken Schirm sehr gut bewährt, wobei natürlich noch ein Glied mit $\pm \frac{1}{\cos\frac{\varphi_L + \varphi_P}{2}}$ an Stelle von $\frac{1}{\cos\frac{\vartheta}{2}} = \frac{1}{\cos\frac{\varphi_L - \varphi_P}{2}}$ für das reflektierte Licht aus der Richtung $(-\varphi_L)$ hinzutritt. (Vgl. Sommerfeld, Math. Ann. 1897, a. a. O.)

29. Vergleichung mit der Beobachtung.

Wir geben für die Beugung an der schwarzen Halbebene zunächst die folgende Tabelle für den *Abfall der Amplitude*

1) Eine strenge Ableitung siehe B Nr. 9 und 10.

im Schatten, also für die Winkel $\vartheta = \varphi_L - \varphi_P < -\pi$. Wir führen dabei an Stelle von ϑ den sogenannten *Beugungswinkel*

$$\varepsilon = -(\vartheta + \pi)$$

ein. (Schattengrenze $\varepsilon = 0$, Schatten $\varepsilon > 0$).

Man wird aus folgender Tabelle die Überlegenheit der Kirchhoffschen Formel hinsichtlich des scharfen Abfalls der Amplitude im Schatten gegenüber der Sommerfeldschen zweiwertigen

Beugungswinkel in Graden	Sommerfeld $N=2$ Formel ($11a^+$)	Voigt $N=\infty$ Formel ($11b^+$)	Kirchhoff Formel (10^+)
$\varepsilon = -(\pi + \vartheta)$	$v^B_{(2)} \sim -\frac{1}{\cos \vartheta/2}$	$v^B_{(\infty)} \sim -\frac{4\pi}{\pi^2 - \vartheta^2}$	$u^B \sim \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$
10	11,4	11,1	11,4
20	5,76	5,42	5,67
40	2,92	2,58	2,75
60	2,00	1,63	1,78
90	1,41	1,03	1,00
120	1,15	0,70	0,58
150	1,03	0,48	0,17
180	1,00	0,42	0,00

ungenügend schwarzen und sogar gegenüber der Voigtschen unendlichwertigen „schwarzesten" Formel entnehmen. Bemerkt werde, daß dieses Resultat natürlich bei der gewöhnlichen Behandlung der Kirchhoffschen Lösung als eines Flächenintegrals und der dabei üblichen ziemlich wilden Annäherung [1]), die im wesentlichen auf eine Anlehnung an die alten unzureichenden Formeln von Fresnel hinausläuft, nicht erzielt hätte werden können.

---

1) Vgl. Kirchhoff, Optik, Zweite Vorlesung, § 4, und seither in allen Lehrbüchern — durch Weglassung von

$$\int df_Q \left\{ \frac{e^{-ik(r_{LQ}+r_{PQ})}}{r_{LQ}} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right) - \frac{e^{-ik(r_{LQ}+r_{PQ})}}{r_{PQ}} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{LQ}}\right)\right\} \text{ aus}$$

$$\int df_Q \left\{ \frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\right) - \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_{LQ}}}{r_{LQ}}\right)\right\} \text{ erhält}$$

Kirchhoff die Form $-ik\int df_Q \frac{e^{-ik(r_{LQ}+r_{PQ})}}{r_{LQ} r_{PQ}} \left\{ \frac{\partial r_{LQ}}{\partial n} - \frac{\partial r_{PQ}}{\partial n} \right\}$,

welche bis auf die Phase und die „Schiefheitsfaktoren" $\frac{\partial r_{LQ}}{\partial n}$ bzw. $\frac{\partial r_{PQ}}{\partial n}$ mit der bekannten intuitiven Fassung des Huygensschen Prinzips von Fresnel übereinstimmt.

Bemerkt werde weiter, daß die Kirchhoffsche Formel nach Nr. 17 und Nr. 20 *nur* für *schwarze* Schirme, nicht für *blanke* Schirme gilt. Die meisten Beobachtungen beziehen sich natürlich wegen der leichteren Herstellbarkeit einer geradlinigen Kante auf metallene Schirme, die natürlich keineswegs schwarz sind.

Es ist weiter zu erwähnen, daß natürlich nur Beobachtungen für *große Beugungswinkel* für unsere Zwecke in Betracht kommen, während die meisten Beobachtungen sich auf kleine Beugungswinkel beschränken. Auch müßte eine exakte, photometrische Messung der Lichtamplitude verlangt werden.

Es ist schließlich, wie aus der Einleitung deutlich wird, ein schwarzer Schirm praktisch nie streng zu realisieren.

Aus alledem ergibt sich, daß das Beobachtungsmaterial stark zusammenschrumpft. Beobachtungen unter großen Beugungswinkeln liegen bloß vor von Gouy[1]) und Maey.[2]) Diese bestätigen zunächst die Tatsache, daß die *Beugung eine Randwirkung* ist (Erscheinung der erleuchteten Schirmkante)[3]), was für die Sommerfeldsche Lösung schon von Sommerfeld, Math. Ann. 1896, S. 369, abgeleitet wurde und für die Kirchhoffsche aus der Transformation in ein Randintegral (vgl. Abschnitt II) folgt.[4])

Von diesen Beobachtungen betreffen die Maeys Stahlschneiden, scheiden also für unsere Zwecke aus. Gouy[5]) hat Beobachtungen über *mit Ruß geschwärzte Schneiden* und findet Schwächung des gebeugten Lichts. Nach Wiegrefe[6]) hat die Berußung zur Folge, daß die Intensität im geometrischen

---

1) Gouy, Ann. Chim. Phys. 8. S. 195. 1886.

2) E. Maey, Wied. Ann. 49. S. 69. 1893.

3) Zuerst beobachtet von W. Wien, Wied. Ann. 28. S. 117. 1886, und irrtümlich als Widerspruch zur klassischen Beugungstheorie gedeutet.

4) Vgl. hierzu die Polemik Fresnels in Mémoire sur la diffraction de la lumière. 1819; Oeuvres complètes, I, § 20—28 gegen die Youngsche Auffassung der Beugung als Randwirkung, die mit den Worten schließt: „Il résulte, qu'on ne peut pas attribuer les phènomènes de la diffraction aux *seuls* rayons, qui touchent les *bords* des corps, et qu'il faut admettre qu'une *infinité d'autres rayons séparés de ces corps par des intervalles sensibles* se trouvent néanmoins écartés de leur première direction, et concourent aussi à la formation des franges de diffraction".

5) a. a. O. S. 170—71.

6) a. a. O. S. 39 oder auch Ann. d. Phys. a. a. O. S. 452/3.

Schatten *bedeutend schneller abnimmt, als das ohne dieselbe bei demselben Stahlprisma und auch bei anderen metallischen Schirmen der Fall ist.* Wiegrefe nimmt zur Erklärung dieser Erscheinung seine Zuflucht zu $v^B_{(\infty)}$ und gibt $v^B_{(2)}$ für diese Zwecke auf.

Die Kirchhoffsche Lösung, die doch eine mindestens ebenso gute Erklärung gibt, verwirft er, weil er sie nur in der von Kirchhoff selbst stammenden durchaus ungenügenden Näherung kennt, die auf

$$\frac{2\sqrt{-\cos\vartheta}}{\sin\vartheta} \quad \text{an Stelle von} \quad \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$$

führt. An der Schattengrenze $\vartheta = -\pi$ und für kleine Beugungswinkel $\varepsilon = -(\pi + \vartheta) > 0$ sind diese beiden Formeln identisch

$$\frac{2\sqrt{-\cos\vartheta}}{\sin\vartheta} \sim \frac{2 - \frac{\varepsilon^2}{2}}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} \sim \frac{2 - \frac{\varepsilon^2}{2}}{\varepsilon}.$$

Dies ist der Grund, warum diese *falsche* Auswertung der Kirchhoffschen Formel für kleine Beugungswinkel trotzdem brauchbar ist.

Nach unserer Auffassung sprechen die Beobachtungen von Gouy zugunsten der richtig ausgewerteten Kirchhoffschen Formel.

Zum Schlusse mag noch bemerkt werden, daß nach Gouy das gebeugte Licht beim schwarzen Schirm unpolarisiert ist. Dies rechtfertigt, daß wir hier von der Wellengleichung anstatt von den Maxwellschen Gleichungen ausgegangen sind. Die elektromagnetische Theorie der Beugung am schwarzen Schirm wird Gegenstand der späteren Mitteilung sein.

(Eingegangen 31. August 1922.)

2. *Grundriß einer Theorie des anisotropen Strahlungsfeldes. II;* *von George Jaffé.*

Die folgenden Ausführungen enthalten Ergänzungen und Verallgemeinerungen zu dem Inhalte einer Untersuchung, die unter dem gleichen Titel in dieser Zeitschrift erschienen ist.[1]) Es handelt sich dabei um die folgende, dem Grundproblem der Wärmeleitungstheorie analoge Aufgabe: ein materielles Medium M, das zunächst als homogen vorausgesetzt wird, sei von einer Reihe von schwarzen Körpern begrenzt; es wird nach dem Strahlungszustand in M gefragt, wenn geeignete Grenz- und Anfangsbedingungen vorgeschrieben sind. Von der Wirkung der Wärmeleitung soll abgesehen werden, was bei hinreichend hohen Temperaturen stets statthaft ist. (Man vgl. dazu I § 4.)

Die Untersuchung des stationären Falles im zweiten Paragraphen hat ergeben, daß die Behandlung der Grundgleichungen sich verschieden gestaltet, je nachdem die Absorption als stark oder schwach anzusehen ist. Dabei liegt der eine oder andere Fall vor, je nachdem das Produkt des Absorptionskoeffizienten in die mittleren linearen Abmessungen des Feldes Zahlen ergibt, welche groß oder klein gegen die Einheit sind. Bei dem stationären Problem wurden beide Fälle behandelt, bei zeitlich veränderlichen Vorgängen jedoch nur der Grenzfall starker Absorption; der fehlende Fall findet hier seine Erledigung.

Im fünften Paragraphen wird gezeigt, daß ein früher angedeutetes Verfahren, das im stationären Falle von unseren Grundgleichungen zur Hilbertschen Integralgleichung führt (I S. 617, 618) auch bei zeitlich veränderlichen Vorgängen anwendbar bleibt; es führt dann zu einer linearen, inhomogenen Integralgleichung zweiter Art für den Emissions-

1) G. Jaffé, Ann. d. Phys. 68. S. 583. 1922. Auf diese Arbeit wird im Text mit I und folgender Seitenzahl verwiesen. Die Numerierung der Formeln ist in der vorliegenden Arbeit fortgesetzt.

koeffizienten ε_ν, die eine unmittelbare Verallgemeinerung der Hilbertschen Gleichung auf nicht stationäre Vorgänge darstellt. Ihre Lösung läßt sich wiederum in eine Reihe entwickeln, deren Glieder schrittweise durch Quadraturen gefunden werden können, und die im Grenzfall schwacher Absorption schnell konvergiert. An einem einfachen Beispiel wird gezeigt, wie sich das Abklingen eines gegebenen Anfangszustandes nach der angegebenen Methode berechnen läßt.

Die Entwicklungen der ersten fünf Paragraphen bezogen sich auf ein homogenes, dispersionsfreies Zwischenmedium.[1]) An anderem Orte[2]) ist bereits gezeigt worden, wie die Grundgleichungen zu modifizieren sind, wenn das Medium M als inhomogen und dispergierend vorausgesetzt wird. Die verallgemeinerten Grundgleichungen sollen hier — mit einer geringfügigen Abänderung — übernommen werden. Der sechste Paragraph befaßt sich mit ihrer Auflösung. Es wird sich zeigen, daß die früheren Methoden auch in dem allgemeineren Falle anwendbar bleiben; bei starker Absorption gelangt man zu Differentialgleichungen, die mit denen der Wärmeleitung in inhomogenen Medien engste Verwandtschaft zeigen, und die Lösung der allgemein gültigen Integralgleichung läßt sich wiederum auf Quadraturen zurückführen.

§ 5. Die Integralgleichung für nichtstationäre Vorgänge.

Wir denken uns in den beiden folgenden Paragraphen durchweg diejenigen Annahmen gemacht, unter denen es statthaft ist, Strahlung von jeder einzelnen Schwingungszahl gesondert zu betrachten. Wir erinnern aber daran, daß es nur unter zwei besonderen Voraussetzungen möglich war, die Kontinuitätsgleichung I spektral zu zerlegen, und diese Voraussetzungen wollen wir wegen ihrer physikalischen Wichtigkeit hier nochmals formulieren (Ph. Z. S. 500). Es muß nämlich gefordert werden:

---

1) Von der Annahme der Dispersionsfreiheit ist übrigens nirgends Gebrauch gemacht worden; man darf also in den ersten fünf Paragraphen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit q ohne weiteres als Funktion der Schwingungszahl auffassen.

2) G. Jaffé, Phys. Zeitschr. 23. S. 500. 1922. Auf diese Veröffentlichung wird im Text mit den Buchstaben Ph. Z. und folgender Seitenzahl hingewiesen.

1. In dem betrachteten Medium finde keine Umwandlung von Energie einer bestimmten Schwingungszahl in Energie von anderer Schwingungszahl statt.
2. Ist der Vorgang *nicht* stationär, so soll die Änderung des Wärmeinhalts des Mediums (in jeder Volumeinheit) neben der Änderung der Strahlungsdichte zu vernachlässigen sein.

Die Gültigkeit der folgenden Entwicklungen *für jede einzelne Schwingungszahl* ist durchaus an die Bedingungen 1. und 2. gebunden. Gibt man 1. auf, behält aber 2. bei, so bleibt der Inhalt der Gleichungen richtig, wenn man sie sämtlich nach ν von 0 bis ∞ integriert, d. h. also, wenn man die Gesamtstrahlung und mittlere Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und des Absorptionskoeffizienten betrachtet. Formal läßt sich diese Abänderung nach der früher (I S. 597) gegebenen Regel ausführen. Gibt man auch 2. auf, so komplizieren sich die Verhältnisse, weil dann die absolute Temperatur T auch explizit auftritt (I S. 591).

Wir werden außer der Bewegungsgleichung in der Form (10)

$$(10) \qquad \frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial s} + \frac{1}{q}\frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial t} = \varepsilon_\nu + \mathfrak{E}_\nu - \alpha_\nu \mathfrak{K}_\nu = \varepsilon_\nu^* - \alpha_\nu \mathfrak{K}_\nu$$

noch die fundamentale Beziehung (29)

$$(29) \qquad \varepsilon_\nu = \frac{\alpha_\nu q u_\nu}{8\pi}$$

gebrauchen, die sich nach den Definitionen (4) und (65) auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$(101) \qquad \varepsilon_\nu^* = \frac{\alpha_\nu}{4\pi}\int \mathfrak{K}_\nu \, d\Omega + \mathfrak{E}_\nu .$$

Die Gültigkeit von (29) [bez. (101)] ist unter den Voraussetzungen 1. und 2. auch für nichtstationäre Vorgänge eine unmittelbare Folge der beiden Grundgleichungen, und umgekehrt ersetzt (29) in Verbindung mit der Bewegungsgleichung (10) die Kontinuitätsgleichung I. Für nichtstationäre Vorgänge haben wir die Relation (29) unter Benutzung der Kugelfunktionsdarstellung (15) für $\mathfrak{K}_\nu$ bewiesen (I S. 625, 626). Der Beweis läßt sich aber auch unmittelbar erbringen, und zwar in derselben Weise, wie wir es für stationäre Vorgänge getan (I S. 599) und unter allgemeineren Voraussetzungen an anderem Orte auch für nichtstationäre Vorgänge ausgeführt haben

(Ph. Z. S. 502). Um andrerseits zur Kontinuitätsgleichung zu gelangen, braucht man die gleiche Rechnung nur in umgekehrter Richtung auszuführen.

Im stationären Falle gelangt man zu den Gleichungen (IIIa) und (IVa) der Hilbertschen Theorie, wenn man (10) integriert und das Ergebnis in (101) einsetzt. Eine einfache physikalische Überlegung lehrt, wie die Rechnung abzuändern ist, wenn der Zustand des Strahlungsfeldes sich mit der Zeit ändert. Die Integrale in (IIIa) liefern den Beitrag der einzelnen Volumelemente des Feldes und der Flächenelemente seiner Begrenzung zum Werte von ε_ν^* im Aufpunkte; und ebenso setzt sich der dort herrschende Wert von $\mathfrak{K}_\nu$ in (IVa) zusammen aus der Einstrahlung einer Stelle der Begrenzung und den Beiträgen der dazwischen befindlichen Volumelemente. Ist also der Zustand mit der Zeit veränderlich, so braucht man nur alle diese einzelnen Beiträge „retardiert" zu berechnen.

Bevor wir dazu übergehen, diesen einfachen Gedanken in Formeln zu kleiden, wird es nötig sein, einige Worte darüber zu sagen, in welcher Weise der Anfangszustand — etwa für $t = 0$ — vorgegeben sein soll.

Solange man es nur mit der Betrachtung von stationären Zuständen zu tun hat, ist der Strahlungszustand vollständig beschrieben, wenn entweder ε_ν als Funktion des Ortes oder $\mathfrak{K}_\nu$ als Funktion des Ortes und der Richtung bekannt ist. In ersterem Falle gewinnt man $\mathfrak{K}_\nu$ aus Gleichung (IVa) durch eine Quadratur, in letzterem Falle ergeben sich Strahlungsdichte und Strahlungsstrom ihrer Definition nach durch Quadraturen [Gl. (4) und (6)] und dann schließlich ε_ν vermöge der Relation (29).

Sobald nun aber der Zustand sich mit der Zeit ändert, besteht die eben gekennzeichnete Gleichwertigkeit von ε_ν und $\mathfrak{K}_\nu$ nicht mehr. Wäre z. B. für $t = 0$ nur ε_ν als Funktion des Ortes gegeben, so wäre damit der *zeitlich veränderliche* Zustand durchaus noch nicht erschöpfend gekennzeichnet, denn die Gleichung (IVa) zur Berechnung von $\mathfrak{K}_\nu$ versagt jetzt. Es wurde eben schon angedeutet und wird sogleich streng formuliert werden, daß bei variablen Zuständen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Strahlen Rechnung zu tragen ist. Wollte man also den Zustand bei $t = 0$ durch Angaben über ε_ν charakterisieren, so müßte ε_ν über einen solchen, $t = 0$

vorausgehenden Zeitraum τ bekannt sein, wie ihn die Strahlung erfordert, um den Abstand zwischen den beiden entferntesten Punkten des Feldes zu durchlaufen, d. h. also bei Feldern, die sich in irgendwelchen Richtungen ins Unendliche erstrecken, von $t = -\infty$ an.

Damit wäre aber zugleich auch angenommen, daß der Anfangszustand, genau wie alle Folgezustände durch normale Bewegung der Strahlung entstanden ist. Allgemeiner ist die Auffassung, die einen Anfangszustand als gegeben ansieht, ohne nach seiner Entstehung zu fragen, die also für die Schaffung eines Anfangszustandes besondere, sonst nicht berücksichtigte Verhältnisse zuläßt. In diesem Sinne läßt sich ein Anfangszustand im Strahlungsfelde nur so charakterisieren, daß $\mathfrak{K}_\nu$ als Funktion des Ortes und der Richtung für einen bestimmten Zeitpunkt vorgeschrieben wird.

Wir wollen diesen allgemeineren Standpunkt einnehmen und setzen also fest, daß für $t = 0$ $\mathfrak{K}_\nu$ bekannt und von $t = 0$ an die Einstrahlung der Grenzflächen $\overline{\mathfrak{K}}_\nu$, sowie die Energieerzeugung im Felde $\mathfrak{E}_\nu$ als Funktionen der Zeit vorgeschrieben sein sollen. Was die mathematische Formulierung der Anfangsbedingung betrifft, so denken wir uns längs eines jeden Strahles den in Richtung dieses Strahles fallenden Wert von $\mathfrak{K}_\nu$ als Funktion der Bogenlänge s gegeben, also

$$(\mathfrak{K}_\nu)_{t=0} = f_\nu(s) \tag{102}$$

auf jedem festen Strahl.

Damit der so gekennzeichnete Zustand physikalisch möglich ist, muß von der Funktion f_ν gefordert werden, daß sie nirgends negativ wird. Ferner sind noch Festsetzungen über die Wahl des Anfangspunktes von s zu treffen. Jeder Strahl, d. h. unter den gegenwärtigen Voraussetzungen: jede mit Richtungssinn versehene Gerade, beginnt entweder auf einem Punkte der Begrenzung oder im Unendlichen; wir wollen, der Kürze der Ausdrucksweise wegen, auch in letzterem Falle von einem „Anfangspunkte" des Strahles sprechen. Liegt nun der Anfangspunkt des Strahles im Endlichen, also auf der Oberfläche eines der schwarzen Körper, so soll s von diesem Anfangspunkte aus gezählt werden; liegt dagegen der Anfangspunkt im Unendlichen, so soll s von irgendeinem festen, im Endlichen auf dem betreffenden Strahle gewählten Punkte aus gezählt

werden. Weiter setzen wir noch fest, daß Punkte der Begrenzung — wobei wiederum uneigentliche Punkte nötigenfalls mitgerechnet werden — durch Koordinaten- und Parameterwerte mit dem Index 0 gekennzeichnet werden sollen. Demnach entsprechen Punkten $x_0 y_0 z_0$ entweder Parameterwerte $s_0 = 0$ oder $s_0 = -\infty$.

Nach diesen Festsetzungen bedarf nun die Angabe (102) noch einer Ergänzung; es muß nämlich *auf allen Strahlen, die im Endlichen beginnen,* f_ν für negative Argumentwerte verschwinden, d. h.

$$f_\nu(w) = 0 \quad \text{für} \quad w < 0 \,. \tag{103}$$

Ohne diese Bedingung würden nämlich Zustände, die zur Zeit $t = 0$ außerhalb der Begrenzung des Feldes lagen, in dieses hineingelangen, was natürlich auszuschließen ist.

Nunmehr können wir die auf S. 460 mitgeteilte physikalische Überlegung mathematisch formulieren. Dafür führen wir zunächst die folgenden Symbole ein:

$$[\mathfrak{R}_\nu]_0 = \overline{\mathfrak{R}_\nu}\left(x_0 y_0 z_0,\ t - \frac{s - s_0}{q}\right), \tag{104}$$

$$[\varepsilon^*_\nu]_1 = \varepsilon^*_\nu\left(x_1 y_1 z_1,\ t - \frac{s - s_1}{q}\right), \tag{105}$$

$$[f_\nu]_t = f_\nu(s - q t) \,. \tag{106}$$

Alle drei Symbole beziehen sich auf einen einzelnen, beliebig herausgegriffenen Strahl; der Punkt $x_0 y_0 z_0$ ist sein Anfangspunkt (mit dem Parameterwerrt $s_0 = 0$ oder $s_0 = -\infty$), und den Parameterwerten s und s_1 entsprechen zwei Punkte des Strahls mit den Koordinaten $x\,y\,z$ bzw. $x_1 y_1 z_1$.

Bilden wir jetzt in Verallgemeinerung von (IVa) den „retardiert" berechneten Ausdruck

$$\mathfrak{R}_\nu(s,t) = [\mathfrak{R}_\nu]_0 e^{-a_\nu(s - s_0)} + \int_{s_0}^{s} [\varepsilon^*_\nu]_1 e^{-a_\nu(s - s_1)} d s_1 + [f_\nu]_t e^{-a_\nu q t}, \tag{IVb}$$

so genügt er allen an ihn zu stellenden Forderungen, wenn man außerdem die folgenden Festsetzungen trifft, über die gleich zu sprechen sein wird:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}_\nu}(x\,y\,z,\ w) &= 0 \\ \overline{\mathfrak{R}_\nu}(x_0 y_0 z_0,\ w) &= 0 \\ \mathfrak{R}_\nu(x\,y\,z,\ w) &= 0 \\ \varepsilon^*_\nu(x\,y\,z,\ w) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{für } w < 0 \,. \tag{107}$$

Man überzeugt sich leicht, daß der Ausdruck (IVb) für $\mathfrak{K}_\nu$ als Funktion von s und t der Differentialgleichung (10) genügt; er befriedigt aber auch die Grenz- und Anfangsbedingungen. Für $s = s_0$ fallen das zweite und dritte Glied fort (letzteres wegen (103)) und es bleibt für alle Zeiten $t > 0$

$$\mathfrak{K}_\nu(s_0, t) = \overline{\mathfrak{K}}_\nu(x_0\, y_0\, z_0, t)\,. \tag{108}$$

Liegt der „Anfangspunkt" nicht im Endlichen, so verschwindet das erste Glied in (IVb) wegen des Exponentialfaktors; eine Einstrahlung aus dem Unendlichen kommt also bei endlichem Absorptionskoeffizienten im Endlichen nicht zur Wirkung.

Für $t = 0$ verschwinden die ersten beiden Glieder in (IVb) wegen der Festsetzungen (107) und es ergibt sich, wie gefordert,

$$\mathfrak{K}_\nu(s, o) = f_\nu(s)\,. \tag{109}$$

Was nun die Festsetzungen (107) betrifft, so sind sie zulässig, weil sie den Grundgleichungen, d. h. also den Gleichungen (10) und (101) für $t = w < 0$ genügen und weil man über die Strahlungsvariablen für $t < 0$ im übrigen nach Belieben verfügen kann; es wird ja nur nach dem Strahlungszustand für $t > 0$ gefragt.

Natürlich sind die Festsetzungen (107) nicht so zu verstehen, als ob wir für $t < 0$ wirklich ein verschwindendes Strahlungsfeld annehmen müßten; das Strahlungsfeld kann auch für $t < 0$ bestanden haben, aber seine Nachwirkungen sind durch die Angabe des Anfangszustandes [Gl. (102) und (103)] bereits erschöpfend dargestellt. Die Gleichungen (107) enthalten also gar keine Aussagen über das Feld für $t < 0$ (darum haben wir auch das Argument w geschrieben), sondern es sind rein mathematische Festsetzungen über die auftretenden Funktionen, Festsetzungen, mit deren Hilfe das Strahlungsfeld für $t > 0$ richtig dargestellt wird.

Wir bemerken noch, daß (Gl. IVb) auch dann noch eine Lösung unserer partiellen Differentialgleichung (10) bleibt, wenn $f_\nu = 0$ gesetzt wird (das Glied $[f_\nu]_{t-\frac{s}{c}} e^{-\varkappa_\nu s}$ ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung). Man kann darum unsere Lösung auch der weniger allgemeinen, oben (S. 461) erwähnten Darstellung der Vorgeschichte des Feldes anpassen; man braucht dafür nur $f_\nu = 0$ zu setzen und ε_ν^* für ein hinreichend langes, $t = 0$ vorausgehendes Zeitintervall

τ (vgl. S. 461) gegeben zu denken. Dann läßt sich auf Grund eben der Gl. (IVb) $\mathfrak{R}_\nu$ als Funktion des Orts und der Richtung für $t = 0$ berechnen.

Die Gleichung (IVb) gestattet allgemein, die Intensität $\mathfrak{R}_\nu$ als Funktion des Orts, der Richtung und der Zeit durch eine Quadratur zu finden, sobald ε_ν^* bekannt ist. Letztere Größe selbst bestimmt sich durch eine Integralgleichung, die man erhält, indem man (IVb) in (101) einträgt. Wir denken uns die Substitution ausgeführt und verwandeln das erste Integral in ein Integral über die Begrenzung, das zweite in ein Integral über das Volumen des Feldes. Zu diesem Zwecke führen wir an Stelle der Variablen s die Entfernung r ein, die ein Punkt des Feldes oder seiner Begrenzung vom Aufpunkt mit den Koordinaten xyz hat. Sei ferner $d\Omega$ ein infinitesimaler Öffnungswinkel, der bei xyz beginnt, $d\sigma_1$ sein rechtwinkliger Querschnitt an der Stelle $x_1 y_1 z_1$ und endlich df_0 ein Element der Oberfläche an der Stelle $x_0 y_0 z_0$, dessen innere Normale N dort mit r den Winkel (Nr) bildet, so gelten die elementaren Beziehungen

$$(110)\quad d\Omega = \frac{d\sigma_1}{r^2}, \qquad d\sigma_1\, dr_1 = dv_1, \qquad d\Omega = \frac{df_0 \cos(Nr)}{r^2}.$$

Mit Benutzung dieser Relation erhält man schließlich

$$(\mathrm{IIIb})\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_\nu^*(xyz,t) = \frac{\alpha_\nu}{4\pi}\Bigg\{ & \int_{f^0} \frac{e^{-\alpha_\nu r}}{r^2} [\mathfrak{R}_\nu]_0 \cos(Nr)\, df_0 \\ & + \int_{v^0} \frac{e^{-\alpha_\nu r}}{r^2} [\varepsilon_\nu^*]_1\, dv_1 + e^{-\alpha_\nu q t} \int [f_\nu]_t\, d\Omega \Bigg\} + \mathfrak{E}_\nu(xyz,t) \end{aligned}\right.$$

als Integralgleichung für ε_ν^*. Dabei ist jetzt an Stelle von (104) und (105) zu setzen

$$(111)\qquad [\mathfrak{R}_\nu]_0 = \overline{\mathfrak{R}}_\nu\left(x_0 y_0 z_0,\ t - \frac{r}{q}\right),$$

$$(112)\qquad [\varepsilon_\nu^*]_1 = \varepsilon_\nu^*\left(x_1 y_1 z_1,\ t - \frac{r}{q}\right).$$

Für stationäre Zustände geht die Gleichung (IIIb) unmittelbar in (IIIa) über und stellt also — unter der Voraussetzung eines homogenen Mediums und schwarzer Grenzen — die Verallgemeinerung der Hilbertschen Integralgleichung auf zeitlich veränderliche Vorgänge dar. Wie in (IIIa) sind die beiden ersten Integrale über die Teile der Begrenzung bzw. des Vo-

lumens, f^* bzw. v^*, zu erstrecken, die Strahlung zum Aufpunkt senden, das neu hinzugekommene dritte Integral, das den geforderten Anfangsbedingungen Rechnung trägt, ist über die Einheitskugel zu erstrecken.

Zur Auflösung von (IIIb) verfahren wir genau wie im Anschluß an (IIIa), d. h. wir setzen ε_ν^* als Reihe an, die nach Potenzen des Parameters α_ν fortschreitet

$$\varepsilon_\nu^* = \varepsilon_{\nu 0} + \varepsilon_{\nu 1} \cdot \alpha_\nu + \varepsilon_{\nu 2} \cdot \alpha_\nu^2 + \cdots \tag{66}$$

Die Koeffizienten dieser Reihe ergeben sich, nach Substitution von (66) in (IIIb), durch wiederholte Quadraturen

$$\left\{\begin{aligned}
&\varepsilon_{\nu 0} = \mathfrak{E}_\nu, \\
&\varepsilon_{\nu 1} = \frac{1}{4\pi}\left\{\int_{f^*} \frac{e^{-a_\nu r}}{r^2} [\mathfrak{K}_\nu]_0 \cos(Nr)\, df_0 + \int_{v^*} \frac{e^{-a_\nu r}}{r^2} [\mathfrak{E}_\nu]_1\, dv_1 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + e^{-a_\nu q t} \int [f_\nu]_1\, d\Omega \right\}, \\
&\varepsilon_{\nu 2} = \frac{1}{4\pi} \int_{v^*} \frac{e^{-a_\nu r}}{r^2} [\varepsilon_{\nu 1}]_1\, dv_1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\varepsilon_{\nu i} = \frac{1}{4\pi} \int_{v^*} \frac{e^{-a_\nu r}}{r^2} [\varepsilon_{\nu (i-1)}]_1\, dv_1 .
\end{aligned}\right. \tag{113}$$

Die Bedeutung der benutzten Symbole $[\varepsilon_{\nu i}]_1$ und $[\mathfrak{E}_\nu]_1$ ergibt sich aus Analogie mit (112).

Wir bemerken noch, daß die Koeffizienten $\varepsilon_{\nu i}$ eine anschauliche physikalische Bedeutung haben. Sehen wir für diese Betrachtung von der Berücksichtigung des Anfangszustandes ab, der ja wegen des Faktors $e^{-a_\nu q t}$ sehr schnell abklingt, so stellen $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{E}_\nu$ die durch Einstrahlung und im Volumen *primär* zugeführte Energie dar. Diese primäre Energie wird teilweise vom Medium absorbiert und erzeugt — mit angemessener Verspätung — an jeder Stelle des Feldes eine sekundäre Emission $\varepsilon_{\nu 1}$; diese wird wiederum absorbiert und erzeugt eine tertiäre Emission $\varepsilon_{\nu 2}$ usf. Das Glied $\varepsilon_{\nu i} \cdot \alpha_\nu^i$ stellt also den Anteil an der Emission dar, der zum $(i-1)$-ten Male wiederemittiert wird. Es leuchtet ein, daß die einzelnen Beiträge bei kleinen Werten von α_ν schnell abnehmen müssen und daß die Reihe (66) dann also rasch konvergiert.

Wir wollen nun noch ein einfaches Beispiel dafür geben, wie ein vorgeschriebener Anfangszustand abklingt. Wir wählen

einen Fall, in dem der Zustand, außer von der Zeit t, nur von einer Koordinate x abhängt. Zur Zeit $t = 0$ sei der zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = d$ liegende Raum von isotroper Strahlung von der Intensität C_ν erfüllt; von $t = 0$ an werden die beiden schwarzen Grenzebenen auf der Temperatur $T = 0$ gehalten. Es wird nach dem Strahlungszustand für $t > 0$ gefragt, wenn von einer Energieerzeugung im Felde abgesehen wird ($\mathfrak{E}_\nu = 0$).

Wir beschränken uns auf die Berechnung der ersten Approximation und auf den Fall $x \leqq \frac{d}{2}$, da aus Symmetriegründen im Fall $\frac{d}{2} \leqq x < d$

$$\varepsilon_\nu(x) = \varepsilon_\nu(d - x) \tag{114}$$

ist.

Nach den Voraussetzungen wird $\varepsilon_{\nu 0} = 0$; bei der Auswertung des Integrals

$$\varepsilon_{\nu 1} = \frac{1}{4\pi} \int f_\nu(s - qt) e^{-a_\nu q t} \, d\Omega \tag{115}$$

liefern nur diejenigen Richtungen einen von 0 verschiedenen Beitrag, in denen $s - qt \geqq 0$ ist [wegen (103)]. Demnach haben wir drei Zeitperioden zu unterscheiden.

Solange für ein beliebig gewähltes x die Zeit $t \leqq x/q$ ist, verschwindet der Integrand in keiner Richtung; dann ist also unabhängig von x

$$\varepsilon_{\nu 1} = C_\nu e^{-a_\nu q t}; \qquad 0 < t \leqq \frac{x}{q}. \tag{116a}$$

Sobald t größer geworden ist als x/q, aber $(d - x)/q$ nicht überschreitet, liefern nur mehr solche Richtungen einen Beitrag zum Integral (115), die mit der x-Achse einen Winkel $\vartheta \geqq \vartheta_0 = \arccos \frac{x}{qt}$ bilden. So ergibt sich

$$\varepsilon_{\nu 1} = \frac{C_\nu}{2} e^{-a_\nu q t} \left(1 + \frac{x}{qt}\right); \qquad \frac{x}{q} < t \leqq \frac{d - x}{q}. \tag{116b}$$

Ist endlich t größer als $(d - x)/q$, so liefern nur die Richtungen zwischen den Grenzen ϑ_0 und ϑ_1 Beiträge, wobei sich ϑ_1 aus der Beziehung $\vartheta_1 = \arccos \frac{x - d}{q}$ berechnet.

Es wird dann

$$\varepsilon_{\nu 1} = \frac{C_\nu}{2} e^{-a_\nu q t} \cdot \frac{d}{qt}; \qquad \frac{d - x}{q} < t. \tag{116c}$$

Die drei Formeln (116) egeben die zeitliche Abnahme des Emissionskoeffizienten $\varepsilon_\nu = \alpha_\nu \varepsilon_{\nu 1}$ im Grenzfalle sehr schwacher Absorption. Für $x = 0$ (und demnach auch für $x = d$) fällt die Periode (116a) fort, für $x = d/2$ die mittlere Periode (116b).

Die Strahlungsdichte ergibt sich vermöge (29) aus ε_ν; die Berechnung von $\mathfrak{K}_\nu$ erfordert die Ausführung einer weiteren Quadratur gemäß (IVb). Für die Berechnung von $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{S}_\nu$ wollen wir uns auf den noch einfacheren Spezialfall beschränken, daß $d = \infty$ gesetzt wird, das heißt also, daß für $t = 0$ der Halbraum $x > 0$ von schwarzer Strahlung erfüllt ist.[1]) Unter dieser Voraussetzung sind für $\varepsilon_{\nu 1}$ nur die beiden Zeitabschnitte (116a) und (116b) zu berücksichtigen.

Für den ersten Zeitabschnitt ($0 < t \leqq x/q$) können alle Richtungen ϑ gleich behandelt werden; man findet, indem man $\varepsilon_\nu^* = \varepsilon_{\nu 1} \cdot \alpha_\nu$ gemäß (116a) in (IVb) einträgt, unter Berücksichtigung von (103) bis (106)

$$\mathfrak{K}_\nu = C_\nu e^{-\alpha_\nu q t} [1 + \alpha_\nu q t]; \qquad \begin{matrix} 0 < t \leqq x/q, \\ 0 \leqq \vartheta \leqq \pi. \end{matrix} \tag{117a}$$

Die Strahlung ist also für alle $x > 0$ in diesem ersten Zeitintervall isotrop, wie das ja auch physikalisch einleuchtend ist.

Für $t > x/q$ sind zwei Winkelräume zu unterscheiden, die durch den Wert $\vartheta_0 = \arccos \frac{x}{qt}$ getrennt werden. Für alle ϑ die kleiner sind als dieser Wert, wird das Argument von (106) negativ. Dort verschwindet also außer dem ersten Gliede in (IVb) auch das dritte, und im zweiten Gliede kommt ausschließlich der Wert (116b) in Frage. So ergibt sich

$$\mathfrak{K}_\nu = \frac{1}{2} \alpha_\nu C_\nu e^{-\alpha_\nu q t} \int_0^{\frac{x}{\cos\vartheta}} \left(1 + \frac{x_1}{qt}\right) dr_1,$$

---

1) In dem allgemeineren Falle (d endlich) kompliziert sich die Rechnung insofern etwas mehr, als bei der Auswertung von $\mathfrak{K}_\nu$ dann 5 Zeitintervalle mit den Grenzen $t = 0$, x/q, $(d - x)/q$, $(d + x)/q$, $(2d - x)/q$, ∞ zu unterscheiden sind. Für jedes dieser Zeitintervalle muß man die Gebiete abgrenzen, die nach 116a, b oder c emittieren und Richtungen unterscheiden, in denen ein, zwei oder drei verschiedene Gebiete geschnitten werden. Im übrigen gelten die im Text entwickelten Formeln auch für den allgemeineren Fall, so lange t kleiner als $(d - x)/q$ bleibt.

wenn wir mit r_1 die Entfernung des Integrationselements vom Aufpunkt verstehen. Berücksichtigt man nun noch den Zusammenhang

$$x_1 = x - r_1 \cos\vartheta$$

und führt die Integration aus, so ergibt sich

$$(117\,\mathrm{b})\quad \mathfrak{K}_\nu = \frac{1}{2}\,\alpha_\nu C_\nu e^{-\alpha_\nu q t}\left[\frac{x}{\cos\vartheta} + \frac{x^2}{2qt\cos\vartheta}\right];\quad \begin{matrix} t > x/q, \\ 0 \leqq \vartheta < \vartheta_0. \end{matrix}$$

Im Winkelraum $\vartheta_0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ verschwindet dagegen das dritte Glied in (IVb) nicht, und auf jedem Strahle ist eine, dem Aufpunkt zunächst liegende Strecke zu unterscheiden, auf der (116b) gilt und eine zweite Strecke, auf der (116a) gilt. Die Grenzen dieser Strecken, $\bar{r}_1$ und $\bar{r}_2$, bestimmen sich aus den Gleichungen

$$t - \frac{\bar{r}_1}{q} = \frac{\bar{x}_1}{q}, \qquad \bar{x}_1 = x - \bar{r}_1\cos\vartheta, \qquad \bar{r}_1 = \frac{qt - x}{1 - \cos\vartheta},$$

$$t = \frac{\bar{r}_2}{q} = 0, \qquad \bar{r}_2 = qt.$$

Man erhält also jetzt

$$\mathfrak{K}_\nu = C_\nu e^{-\alpha_\nu q t}\left[1 + \frac{\alpha_\nu}{2}\int_0^{\bar{r}_1}\left(1 + \frac{x_1}{qt}\right)dr_1 + \alpha_\nu\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} dr_1\right],$$

denn jenseits von $\bar{r}_2$, d. h. für $r_1 > \bar{r}_2$ verschwindet der Integrand wegen (107). Die Ausführung der Integration ergibt schließlich

$$(117\,\mathrm{c})\quad \mathfrak{K}_\nu = C_\nu e^{-\alpha_\nu q t}\left[1 + \alpha_\nu qt - \frac{\alpha_\nu}{4}\,\frac{(qt - x)^2}{qt}\cdot\frac{2 - \cos\vartheta}{(1 - \cos\vartheta)^2}\right];$$
$$t > x/q, \quad \vartheta_0 \leqq \vartheta \leqq \pi.$$

Allen drei Formeln (117) gemeinsam ist die außerordentlich schnelle Abnahme der Intensität mit der Zeit, wenn α_ν nur einigermaßen von Null verschieden ist.

Berechnen wir nun noch den Strahlungsstrom $\mathfrak{S}_{\nu x}$ [nach Gl. (6)], so verschwindet er im Zeitabschnitt $0 < t \leqq x/q$ nach (117a) wegen der dann herrschenden Isotropie. Dagegen ergibt sich für $t > x/q$ vermöge (117b) und (117c)

$$(118)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_{\nu x} = -\pi C_\nu e^{-\alpha_\nu q t}\left[\left(1 - \left(\frac{x}{qt}\right)^2\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \alpha_\nu qt\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{qt} - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{qt}\right)^2\right)\right]; \quad t > x/q. \end{cases}$$

Der Strahlungsstrom hat natürlich die Richtung der negativen x-Achse; er beginnt an der Stelle $x = 0$ zur Zeit $t = 0$ mit dem maximalen Wert $-\pi C_\nu$, um dann nach dem Gesetz

$$\mathfrak{S}_{\nu x} = -\pi C_\nu e^{-\alpha_\nu q t}\left[1 + \tfrac{3}{4}\alpha_\nu q t\right]; \quad t > 0; \quad x = 0, \tag{118a}$$

abzufallen. An allen anderen Stellen, $x > 0$, setzt er erst zur Zeit $t = x/q$ ein, und zwar mit dem Werte Null, um nach einem komplizierteren Verlauf schließlich wieder auf Null herunterzusinken.

Nicht uninteressant ist auch der Grenzfall $\alpha_\nu = 0$, den unsere Lösung streng wiedergibt; dann ist

$$\mathfrak{S}_{\nu x} = -\pi C_\nu\left[1 - \left(\frac{x}{qt}\right)^2\right]; \quad t > x/q. \tag{119}$$

An der Stelle $x = 0$ hat also der Strahlungsstrom unabhängig von der Zeit seinen Maximalwert; an allen anderen Stellen beginnt er erst zur Zeit $t = x/q$ mit dem Werte Null, um allmählich auf den gleichen Maximalwert anzusteigen. Das ist in der Tat einleuchtend, denn im Inneren ist die Strahlung anfangs isotrop und die Anisotropie verstärkt sich von der Zeit $t = x/q$ an immer mehr, indem der Nachschub von Strahlung von der Seite der negativen x her in immer größeren räumlichen Winkeln fortbleibt.

In dem von uns gerechneten Beispiel klingt der vorgegebene Anfangszustand im mathematischen Sinne erst nach unendlich langer Zeit vollständig auf Null ab, obgleich wir nur die erste Approximation durchgeführt haben. Dieser Fall tritt aber nur dann ein, wenn das Feld wenigstens in einigen Richtungen sich ins Unendliche erstreckt. Ist das Feld dagegen allseitig von schwarzen Wänden begrenzt, die von $t = 0$ an auf der Temperatur $T = 0$ gehalten werden, so ergibt ein *endliches* Stück der Reihe (66) — wenn keine Energieerzeugung im Inneren stattfindet — nur für eine endliche Zeit von Null verschiedene Werte.

Sei nämlich l die weiteste im Felde vorkommende Entfernung zweier Punkte, die sich gegenseitig zustrahlen können, und sei $\tau = l/q$ die Zeit, in welcher die Strahlung l durchläuft, so verschwindet der erste Koeffizient $\varepsilon_{\nu 1}$ nach (113) und (103) spätestens von $t = \tau$ an. Berechnet man mit diesem $\varepsilon_{\nu 1}$ den nächsten Koeffizienten, so verschwindet er spätestens von $t = 2\tau$ an; man berücksichtigt dann Strahlung, die den Weg l

zweimal zurückgelegt hat — usf. Je mehr Glieder der Reihe (66) herangezogen werden, desto länger werden die Zeiten, für welche die Lösung von Null verschiedene Werte liefert. Diese Verhältnisse sind natürlich in der Art und Weise begründet, wie wir approximative Lösungen der Integralgleichung (IIIb) gewinnen. Streng gültige Lösungen würden, genau wie in der Theorie der Wärmeleitung und wie im Grenzfalle starker Absorption (§ 3), im mathematischen Sinne erst für $t = \infty$ verschwinden.

§ 6. Inhomogene Medien.

Im folgenden wollen wir den Inhalt unserer bisherigen Untersuchung auf materielle Strahlungsfelder ausdehnen, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Absorptionskoeffizient stetige Funktionen des Orts sind. Wir wollen diese Größen jedoch als „langsam veränderlich" annehmen, damit — wenn noch an der Annahme schwarzer Grenzflächen festgehalten wird — von einer Reflexion der Strahlen abgesehen werden kann.[1]) Streuung der Strahlen lassen wir nach wie vor unberücksichtigt.

Noch in einer anderen Beziehung wollen wir unser Problem verallgemeinern. Bei der Festlegung der Grenzbedingungen (I S. 592) hatten wir vorausgesetzt, daß jeder der begrenzenden schwarzen Körper K_i zu jeder Zeit an seiner ganzen Oberfläche O_i die gleiche Temperatur T_i haben solle. Von dieser Voraussetzung ist allerdings im Verlaufe der Rechnung nirgends ausdrücklich Gebrauch gemacht worden. Ändern wir nur die eine Aussage auf S. 599 dahin ab, daß die Lösung für das dort definierte Strahlungspotential nicht „soviele Konstanten", sondern „soviele willkürliche Funktionen" enthält, wie Flächen O_i vorhanden sind, so gelten die sämtlichen Entwicklungen der ersten fünf Paragraphen unverändert, wenn man die allgemeinere Annahme macht, daß die Temperaturen der Grenzflächen von Stelle zu Stelle variieren dürfen.

Wir wollen also den Ausführungen dieses Paragraphen ausdrücklich die Annahme zugrunde legen, daß das Strahlungsfeld von einer Anzahl von schwarzen Flächen begrenzt sei, die geschlossen oder ungeschlossen sein können, und auf denen die Temperatur — und damit die Einstrahlung ins Feld —

1) W. Behrens, Math. Ann. 76. S. 380. 1915.

gegebene Funktion des Ortes und der Zeit ist. Erstreckt sich das Feld in allen oder einigen Richtungen ins Unendliche, so ist wieder eine große Kugel ganz oder teilweise als eine der Grenzflächen mitzuzählen und an ihr soll die Einstrahlung verschwinden.

In inhomogenen, dispergierenden und absorbierenden Medien ist die „Fortpflanzungsgeschwindigkeit" nicht mehr ein einheitlicher Begriff. Wo immer wir es in den ersten fünf Paragraphen mit der Geschwindigkeit der Strahlen zu tun hatten, handelte es sich, wie die Ableitung der Gleichung (10) zeigt, um die Geschwindigkeit, mit welcher die Strahlungsintensität fortschreitet, d. h. um die Energiegeschwindigkeit[1]), die in dispergierenden Medien mit der Gruppengeschwindigkeit zusammenfällt[2]), und für welche wir jetzt die Bezeichnung q_ν einführen wollen.

Davon zu unterscheiden ist die Größe v_ν, die in einem inhomogenen Medium die Strahlenwege nach dem Fermatschen Prinzip als Minimalkurven des Variationsprinzips

$$120) \qquad \int_{x\,y\,z}^{x_1\,y_1\,z_1} \frac{ds}{v_\nu} = \text{Min.}$$

bestimmt.[3])

Der optische Koeffizient v_ν fällt nur in schwach absorbierenden Medien mit der Phasengeschwindigkeit (einzelner, stationärer Wellen) zusammen, genauer gesprochen: nur dann, wenn der Extinktionskoeffizient klein gegen 1 ist.[4]) Die Ab-

1) Nur in den beiden Gleichungen (III) und (IV), die wir von Hilbert übernommen haben, und die sich noch auf inhomogene Medien beziehen, wäre q durch das gleich zu definierende v zu ersetzen; aber beim Übergang zu den von uns allein benutzten Gleichungen (IIIa) und (IVa) fällt die Geschwindigkeit heraus.

2) M. Laue, Ann. d. Phys. 18. S. 523. 1905.

3) D. Hilbert, Phys. Z. 13. S. 1056. 1912; 15. S. 873. 1914.

4) M. Laue, Ann. d. Phys. 32. S. 1085. 1910. Der Extinktionskoeffizient $\varkappa_\nu$ steht mit dem von uns benutzten Absorptionskoeffizienten α_ν in dem Zusammenhang

$$\varkappa_\nu = \frac{c}{4\pi n \nu} \alpha_\nu$$

(c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, n = Brechungskoeffizient). Die Forderung $\varkappa_\nu \ll 1$ ist durchaus nicht gleichbedeutend mit der Forderung „schwacher Absorption" in dem von uns benutzten Sinne (oben S. 457). Bei noch so kleinen, endlichen Werten von $\varkappa_\nu$ kann der Grenzfall starker

hängigkeit der Größen q_ν und v_ν von Brechungskoeffizient und Extinktionskoeffizient ist nicht für alle in Betracht kommenden Fälle bekannt, aber dem phänomenologischen Charakter unserer Theorie entsprechend braucht uns diese Abhängigkeit nicht zu beschäftigen. Wir setzen q_ν sowohl wie v_ν als bekannte Funktionen der Schwingungszahl und des Ortes voraus. Für die meisten Zwecke dürfte es genügen, die beiden Größen zusammenfallen zu lassen.

Wir nehmen ferner an, das Problem (120) sei gelöst, und der Verlauf der Strahlenwege bekannt. An den oben (S. 461, 462) getroffenen Festsetzungen über den Anfangspunkt von s, über die Bezeichnung von Punkten der Begrenzung und die Festlegung des Anfangszustandes halten wir fest.

Im folgenden wird auf die Krümmung der Lichtstrahlen und die dadurch bedingten Verhältnisse Rücksicht zu nehmen sein. Wir bezeichnen von jetzt an mit $d\Omega_1$ den unendlich kleinen Öffnungswinkel eines Elementarbündels[1]), das von der Stelle xyz ausgeht und den Strahl s zur Achse hat. Sei $d\sigma_1$ sein orthogonaler Querschnitt an der Stelle $x_1y_1z_1$, so setzen wir mit Hilbert[2])

$$\frac{1}{v_{\nu 1}^2}\frac{d\sigma_1}{d\Omega_1} = S(xyz, x_1y_1z); \tag{121}$$

dabei bedeutet $v_{\nu 1}$ den Wert von v_ν im Punkte $x_1y_1z_1$. S ist eine Funktion der beiden Punkte xyz und $x_1y_1z_1$, die durch das Fermatsche Prinzip völlig bestimmt ist und die wir als ermittelt voraussetzen. Von dieser Funktion ist insbesondere bekannt, daß sie symmetrisch in bezug auf die beiden Punkte (xyz) und $(x_1y_1z_1)$ ist.[3]) Bedeutet also weiter $d\sigma$ ein zu s senkrechtes Flächenelement an der Stelle xyz und $d\Omega$ den Öffnungswinkel, unter dem es von $x_1y_1z_1$ aus erscheint, so gilt die Beziehung

$$\frac{d\Omega\, d\sigma_1}{v_{\nu 1}^2} = \frac{d\Omega_1\, d\sigma}{v_\nu^2}. \tag{122}$$

Ersetzt man die orthogonalen Querschnitte $d\sigma$ und $d\sigma_1$ durch beliebig gestellte Flächenelemente df und df_1, deren

---

Absorption vorliegen, wenn nur das Strahlungsfeld hinreichend ausgedehnt ist. Die Verhältnisse in den Riesensternen sind ein Beispiel dafür (I S. 625).

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. 4. Auf. Leipzig 1921. § 21.

2) D. Hilbert, Phys. Z. 13. S. 1056. 1912.

3) R. Straubel, Phys. Z. 4. S. 114. 1903.

Normalen mit s an den Stellen xyz bzw. $x_1y_1z_1$ die spitzen Winkel ξ und ξ_1 einschließen, so tritt an die Stelle von (122)

$$\frac{d\Omega\, df_1 \cos\xi_1}{v_{\nu 1}^2} = \frac{d\Omega_1\, df \cos\xi}{v_\nu^2}. \tag{123}$$

Für die Energiedichte im Punkte xyz bleibt der Ausdruck

$$u_\nu = \frac{2}{q_\nu} \int \mathfrak{K}_\nu\, d\Omega_1 \tag{124}$$

in Geltung, jedoch können wir uns nicht mehr auf die Ableitung bei Planck[1]) berufen, die geradlinige Ausbreitung der Strahlen voraussetzt. Dagegen führt eine ähnliche Betrachtung zum Ziele, wie sie Hilbert für die Ableitung seines Ausdrucks für u_ν anstellt.[2])

Wir betrachten nämlich zunächst für einen gegebenen Zeitpunkt die Energiemenge

$$2\,\mathfrak{K}_\nu\, d\nu\, d\sigma\, d\Omega_1\, dt,$$

die während des Zeitelements dt, innerhalb des Intervalls $d\nu$ und des Öffnungswinkels $d\Omega_1$ durch ein bei xyz befindliches Flächenelement $d\sigma$ normal hindurchtritt. Wegen des Wertes q_ν der Energiegeschwindigkeit, erfüllt diese Energie einen rechtwinkligen Zylinder von der Basis $d\sigma$ und der Höhe $q_\nu\, dt$. Also ist die Energiedichte im Punkte xyz, soweit sie von der betrachteten Strahlung herrührt,

$$\frac{2\mathfrak{K}_\nu\, d\nu\, d\Omega_1}{q_\nu}.$$

Die gesuchte Gesamtdichte für die Schwingungszahl ν ergibt sich also durch Integration nach $d\Omega_1$ und Division durch $d\nu$ in Übereinstimmung mit (124).

Auch die Definitionsgleichung (6) für $\mathfrak{S}_\nu$ bleibt unverändert, jedoch erfordert die Berechnung von div $\mathfrak{S}_\nu$ die Berücksichtigung der Veränderlichkeit von v_ν mit dem Ort.

Wir denken uns in der üblichen Weise an der Stelle xyz ein Elementarparalleliped mit den Kantenlängen dx, dy, dz und berechnen den Überschuß der Ausstrahlung über die Einstrahlung zunächst durch die beiden zur x-Achse senkrechten Seitenflächen bei x und $x + dx$. Wir zerlegen diese Flächen

---

1) M. Planck, l. c. § 22.
2) D. Hilbert, Phys. Z. 13. S. 1056. 1912. Vor Formel (5).

in Elemente df bzw. df', die unendlich klein gegen $dy\,dz$ sind und haben nun die Differenz

$$\text{(125)} \qquad \iint \mathfrak{R}_\nu' \cos\vartheta'\, df'\, d\Omega - \iint \mathfrak{R}_\nu \cos\vartheta\, df\, d\Omega_1$$

zu bilden. Die ungestrichenen Größen und $d\Omega_1$ beziehen sich auf die Fläche bei x, die gestrichenen Größen und $d\Omega$ auf die Fläche bei $x + dx$. Die Integrationen nach df und df' sind über das Rechteck $dy\,dz$ zu erstrecken, diejenigen nach $d\Omega_1$ und $d\Omega$ über die Einheitskugel. Die Unterteilung in Flächenelemente, die von höherer Ordnung unendlich klein sind, haben wir vorgenommen, damit die Öffnungswinkel, unter denen Flächenelemente der einen Fläche von Punkten der anderen aus erscheinen, unendlich klein werden.

Nunmehr ordnen wir solche Richtungen ϑ bzw. ϑ' einander zu, die bei der Fortbewegung der Strahlung auseinander hervorgehen, dann ist wegen (123)

$$\text{(126)} \quad \begin{cases} \cos\vartheta'\, df'\, d\Omega = \cos\vartheta\, df\, d\Omega_1 \cdot \dfrac{v_\nu'^3}{v_\nu^3} \\ \qquad\qquad = \cos\vartheta\, df\, d\Omega_1 \left(1 + \dfrac{2}{v_\nu} \dfrac{\partial v_\nu}{\partial x}\, dx\right). \end{cases}$$

Da ferner

$$\mathfrak{R}_\nu' = \mathfrak{R}_\nu + \frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial x}\, dx$$

ist, wird aus der Differenz (125)

$$dx\, dy\, dz \int \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial x} + \frac{2\mathfrak{R}_\nu}{v_\nu} \frac{\partial v_\nu}{\partial x}\right) \cos\vartheta\, d\Omega_1.$$

Man erhält also schließlich

$$\text{(127)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{S}_{\nu x}}{\partial x} = \displaystyle\int \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial x} + \frac{2\mathfrak{R}_\nu}{r_\nu} \frac{\partial v_\nu}{\partial x}\right) \cos\vartheta\, d\Omega_1 \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{v_\nu^2} \displaystyle\int \frac{\partial (v_\nu^2 \mathfrak{R}_\nu)}{\partial x} \cos\vartheta\, d\Omega_1 \end{cases}$$

und zwei entsprechende Ausdrücke für $\frac{\partial \mathfrak{S}_{\nu y}}{\partial y}$ und $\frac{\partial \mathfrak{S}_{\nu z}}{\partial z}$, in denen x durch y bzw. z und $\cos\vartheta$ durch $\sin\vartheta \cos\varphi$ bzw. $\sin\vartheta \sin\varphi$ ersetzt ist.

Die Grundgleichungen für den jetzt betrachteten Fall haben wir schon an anderem Orte aufgestellt (Ph. Z. S. 501). Dort wurde allerdings noch nicht zwischen q_ν und v_ν unterschieden, doch geht aus den hier gegebenen Betrachtungen ohne weiteres hervor, an welchen Stellen q_ν durch v_ν zu ersetzen ist.

Die erste Grundgleichung lautet, äußerlich unverändert, wie früher (I S. 592)

$$(I^*) \qquad \frac{\partial u_\nu}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_{\nu x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{S}_{\nu y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{S}_{\nu z}}{\partial z}\right) + 8\pi \mathfrak{E}_\nu ,$$

doch haben wir eben gesehen, daß der Ausdruck von div $\mathfrak{S}_\nu$ als Funktion von $\mathfrak{K}_\nu$ modifiziert ist.

Die zweite Grundgleichung hat jetzt die Gestalt

$$(II^*) \qquad \frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial s} + \frac{2\mathfrak{K}_\nu}{v_\nu}\frac{\partial v_\nu}{\partial s} + \frac{1}{q_\nu}\frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial t} = \varepsilon_\nu + \mathfrak{E}_\nu - \alpha_\nu \mathfrak{K}_\nu ,$$

in der sich noch, analog wie früher (I S. 590), die Differentiation nach s nach der Regel

$$(128) \qquad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial}{\partial y}\sin\vartheta\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\sin\vartheta\sin\varphi$$

auf die Grundvariablen x, y, z, ϑ, φ zurückführen läßt.

Aus den beiden Grundgleichungen folgt, wie auch bereits gezeigt wurde (Ph. Z. S. 502), die Gültigkeit der Relation

$$(129) \qquad \varepsilon_\nu = \frac{\alpha_\nu q_\nu u_\nu}{8\pi} .$$

Für die weitere Behandlung lassen sich die Grundgleichungen durch Einführung „reduzierter Variabler" vereinfachen. Es bedeute a_ν eine der Größen

$$(130) \qquad \varepsilon_\nu ,\ \mathfrak{E}_\nu ,\ \varepsilon_\nu^* ,\ \mathfrak{K}_\nu ,\ u_\nu ,\ \mathfrak{S}_\nu ,\ \mathfrak{A}_m^{(\mu)} ,\ \mathfrak{B}_m^{(\mu)} ,\ f_\nu ,$$

und $\mathfrak{a}_\nu$ die entsprechende Größe der Reihe

$$(131) \qquad \mathfrak{e}_\nu ,\ \mathfrak{E}_\nu ,\ \mathfrak{e}_\nu^* ,\ \mathfrak{K}_\nu ,\ \mathfrak{u}_\nu ,\ \mathfrak{S}_\nu ,\ \mathfrak{A}_m^{(\mu)} ,\ \mathfrak{B}_m^{(\mu)} ,\ \mathfrak{f}_\nu ,$$

so ordnen wir durch die Substitution

$$(132) \qquad \mathfrak{a}_\nu = v_\nu^2 a_\nu$$

je einer Variablen der Reihe (130) die entsprechende reduzierte Variable der Reihe (131) zu.

Mit Hilfe dieser Festsetzungen und unter Berücksichtigung von (127) nehmen die Grundgleichungen die folgende Form an

$$(I^{**}) \qquad \frac{\partial \mathfrak{u}_\nu}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_{\nu x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{S}_{\nu y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{S}_{\nu z}}{\partial z}\right) + 8\pi \mathfrak{E}_\nu ,$$

$$(II^{**}) \qquad \frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial s} + \frac{1}{q_\nu}\frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial t} = \mathfrak{e}_\nu + \mathfrak{E}_\nu - \alpha_\nu \mathfrak{K}_\nu .$$

Damit haben wir unsere früheren Gleichungen (Ia) und (10) formal wiedergefunden, nur muß berücksichtigt werden, daß q_ν und α_ν jetzt Ortsfunktionen sind.

Setzen wir jetzt [in Übereinstimmung mit (15), (130) und (132)]

$$(133)\qquad K_\nu = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{\mu=0}^{\mu=m} P_m^{(\mu)} \sin^\mu \vartheta \left(A_m^{(\mu)} \cos \mu\varphi + B_m^{(\mu)} \sin \mu\varphi\right),$$

so bestehen einerseits die zu (16) und (18) analogen Beziehungen für die reduzierten Größen, andererseits bleiben die Rechnungen unverändert, welche zur Aufstellung der Differentialgleichungen für die Reihenkoeffizienten führen. Man braucht also in den früher abgeleiteten Differentialgleichungen nur die Größen (130) durch die entsprechenden Größen (131) zu ersetzen, um zu den jetzt gültigen Gleichungen zu gelangen.

Insbesondere tritt im Grenzfalle starker Absorption, d. h. bei Beschränkung auf die vier ersten Glieder von (133), an die Stelle von (86) und (88) das System

$$(134)\qquad \frac{1}{q_\nu}\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial t} = -\frac{1}{3}\left(\frac{\partial A_1^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial B_1^{(1)}}{\partial z}\right) + E_\nu,$$

$$(135)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A_0^{(0)}}{\partial x} = -\alpha_\nu A_1^{(0)} - \dfrac{1}{q_\nu}\dfrac{\partial A_1^{(0)}}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial A_0^{(0)}}{\partial y} = -\alpha_\nu A_1^{(1)} - \dfrac{1}{q_\nu}\dfrac{\partial A_1^{(1)}}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial A_0^{(0)}}{\partial z} = -\alpha_\nu B_1^{(1)} - \dfrac{1}{q_\nu}\dfrac{\partial B_1^{(1)}}{\partial t}. \end{cases}$$

Diese vier Gleichungen genügen — zusammen mit den bei starker Absorption geltenden Grenzbedingungen für die Strahlungsdichte (I S. 603, 604) und Anfangsbedingungen für Strahlungsdichte und Strahlungsstrom — zur Bestimmung dieser Unbekannten. Für den stationären Fall reduziert sich das System (134) und (135) auf die Gleichungen der Wärmeleitung in inhomogenen Medien, und es ist zu vermuten, daß auch in vielen nichtstationären Problemen die zweiten Glieder auf den rechten Seiten von (135) ohne wesentlichen Einfluß sind. (Man vgl. § 8.) Ein allgemeines Verfahren zur Integration des Systems (134) und (135) läßt sich ebensowenig angeben, wie bei dem analogen Wärmeleitungsproblem, dagegen gelingt es, die Betrachtungen des fünften Paragraphen in vollem Umfange auf den jetzt untersuchten Fall zu übertragen.

Wir definieren wieder retardiert berechnete Größen

$$[K_\nu]_0 = \overline{K_\nu}\left(x_0\, y_0\, z_0,\ t - \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{q_\nu}\right), \tag{136}$$

$$[e_\nu^*]_1 = e_\nu^*\left(x_1\, y_1\, z_1,\ t - \int_{s_1}^{s} \frac{ds}{q_\nu}\right), \tag{137}$$

$$[f_\nu]_t = f_\nu(s_t) \tag{138}$$

und halten an den Festsetzungen (103) und (107) fest. Der Parameterwert s_t entspricht auf einem beliebigen Strahle demjenigen Punkte, von dem die Strahlungsenergie in der Zeit t bis zum Punkte mit dem Parameterwert s gelangt. Das heißt also, s_t ist durch die Gleichung

$$t = \int_{s_t}^{s} \frac{ds}{q_\nu(s)} \tag{139}$$

definiert, wobei q_ν als Funktion von s zu denken ist. Die Größe s_t ist demnach Funktion von s und von t; für $t = 0$ reduziert sich s_t auf s. Nach bekannten Regeln ist

$$\frac{\partial s_t}{\partial s} = \frac{q_\nu(s_t)}{q_\nu(s)}, \qquad \frac{\partial s_t}{\partial t} = -\, q_\nu(s_t). \tag{140}$$

Unter Berücksichtigung der angegebenen Definitionen und Festsetzungen überzeugt man sich nun, daß der Ausdruck

$$\text{(IV*)} \quad \begin{cases} K_\nu(s,t) = [K_\nu]_0\, e^{-\int_{s_0}^{s} \alpha_\nu\, ds} \\ \qquad + \int_{s_0}^{s} [e_\nu^*]_1\, e^{-\int_{s_1}^{s} \alpha_\nu\, ds}\, ds_1 + [f_\nu]_t\, e^{-\int_{s_t}^{s} \alpha_\nu\, ds} \end{cases}$$

der Gleichung (II**) genügt und den geforderten Rand- und Anfangsbedingungen genügt; in der Tat reduziert er sich für $s = s_0$ auf $\overline{K_\nu}(x_0\, y_0\, z_0,\ t)$ und für $t = 0$ [wegen (107)] auf $f_\nu(s)$.

Die Relation (129) läßt sich nun wieder in der Form

$$e_\nu^* = \frac{\alpha_\nu}{4\pi} \int K_\nu\, d\Omega_1 + E_\nu \tag{141}$$

schreiben; substituiert man hierin den Wert (IV*), so erhält man als Integralgleichung für e_ν^*

$$(\mathrm{III}^*)\quad \begin{cases} e_\nu^*(x,y,z,t) = \frac{\alpha_\nu}{4\pi}\left\{\int [K_\nu]_0\, e^{-\int_{s_0}^{s} \alpha_\nu\, ds}\, d\Omega_1 \right. \\ \left. + \int\int_{s_0}^{s} [e_\nu^*]_1\, e^{-\int_{s_1}^{s} \alpha_\nu\, ds}\, ds_1\, d\Omega_1 + \int [f_\nu]_1\, e^{-\int_{s_1}^{s} \alpha_\nu\, ds}\, d\Omega_1 \right\} + E_\nu(xyz,t) \end{cases}$$

Die beiden ersten Integrale lassen sich noch in ähnlicher Weise umformen, wie wir es früher (oben S. 464, Ph. Z. S. 502, 508) getan haben. Ist nämlich df_0 ein bei $x_0\, y_0\, z_0$ gelegenes, vom Aufpunkte xyz aus sichtbares Element der Begrenzung, und bildet seine innere Normale mit dem Strahle, der $x_0\, y_0\, z_0$ mit xyz verbindet, den Winkel (Ns), so ergibt sich aus (121) die Beziehung

$$(142)\qquad \frac{1}{\bar{v}_\nu^{\,2}}\,\frac{df_0\cos(Ns)}{S(xyz,\, x_0\, y_0\, z_0)} = d\Omega_1 .$$

Hier bedeutet $\bar{v}_\nu$ nach früheren Festsetzungen den Wert von v_ν an der Stelle $x_0\, y_0\, z_0$. Unter Berücksichtigung von (121) und (142) erhält man aus (III*)

$$(\mathrm{III}^{**})\quad \begin{cases} e_\nu^*(xyz,t) = \frac{\alpha_\nu}{4\pi} \\ \left\{ \int_{f^*} \frac{[K_\nu]_0\, e^{-\left|\int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} \alpha_\nu\, ds\right|}\cos(Ns)}{\bar{v}_\nu^{\,2}\, S(x_0\, y_0\, z_0,\, xyz)}\, df_0 + \int_{v^*} \frac{[e_\nu^*]_1\, e^{-\left|\int_{x_1 y_1 z_1}^{xyz} \alpha_\nu\, ds\right|}}{v_{\nu 1}^{\,2}\, S(x_1\, y_1\, z_1,\, xyz)}\, dv_1 \right. \\ \left. + \int [f_\nu]_1\, e^{-\int_{s_1}^{s} \alpha_\nu\, ds}\, d\Omega_1 \right\} + E_\nu(xyz,t). \end{cases}$$

Die Symbole f^* und v^* haben die früher (S. 465) angegebene Bedeutung; die Gleichung (III**) vereinfacht sich noch ein wenig, wenn man wieder die nicht reduzierten Variablen einführt, weil dann der Faktor $v_\nu^{\,2}$ im Nenner der beiden ersten Integranden fortfällt. Finden sich im Inneren des betrachteten Strahlungsfeldes konjugierte Punkte — ein Fall, der nicht ausgeschlossen zu werden braucht —, so verlieren die beiden ersten Integrale in (III**) ihre unmittelbare Bedeutung, weil es dann mehr als einen Verbindungsstrahl zwischen Integrationselement und Aufpunkt geben kann. Die Form, welche

diese Integrale ursprünglich in (III*) hatten, muß dann als ihre Definition angesehen werden.[1])

Die Integralgleichung (III**) enthält alle früher aufgestellten Formen als spezielle Fälle, und dasselbe gilt für die Gleichung (IV*) zur Berechnung der Intensität. Die Lösung für (III**) läßt sich wieder in die Form

$$e_\nu^* = e_{\nu 0} + e_{\nu 1} \cdot \alpha_\nu + e_{\nu 2} \cdot \alpha_\nu^2 + \dots \tag{143}$$

setzen. Die Koeffizienten der Reihe berechnen sich durch iterierte Integration mit Hilfe von Ausdrücken, die den Formeln (113) völlig analog sind und die wir nicht explizit anzugeben brauchen.

Damit ist unser Problem unter den allgemeinsten von uns zugelassenen Voraussetzungen auf Quadraturen zurückgeführt. Allerdings dürfte für spezielle Anwendungen die Reihe nur für kleine Werte des Absorptionskoeffizienten hinreichend schnell konvergieren.

Leipzig, im Oktober 1922.

---

1) Man vgl. hierzu die Ausführungen bei Hilbert. Phys. Z. 13. S. 1056. 1912.

(Eingegangen 26. Oktober 1922.)

3. *Über die Schwächung der sichtbaren Strahlung durch künstlichen, homogenen Nebel;* von O. Werner.

Der homogene[1]) Nebel ist vollständig bestimmt durch Brechungsexponent, Schichtdicke, Tropfenzahl und Tropfengröße. In dieser Arbeit ist für Wassernebel in Luft und in einem Gefäß von bestimmter Länge — also bei konstantem Brechungsexponenten und konstanter Schichtdicke — die Abhängigkeit des durchgehenden Lichtes von Tropfengröße und Tropfenzahl untersucht worden. Zur Bestimmung der

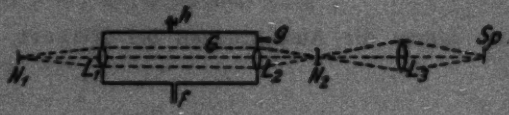


Fig. 1.

Schwächung wurde die spektralphotometrische Methode angewendet, wie sie zuerst von F. Kurlbaum und G. Schulze[2]) angegeben worden ist. Nernstfaden N_1 (vgl. Fig. 1) befindet sich im Brennpunkte der Linse L_1, sein Licht geht parallel durch das Nebelgefäß G und erzeugt in N_2 ein reelles Bild von N_1. Nahezu an derselben Stelle, d. h. ebenfalls in der Brennebene der Linse L_2, aber mit einer kleinen Höhendifferenz gegen Faden N_1, befindet sich der Faden N_2 und es werden beide Fäden durch die Linse L_3 auf den Spalt des Spektrometers in natürlicher Größe abgebildet; die Höhendifferenz

1) Der Nebel wird dann als homogen angesehen, wenn die Radien seiner Tropfen so wenig voneinander abweichen, daß eine durch den Nebel hindurchgesehene Lichtquelle Beugungserscheinungen zeigt.

2) F. Kurlbaum und G. Schulze, Verhandlungen d. deutsch. Phys. Ges. 5. S. 428. 1903 und H. Kohn, Diss. Breslau 1913.

ist so zu wählen, daß das Bild von N_1 zum Teil auf den Nernstfaden der Lampe N_2, zum Teil auf den Spektrometerspalt fällt. So grenzen beide Spektren scharf aneinander und lassen sich gut photometrieren. Nun werden die Spektren auf gleiche Helligkeit gebracht, dann wird in G Nebel erzeugt, wodurch das Spektrum von N_1 geschwächt[1]) wird, und darauf ist N_2 durch Regulierung der Stromstärke auf dieselbe Helligkeit zu bringen.[2]) Um eine Beziehung zwischen der Stromstärke und der Strahlungsintensität zu haben, wurden die Nernstfäden nach einer Methode von F. Kurlbaum und G. Schulze[3]) bei drei verschiedenen Temperaturen mit einem schwarzen Körper verglichen. Die Anwendung der Wien-Planckschen Strahlungsformel erlaubt dann die Berechnung der Strahlungsenergie für eine bestimmte Wellenlänge und eine bestimmte Temperatur.

Neben der Photometrie war darauf zu achten, daß der in G erzeugte Nebel genau definiert war, d. h. seine Tropfengröße und Tropfenzahl mußte sich für jeden Fall hinreichend bequem bestimmen lassen; andererseits mußte man diesen Nebel beliebig oft erzeugen können. Dieses Ziel wurde auf folgendem Wege erreicht: In das Nebelgefäß wurde durch Einsaugen von Flammengasen eine hohe Zahl von Kondensationskernen gebracht[4]), dann wurde durch die Zuführung f mit Wasserdampf gesättigte Luft eingeführt und in G ein Überdruck von $\Delta p = 5$ bis 40 cm Hg hergestellt. Wurde jetzt auf Atmosphärendruck entspannt, so trat ein überaus feiner dichter Nebel auf, d. h. mit sehr hoher Tropfenzahl

---

1) Durch die zugleich auftretenden Beugungserscheinungen wird das Spektrum etwas verzerrt, trotzdem hat die Abbildung nicht so weit an Schärfe verloren, daß eine Photometrie nicht mehr möglich wäre.

2) Verwendet wurden freihängende gerade Nernstfäden, die keinen selbsttätigen Vorwärmer besitzen; sie vertragen die bei diesen Versuchen notwendigen, starken Stromänderungen und lassen sich bequem sauber abbilden. Die Lampen wurden von den Osram-Werken durch Vermittlung von Prof. Pirani zur Verfügung gestellt; die Eichung wurde in der Phys. Techn. Reichsanstalt ausgeführt; beiden Stellen sei hier nochmals gedankt.

3) Vgl. Anmerkung 2, S. 480.

4) Über Kondensationskerne vgl. L. Andrén, Zählung und Messung d. kompl. Moleküle. Ann. d. Phys. 52. S. 1. 1917.

($= 10^5$/ccm), aber sehr kleinem Tropfenradius (0,8 — 1,0 μ).[1] Durch eine solche Entspannung wird eine gewisse Zahl von Kernen gefällt[2]); führt man nun in G durch Wattefilter kernfrei gemachte Luft ein, so erhält man bei der folgenden Entspannung, wenn man dieselbe Entspannungsgröße anwendet, einen weniger dichten Nebel, denn die Kernzahl hat abgenommen, aber der Tropfenradius wird größer, da dieselbe Wassermenge als Nebel niedergeschlagen wird. — Die bei der künstlichen Erhöhung durch Einsaugen von Flammengasen erzeugten Nebel sind so dicht, daß eine direkte Bestimmung der Tropfenzahl nicht in Frage kommt. Dagegen liefern die Kranzerscheinungen ein bequemes Mittel, um den Radius der Tropfen auf 0,1 μ genau festzustellen. R. Mecke[3]) hat die bei homogenem Nebel auftretenden Farbenerscheinungen durch Interferenz des gebeugten und des mit einem Phasenunterschied den Tropfen durchsetzenden Lichtes erklärt, und aus dieser Annahme zu jeder deutlich als verschieden erkennbaren Färbung des zentralen Feldes den Tropfenradius berechnet. Unter Benutzung der in der Arbeit von R. Mecke zusammengestellten Tabelle[4]) ist die Bestimmung des Radius auf 0,1 μ genau möglich, denn eine Änderung des Tropfenradius um wenige Prozent bringt schon eine deutliche Farbenänderung hervor.[5]) — Der durch obige Methode erhaltene

1) Bei den ersten Versuchen wurde die Entspannung nur durch den Hahn h vorgenommen; obgleich dieser eine Bohrung von 5 mm hatte, traten selbst bei kleinen Druckunterschieden heftige Wirbel auf, die eine Beobachtung des direkt hindurchgehenden Lichtes unmöglich machen. Ich brachte daher an den Enden der Röhre je 2 Fahrradventile g an, deren Verschluß durch einen elektromagnetisch gehaltenen Hebel hineingedrückt wurde. Bei Stromöffnung wurde der Konus durch den Überdruck von innen herausgestoßen; die auf diesem Entspannungswege erzeugten Nebel waren selbst bei den größten Druckunterschieden genügend wirbelfrei, da sich die Luft in der Röhrenachse ausdehnte.

2) Diese Zahl wird nur unwesentlich dadurch erhöht, daß sich die Kerne allmählich zu Boden senken, denn bei ihrer Kleinheit (10^{-6}—10^{-8} cm) ist ihre Fallgeschwindigkeit gering.

3) R. Mecke, Über Kranzerscheinungen im homogenen Nebel. Ann. d. Phys. 61. S. 471. 1920.

4) a. a. O. S. 485.

5) Die beiden anderen Meßverfahren, die zur Größenbestimmung des Tropfenradius in Frage kommen, die direkte mikroskopische Ausmessung und ihre Berechnung aus der Fallzeit mit Hilfe des Stokesschen Gesetzes, führen zu ungenaueren Resultaten.

Tropfenradienbereich beschränkt sich auf $1\,\mu$ bis $3\,\mu$; denn bei $r < 1\,\mu$ ist der Nebel meist inhomogen, bei $r > 3\,\mu$ macht die dadurch bedingte große Fallgeschwindigkeit eine Photometrie kaum möglich.

Um nun Nebel von demselben Radius und verschiedener Tropfenzahl zu erhalten, bleibt nur der Weg, die Entspannungsgröße in möglichst weiten Grenzen zu verändern. Doch auch hier sind starke Beschränkungen auferlegt: Steigert man den Druckunterschied über 35 cm Hg, so kommt man schon nach wenigen, etwa 3—4 Entspannungen über den Tropfenbereich ($1-3\,\mu$) hinaus, eine solche Entspannungsreihe[1]) liefert also nur wenige Beobachtungspunkte. Für die untere Grenze erwies es sich als praktisch, 6,5 cm Hg zu nehmen, man könnte bis 3 cm Hg herunter gehen und würde dann selbst auf den größten Kernen noch Kondensation erreichen, doch käme man hier, von hoher Kernzahl ausgehend, erst nach etwa 40 Entspannungen zu einer Tropfengröße von $1{,}5\,\mu$. Zwischen den beiden extremen Werten 6,5 und 35 cm Hg schaltete ich in regelmäßigen Abständen 5 Entspannungsgrößen ein. Die Berechnung der Tropfenzahl N geschieht aus der kondensierten Wassermenge m und dem Tropfenradius nach den Formeln[2]):

$$N = \frac{3}{4}\,\frac{m}{r^3}\,\frac{1}{\pi}; \quad m = m_0\left[1 - \frac{T}{\varrho}\left(\frac{\varrho_0}{T_0} - \ln\frac{T}{T_0}\right)\right];$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p-\pi}{p_0-\pi_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Die durch die angewandten 7 Entspannungsgrößen in dem Tropfenbereich $1-2{,}5\,\mu$ bedingten Tropfenzahlen habe ich berechnet und in Fig. 2 graphisch dargestellt. — Es ist interessant festzustellen, in welcher Weise die Kernzahlen bei den einzelnen Entspannungsreihen abnehmen. Trägt man als Abszissen die Nummern der Entspannungen, als Ordinaten die Tropfenzahlen auf, so muß bei größeren Druckunterschieden

---

1) So nenne ich die Versuchsreihen, bei denen Δp konstant gehalten wird.

2) In den Formeln bedeuten T_0 und T die absoluten Anfangs- und Endtemperaturen, ϱ_0 und ϱ die diesbezüglichen Verdampfungswärmen, p_0 und p sind die Anfangs- und Enddrucke, π_0 und π die Sättigungsdrucke bei Anfangs- bzw. Endtemperatur. Vgl. Winkelmann, Handbuch d. Phys. 3, S. 644 ff.

die Kernabfallkurve steiler verlaufen als bei niedrigen. Fig. 3 veranschaulicht das für einzelne Fälle. Dadurch, daß die Abnahme der Kernzahl diesen übersichtlichen, regelmäßigen Verlauf zeigt, ist es möglich, jeden Nebel von bestimmter Zusammensetzung in dem Tropfenradien- und Tropfenzahlbereich, wie er durch die Kurven der Fig. 2 gegeben ist, beliebig

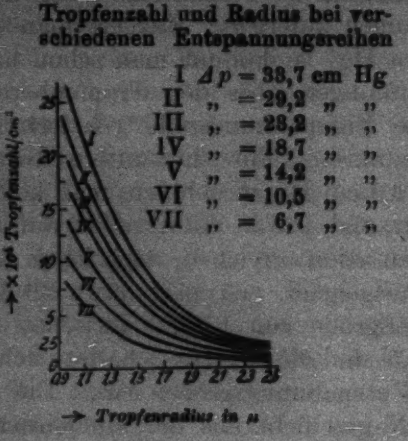


Fig. 2.

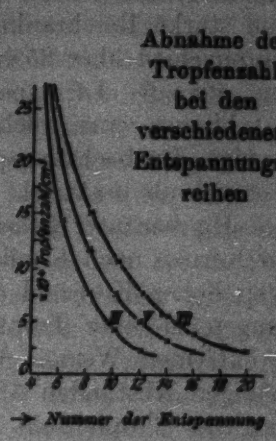


Fig. 3.

oft zu reproduzieren. Weiter ist aus Fig. 2 und 3 leicht zu ersehen, welchen Weg man einzuschlagen hat, um einen bestimmten Nebel herzustellen. — Da neben der Photometrie für jeden Fall die Kranzfarben bestimmt werden müssen, ist bei der Unbeständigkeit des Nebels eine schnelle Arbeitsmethode Haupterfordernis.

Die Messungen wurden im Rot ($\lambda = 650\,\mu\mu$), Gelb ($\lambda = 589\,\mu\mu$) und Blau ($\lambda = 500\,\mu\mu$) ausgeführt; das Ergebnis ist in den Figg. 4, 5 und 6 dargestellt, die Strahlungsenergie, die durch das nebelfreie Gefäß geht, ist in jeder Farbe gleich 100 gesetzt worden. Jede Kurve entspricht einer Entspannungsreihe; die kondensierte Wassermenge ist also konstant, während Tropfenradius und dementsprechend Tropfenzahl von Nebel zu Nebel sich ändern. Aus den Kurven geht hervor, daß im sichtbaren Gebiet die Durchlässigkeit für alle Farben annähernd gleich ist; allen Kurven gemeinsam ist das starke Ansteigen der durchgelassenen Strahlungsenergie bei wachsendem Radius. Auch folgen sie alle keinem einfachen Exponentialgesetze,

sondern weisen eine Abweichung davon auf, die sich nun aber im Rot etwa bei Tropfenradius 1,8 μ, im Gelb und weiterhin im Blau bei kleineren Radien zeigt.[1]) Wäre die Farbe von Lichtquelle und zentralem Felde komplementär, so müßte das

Abhängigkeit der durch Nebel hindurchgelassenen Energie (in Prozenten der ungeschwächten) vom Radius bei konstanter Wassermenge

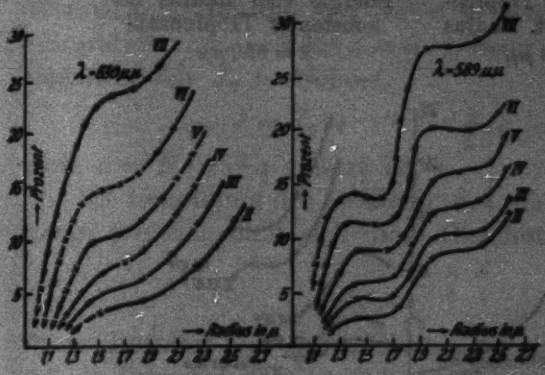


Fig. 4.

Fig. 5.

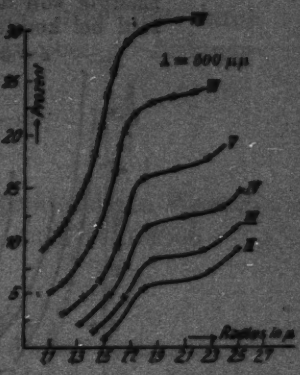


Fig. 6.

zentrale Feld bei $r = 1{,}8\,\mu$ rot gefärbt sein; aus folgender Tabelle läßt sich jedoch deutlich eine Verschiebung von 0,1 bis 0,2 μ erkennen:

Tropfenradius in μ .	1,25	1,4	1,52	1,63	1,87	2,0	2,2
Färbung des zentralen Feldes	blau	grün	gelb	rot	violett	graublau	grün
Stelle der größten Abweichung im . .		blau		gelb	rot		blau

Hält man den Radius konstant und trägt als Abszissen die Tropfenzahlen in ccm auf, so erhält man Fig. 7. Die Kurven

1) Das Auftreten der Abweichungen und ihre Abhängigkeit von Wellenlänge und Tropfenradius läßt vermuten, daß auch der Brechungsexponent eine Rolle spielt. Ich machte daher Versuche mit Nebeln anderer Flüssigkeiten wie Chloroform, Benzol und Anilin, deren Brechungsexponent von dem des Wassers wesentlich verschieden ist. Trotz zahlreicher Versuche gelang es nicht, Resultate in Meßbereichen von der Ausdehnung zu erhalten, daß ein Vergleich mit den bei Wassernebel gefundenen Kurven zulässig wäre. Es lag zum Teil daran, daß bei diesen Flüssigkeiten nur Nebel mit größeren Tropfen zu erhalten sind.

in dieser Figur haben in allen Fällen eine einheitliche Form, sie fallen bei großen Radien steil ab; so muß man die Tropfenzahl ungefähr verdreifachen, um bei dem Radius 1,0 μ dieselbe Schwächung zu erzielen, wie bei 2,0 μ. Fig. 8 zeigt den Verlauf

Abhängigkeit der durch Nebel hindurchgelassenen Energie von der Tropfenzahl bei konstant. Radius $\lambda = 500\ \mu\mu$

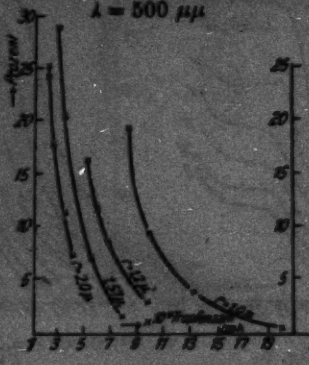


Fig. 7.

Abhängigkeit der durch Nebel hindurchgelassenen Energie vom Radius bei konstanter Tropfenzahl $\lambda = 650\ \mu\mu$

Fig. 8.

der durchgelassenen Energie bei konstanter Tropfenzahl und veränderlichem Radius; aus ihr geht die Lage der Abweichungen bei den einzelnen Farben noch deutlicher hervor.

Die Genauigkeit ist für die einzelnen Kurven der Figg. 4 bis 6 verschieden, sie beträgt bei den Reihen mit niederen Druckunterschieden etwa 1 Proz. Bei größeren Δp können die Fehler bis zu 4 Proz. ansteigen, denn hier ändert sich die Beschaffenheit der Nebel von Entspannung zu Entspannung rascher und die Einstellung des Nernstfadens N_2 wird unsicherer.

Um die experimentellen Ergebnisse (Figg. 4—6) in einer Formel darzustellen, würde man am besten von der einfachsten Annahme ausgehen, daß die Nebelteilchen vollkommen undurchsichtige Scheibchen sind von der Form eines Kreises mit dem Radius der Nebeltröpfchen; von allen anderen Einflüssen wollen wir absehen. Im übrigen seien die Voraussetzungen der Versuchsanordnung angepaßt: Es falle weißes Licht von der Intensität I_0 parallel auf eine Nebelschicht auf. Sind nun $N = n^3$ Teilchen pro ccm, also n-Teilchen in der

Längeneinheit und fällt auf den Querschnitt q der den Nebel durchsetzenden Lichtsäule die Intensität J auf, so können wir uns den Weg durch das l cm lange Nebelgefäß als durch $n \cdot l$-Schichten vorstellen, deren jede $n^2 q$-Scheibchen enthält. Es ist also die Abnahme der Intensität bei einer Schicht ds:

$$dJ = -J \cdot q \cdot n^2 \cdot \pi r^2 ds .$$

Hieraus folgt für die den Nebel verlassende Intensität durch Integration von $s = 0$ bis $s = n \cdot l$, wenn man noch die Anfangsintensität mit J_0 bezeichnet:

$$J = J_0 \cdot e^{-n^2 l \cdot q \pi r^2} = J_0 \cdot e^{-al},$$

wenn $a = N \cdot \pi r^2 q$ gesetzt ist.[1])

Mit Benutzung der Größe m, d. i. die kondensierte Wassermenge pro ccm, läßt sich diese Gleichung auch schreiben

$$J = J_0 \cdot e^{-\frac{3}{4} \frac{m}{r} l \cdot q}.$$

Dieses Resultat der geometrischen Optik erklärt schon recht gut die Tatsache, daß die Intensität des durchgehenden Lichtes bei Nebeln mit konstanter Wassermenge bei wachsendem Radius so stark zunimmt.

In Wirklichkeit ist die Erscheinung weitaus komplizierter, darauf weist schon der nicht einheitliche Verlauf in den einzelnen Kurven hin. Denn einmal wirken die Nebeltröpfchen als unregelmäßig im Raum verteilte Beugungsschirmchen, ferner wird das axial durch den Tropfen hindurchgegangene Licht nicht zu vernachlässigen sein. Weiterhin ist es möglich, daß das durch einen Tropfen gegangene Licht durch einen zweiten wieder so gebrochen wird, daß es in die ursprüngliche Richtung kommt; die Absorption durch die Flüssigkeit dagegen dürfte

1) W. Trabert, „Über d. Extinktion d. Lichtes in trüben Medien", Meteorolog. Zeitschr. 18. 1901 und H. Happel, Zeitschr. für Mathem. u. Phys. 61. S. 43 kommen durch umständlichere wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen zu demselben Resultat. Denn offenbar ist obige Aufgabe identisch mit folgendem Wahrscheinlichkeitsproblem: welcher Teil von qcm bleibt wahrscheinlich frei, wenn ich ihn willkürlich mit q-Scheibchen vom Radius r belege. Beide Autoren kommen auf verschiedenen Wegen zu dem Ergebnis $W = (1 - \pi r^2)^{n^2 l \cdot h}$, diese genaue Formel läßt sich schreiben, da $\pi r^2 \ll 1$ qcm, $W = e^{-al}$ wie oben. Die Formel ist meines Wissens experimentell noch nicht geprüft worden.

bei der geringen Menge keine Bedeutung haben. Da alle diese Strahlen kohärent sind, können sie interferieren; hierdurch ließe sich dann die Abhängigkeit von der Farbe erklären. Bei diesen Überlegungen zu quantitativen Ergebnissen zu kommen, dürfte jedoch recht schwierig sein, von einem Verfolg dieser Gedankengänge soll hier abgesehen werden.

Vorstehende Arbeit ist im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Berlin ausgeführt. Hrn. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Kurlbaum sei auch an dieser Stelle für die freundliche Anregung und das Entgegenkommen bestens gedankt.

Anmerkung: Ältere Literatur über diesen Gegenstand:

1. J. Kiessling, Dämmerungserscheinungen. Hamburg 1888. Dort finden sich auch die hier verwendeten Bezeichnungen der optischen Erscheinungen.

2. C. Barus, Smithonian Contributions. Nr. 1300. 1901.
„ „ „ Nr. 1373. 1903.
„ American Journal of Science XXV. S. 224. 1908; S. 564. 1910.

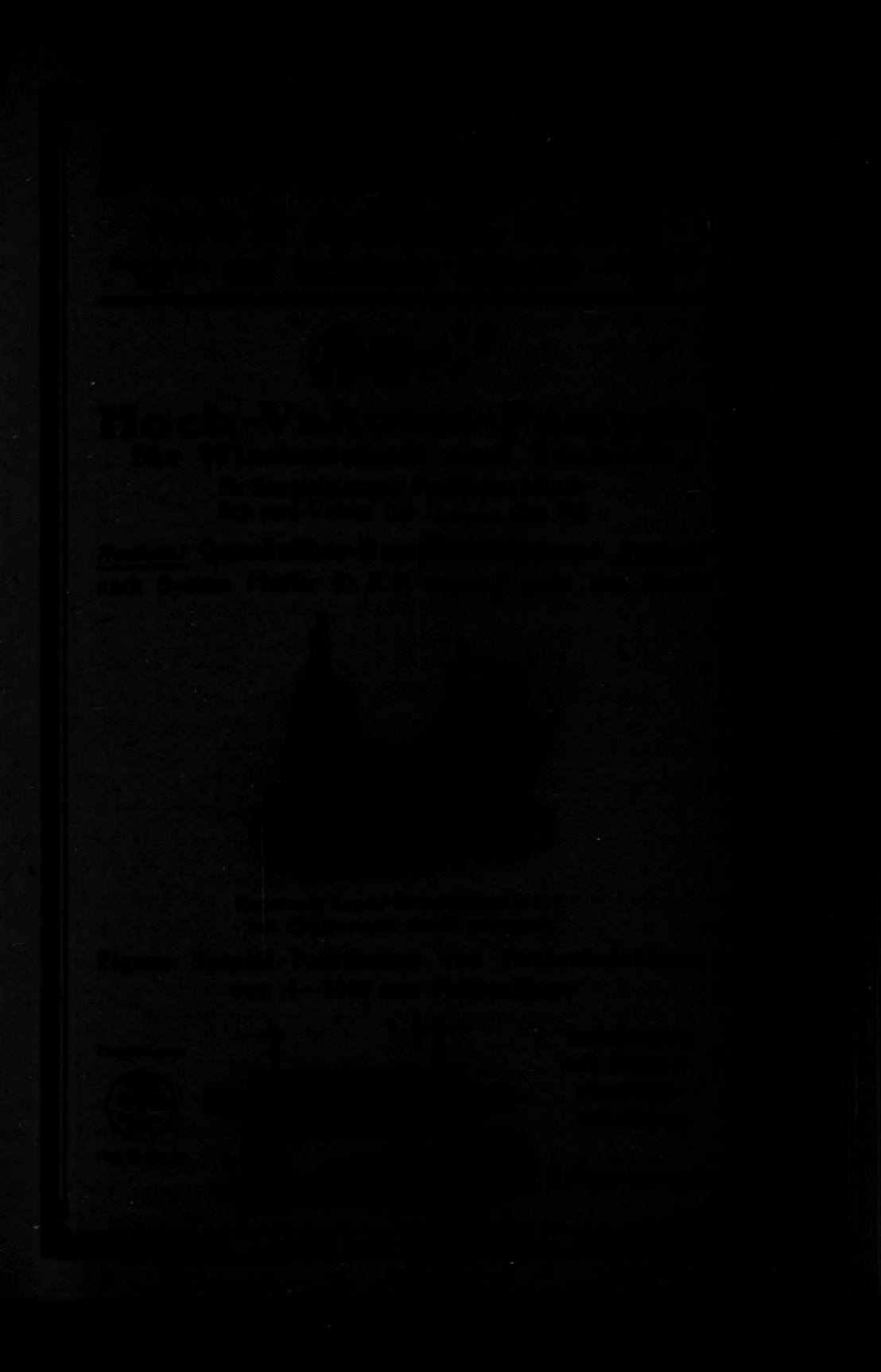
3. G. Haecker, Bestimmung des Transparenzkoeffizienten des Nebels. Diss. Kiel 1905.

4. E. Barkow, Versuche über Entstehung von Nebel. Diss. Marburg 1906.

In theoretischer Hinsicht wäre noch eine Arbeit von A. Mallock zu nennen, Proc. Roy. Soc. London A. 96. S. 262. 1919. — Er stellt dieselbe Wahrscheinlichkeitsaufgabe, sein Resultat ist aber durch nichts begründet und stellt nur eine Vermutung dar.

(Eingegangen 18. November 1922.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



1923. № 7.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 70.

1. *Das elektrische Feld eines schweren, elektrisch geladenen Kügelchens, das um ein Gravitationszentrum kreist*[1]; *von Gustav Mie.*

Das Prinzip von der Relativität der Gravitationswirkungen.

1. Man kann die Idee, welche der Einsteinschen Gravitationstheorie zugrunde liegt, ungefähr durch folgenden Satz wiedergeben: „Wenn sich in einem Gravitationsfeld ein im Vergleich zu der felderregenden schweren Masse unendlich kleiner Körper bewegt, so kann man die gesamte innere Struktur dieses Körpers und natürlich auch die Felder, die ihn umgeben, die ja sozusagen nur die Fortsetzung seiner inneren Struktur nach außen sind, so berechnen, als ob der Körper in einem gravitationsfreien Weltgebiet ruhte, in welchem eine eigentümliche nicht-minkowskische Geometrie herrscht." Dies ist der Satz von der Relativität der Gravitationswirkungen in seiner allgemeinsten Formulierung. Die besondere Eigentümlichkeit der Geometrie, durch welche nach diesem Satz die physikalischen Wirkungen des Gravitationsfeldes ersetzt werden können, besteht darin, daß in ihr keine geradlinigen Koordinatennetze möglich sind, man muß sich deswegen, um die Welt quantitativ beschreiben zu können, an einem Koordinatennetz orientieren, das in dem nicht-minkowskischen Raum-Zeit-Kontin um krummlinig erscheint. Das Prinzip, nach welchem dieses Koordinatennetz zu konstruieren ist, habe ich in einer früheren Abhandlung[2]) beschrieben, seine

1) Einen vorläufigen Bericht über die folgende Untersuchung habe ich schon auf der Naturforscherversammlung in Nauheim 1920 erstattet, Phys. Ztschr. 21. S. 651. 1920.

2) Ann. d. Phys. 62. S. 46. 1920. Die Einführung der „vernunftgemäßen" Koordinaten in die Einsteinschen Gravitationsgleichungen möchte ich lieber einem Fachmathematiker überlassen, dem die Methoden der mehrdimensionalen Geometrien geläufiger sind als mir. Soviel ich sehen kann, werden die Gravitationsgleichungen dadurch ziemlich vereinfacht werden. Jedenfalls gewinnt man Vorteile für die Lösung be-

Koordinatenlinien nenne ich „die vernunftgemäßen geraden Linien" im Gegensatz zu den Geraden der nicht-minkowskischen Geometrie, welche „die natürlichen geraden Linien" heißen. Die Geometrie, in der man die vernunftgemäßen Geraden als *die* Geraden anerkennt, ist die gewöhnliche euklidische bzw. minkowskische Geometrie, in ihr erscheinen die „natürlichen Geraden" als krumme Linien. Umgekehrt ist in der nicht-minkowskischen „natürlichen" Geometrie das vernunftgemäße Koordinatensystem, wie schon erwähnt, krummlinig, und der Tensor, der die Maßverhältnisse dieses krummlinigen Koordinatensystems wiedergibt, ist nach Einstein leicht aus dem Tensor-Potential des Gravitationsfeldes zu gewinnen. Die physikalischen Grundgleichungen, durch welche die Ereignisse in einem Gravitationsfeld beherrscht sind, sind nach Einstein dieselben, wie in einem gravitationsfreien Gebiet, abgesehen davon, daß sie das eine Mal in einem Gebiet nicht-minkowskischer Geometrie gelten, das andere Mal in einem Gebiet minkowskischer Geometrie. Schreibt man sie in krummlinigen Koordinaten (wozu auch das Koordinatensystem der „vernunftgemäßen geraden Linien" gehört), so treten in die Gleichungen die Maßverhältnisse der krummlinigen Koordinaten in bekannter Weise ein, und sie sind dann,

---

stimmter Probleme schon allein deswegen, weil in den vernunftgemäßen Koordinaten von vorne herein alle die physikalisch unsinnigen Lösungen, welche die Einsteinschen Gleichungen sonst liefern können (vgl. A. Einstein, Sitzgsber. der Preuß. Akad. d. Wiss. Berlin. S. 696. 1916), ausgeschlossen sind. Der Einwand von H. Weyl (Jahresber. d. Dtschen. Mathematiker-Vereinigung. 31. S. 58. 1922), daß die von mir angegebene Konstruktion vieldeutig sei, scheint mir nicht berechtigt zu sein, wenn man beachtet, daß in dem sehr weit entfernten gravitationsfreien Gebiet, welches das betrachtete Weltsystem, beispielsweise das Planetensystem unserer Sonne, umgibt, das Gravitationspotential praktisch gleich dem skalaren Wert 1 zu setzen ist. Die Ansicht von Weyl aber, daß das „vernunftgemäße" Koordinatensystem keine Erleichterung für die Beschreibung der physikalischen Vorgänge verschaffe, scheint mir ohne weiteres durch die bloße Existenz des Kopernikanischen Koordinatensystems widerlegt zu werden. Das Kopernikanische Koordinatensystem ist nichts anderes als das von mir definierte vernunftgemäße Koordinatensystem in der heutzutage erreichten Genauigkeit der astronomischen Messungen. Ich kann mir nicht denken, daß die Astronomie bei der Beschreibung der Bewegungen der Sterne jemals auf dieses Koordinatensystem wird verzichten können.

rein formal angesehen, im gravitationsfreien Raum und im Gravitationsfeld identisch. Trotzdem sind, wie das folgende zeigen wird, die Probleme, die die Lösung der Gleichungen mit sich bringt, in den nicht-minkowskischen Gebieten im allgemeinen ganz unvergleichlich viel schwieriger als in den minkowskischen Gebieten.

Das Kugelzylinderkoordinatensystem.

2. Das Feld eines geladenen Kügelchens, das ich der Kürze halber im folgenden oft einfach als „Elektron" bezeichnen werde, kann bekanntlich im idealen Vakuum sehr einfach durch ein Viererpotential beschrieben werden, welches nur eine zeitliche Komponente hat. Diese Komponente nennt man in der Elektrizitätslehre: das skalare Potential. Man denke sich nun in einer minkowskischen Welt als Zeit-Koordinatenachse A die Weltlinie, die der Mittelpunkt des Elektrons beschreibt, lege durch irgendeinen Punkt O der Achse A den zu ihr senkrechten ebenen dreidimensionalen Raum R und ziehe um O in diesem Raum eine Kugelfläche vom Radius ϱ. Läßt man O auf der Achse A entlang laufen, so schließen sich alle zugehörigen Kugelflächen zu einem dreidimensionalen Kugelzylinder Z vom Radius ϱ zusammen. Wir denken uns nun alle möglichen Kugelzylinder Z um die Achse A mit beliebigen Radien ϱ konstruiert. Die erzeugenden Trajektorien auf diesen Zylindern durchsetzen alle Räume R senkrecht und geben daher überall die Richtung des Vierervotentials an. Außerdem hat das Potential auf jedem Zylinder Z einen von der Größe ϱ abhängenden konstanten Wert, und die Kugelflächen, welche die Zylinder Z aus den Räumen R ausschneiden, sind die sog. Äquipotentialflächen. Zieht man zwischen zwei unendlich benachbarten Räumen R_1 und R_2 zwei senkrechte Trajektorien $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$, die einander unendlich nahe sind, und bildet das Linienintegral des Vierervotentials auf dem Umfang des Vierecks $P_1 P_2 Q_2 Q_1$, so ergibt dies die Komponente des elektrischen Feldes in der Richtung der Strecke $P_1 Q_1$ (oder, was dasselbe ist, $P_2 Q_2$), multipliziert mit dem Flächeninhalt des Vierecks $P_1 P_2 Q_2 Q_1$. Liegen die beiden Punkte P_1 und Q_1 auf einer Äquipotentialfläche, so ist das Linienintegral Null, weil auf dem Zylinder Z, auf welchem alsdann P_1, Q_1 und P_2, Q_2 liegen, das Potential einen konstanten Wert hat und

außerdem die Strecken $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ natürlich einander gleich sind.

Diese Konstruktion ist auch dann richtig, wenn die eigentliche Maxwellsche Theorie nicht mehr gilt, das heißt, wenn das Superpositionsprinzip ungültig ist, etwa in der unmittelbaren Nachbarschaft der Zentralachse des Elektrons, wo sehr hohe Feldstärken und sehr große Potentiale herrschen.

3. Ich will dieselbe Konstruktion auch in einem nichtminkowskischen Raum-Zeit-Gebiet durchführen, dessen Geometrie die physikalischen Wirkungen des von einer schweren Kugel ausgehenden Gravitationsfeldes ersetzt. Die geradlinige Achse A der Figur wird in diesem Falle durch eine zeitartige geodätische Weltlinie ersetzt, welche der Elektronenmittelpunkt durchläuft; diese geodätische Weltachse werde im folgenden wieder A genannt. Ich nehme damit an, daß der Satz von der Relativität der Gravitationswirkungen gilt, und zwar so, daß das im Gravitationsfeld bewegte Elektron sich völlig so verhält, als ob es in dem entsprechenden nichtminkowskischen Gebiet ruhte. Ich denke mir von einem beliebigen Punkt O der Achse A alle geodätischen Linien gezogen, welche zu der Richtung A senkrecht stehen. Die Gesamtheit dieser geodätischen Radienvektoren bildet ein dreidimensionales Kontinuum, welches ich den zur Achse A im Punkte O senkrechten Raum R nennen will. Der Raum R ist, wenn man ganz genau rechnet, kein „ebener" Raum, denn in der nichtminkowskischen Welt gibt es im allgemeinen keine ebenen Räume, man kann zwei in R auf zwei verschiedenen Radienvektoren liegende Punkte P und Q im allgemeinen nicht durch eine ganz in R verlaufende natürliche Gerade verbinden. Im allgemeinen schneidet also, wenigstens wenn man ganz genau rechnet, eine durch P und Q gelegte geodätische Linie den Raum R nur in diesen beiden Punkten. In dem im folgenden allein behandelten Fall des auf einem Kreise um das Gravitationszentrum umlaufenden Elektrons haben die sämtlichen Räume R dieselbe Geometrie, dadurch werden die Rechnungen sehr vereinfacht. Im übrigen werden aber die Resultate, zu denen wir in diesem Spezialfall gelangen, sich in ihren wesentlichen Zügen auch auf den allgemeineren Fall elliptischer Bahnen übertragen lassen.

Schneiden wir von den sämtlichen Radienvektoren, die

von einem Punkte O der Achse A in den zugehörigen Raum R ausstrahlen, gleiche Längen ϱ ab, so bilden ihre Endpunkte eine Fläche, welche, wie man leicht einsehen wird, überall auf dem Radiusvektor genau senkrecht steht, wir werden diese Fläche die im Raume R um den Punkt O beschriebene Kugelfläche vom Radius ϱ nennen.

Lassen wir O auf der Achse A entlang laufen, so bildet die Gesamtheit der um die Punkte O mit dem konstanten Radius ϱ beschriebenen Kugelflächen einen dreidimensionalen Kugelzylinder um die Achse A vom Radius ϱ. Alle Kurven auf diesem Zylinder, die zeitartigen ebensogut wie die raumartigen, stehen auf dem Zylinderradius senkrecht, der Radius ist die Normale des dreidimensionalen Zylindermantels. Linien, die auf dem Zylindermantel verlaufen und zugleich auf den Normalschnitten des Zylinders, d. h. auf den durch die Räume R ausgeschnittenen Kugelflächen, senkrecht stehen, will ich die Leitlinien des Zylinders nennen. Da diese Leitlinien sowohl auf der Kugelfläche als auf dem Radiusvektor senkrecht stehen, so stehen sie auch auf den Räumen R senkrecht, sie sind die senkrechten Trajektorien der Schar der Räume R. Wir haben somit ein System von Kurven und Flächen gewonnen, welches ganz ähnlich demjenigen ist, das im einfachsten Fall, nämlich dem Fall der minkowskischen Geometrie, zur Beschreibung des elektrischen Feldes eines ruhenden Elektrons diente. Es ist aber ein großer Unterschied hervorzuheben: Die senkrechten Trajektorien durch die Räume R sind im nichtminkowskischen Fall mit alleiniger Ausnahme der Achse A keine geraden (geodätischen) Linien, wie im minkowskischen Fall. Ferner sind die Abschnitte verschiedener Trajektorien $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ zwischen zwei Räumen R_1 und R_2 im allgemeinen verschieden lang. Also selbst dann, wenn P_1 und Q_1 sowie P_2 und Q_2 auf Äquipotentialflächen liegen, hat das elektrische Feld in dieser Geometrie im allgemeinen noch eine Komponente in der Richtung $P_1 Q_1$, d. h.: in dem nichtminkowskischen Gebiet steht das Feld im allgemeinen nicht senkrecht auf den Äquipotentialflächen. Die im folgenden durchgeführte genauere Analyse wird ergeben, daß weder die Kugelflächen, welche die Räume R aus den Zylindern Z ausschneiden, die Äquipotentialflächen sind, noch die Linien des elektrischen Feldes rein radial verlaufen. Dagegen wird

sich in einer Beziehung, wenigstens in einem sehr weiten Umkreis, um das Elektron Übereinstimmung mit dem minkowskischen Fall ergeben: Die Richtung des Vierervektorpotentials ist in diesem Gebiet in guter Näherung identisch mit der Richtung der senkrechten Trajektorien durch die Räume R. Erst in sehr großen Entfernungen vom Elektron verliert dieser Satz seine Gültigkeit. Fassen wir alle in R enthaltenen Richtungen als rein raumartig auf, so ist die Richtung der senkrechten Trajektorien rein zeitartig, das Potential des elektrischen Feldes ist ein rein „skalares Potential", und das Problem ist auch im nicht-minkowskischen Fall sozusagen rein „elektrostatisch".

Zerlegung des Problems in drei Teilprobleme.

4. Wir werden das vorgelegte Problem selbstverständlich nur näherungsweise lösen.

Erstlich wird uns schon dadurch, daß es bisher nur gelungen ist, die Einsteinschen Differentialgleichungen für das Einkörperproblem zu lösen, aber noch nicht für das Zweikörperproblem, eine Beschränkung in der Genauigkeit der Rechnung auferlegt. Wir müssen annehmen, daß die Masse des geladenen Kügelchens gegenüber der Masse des Zentralkörpers, um welchen es kreist, unendlich klein ist. Wir vernachlässigen also die Einwirkung des von dem Kügelchen ausgehenden Gravitationsfeldes auf den Zentralkörper und auf das Feld des Zentralkörpers und nehmen an, daß die nichtminkowskische Geometrie des Gebietes, in welchem wir das elektrische Feld des Kügelchens berechnen, durch die bekannte Schwarzschildsche Lösung der Einsteinschen Gleichungen für das Gravitationsfeld einer einzigen Kugel mit ausreichender Genauigkeit wiedergegeben wird.

Wir teilen nun das gesamte unendliche Raum-Zeit-Kontinuum in drei Teilgebiete.

Das erste Gebiet ist „die nächste Umgebung" des Elektrons. Sie ist umschlossen von einem dreidimensionalen Kugelzylinder nach der im vorigen Abschnitt gegebenen Definition, dessen Achse die Weltlinie A des Elektrons ist, und dessen geodätischer Radius ϱ_1 im Vergleich zum Radius a der Kreisbahn des Elektrons unendlich klein ist, $\varrho_1/a =$ unendl. klein. Die Abweichungen der Geometrie in diesem Zylinder von der gewöhn-

lichen minkowskischen Geometrie sind unendlich klein von zweiter Ordnung, also wie ϱ_1^2/a^2, sie können, wenn man ϱ_1 genügend klein wählt, vernachlässigt werden. In dem Gebiet der „nächsten Umgebung" ist also das Problem, das elektrische Feld des Elektrons zu berechnen, zurückgeführt auf das Problem im minkowskischen Raum-Zeit-Kontinuum. Alles, was wir noch zu tun haben, ist nur: von dem von uns gewählten Koordinatensystem der natürlichen Geraden umzutransformieren auf das vernünftige Koordinatensystem, in welchem das Elektron eine Kreisbahn zurücklegt. Dabei kommt es gar nicht darauf an, ob in dem elektrischen Feld des Kügelchens überall die gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen gelten, oder ob nicht wenigstens in der Nähe der Atomkerne, wo sehr große Feldstärken und sehr hohe Potentiale herrschen, ganz andere Gesetzmäßigkeiten eintreten. Wir werden nur, um den Anschluß an das zweite Gebiet, die „fernere Umgebung", zu bekommen, annehmen müssen, daß in den größeren Entfernungen vom Kugelzentrum, die von ϱ_1 nicht mehr sehr verschieden sind, die Maxwellschen Gleichungen gelten, daß hier also die Lösung des minkowskischen Problems einfach durch das Coulombsche Gesetz gegeben ist.

Das zweite Gebiet ist „die fernere Umgebung" des Elektrons. Sie reicht von dem Kugelzylinder vom Radius ϱ_1 bis zu einem zweiten koachsialen Kugelzylinder, dessen geodätischer Radius ϱ_2 sehr groß ist. ϱ_2/a = unendl. groß. Andererseits soll der Wert von ϱ_2 nach oben durch die folgende Bedingung begrenzt sein: Es sei die Geschwindigkeit, mit welcher das Elektron auf seiner Bahn umläuft, bezogen auf die Lichtgeschwindigkeit als Einheit, mit q bezeichnet. Wir nehmen an, daß q eine sehr kleine Größe ist. Für ϱ_2 wird nun gefordert, daß $q \cdot \varrho_2/a$ = unendl. klein. Damit diese zweite Bedingung sich überhaupt erfüllen läßt, müssen wir uns auf die Fälle beschränken, in denen die Umlaufsgeschwindigkeit q so außerordentlich klein ist, daß man immer einen unendlich kleinen Wert für das Verhältnis a/ϱ_2 angeben kann, der doch im Vergleich mit q noch unendlich groß ist. Wegen der Kleinheit der Gravitationswirkungen ist die Umlaufsgeschwindigkeit eines Körpers, der ein Gravitationszentrum in einem physikalisch möglichen Abstand umkreist, immer so klein, daß diese Bedingung selbst bei großer Genauigkeit der Rechnung erfüllt ist. Also ist nur der von uns betrachtete Fall praktisch von Interesse.

Um das Problem in dem so festgelegten zweiten Gebiet zu lösen, müssen wir die Abweichungen der hier herrschenden nicht-minkowskischen Geometrie von der minkowskischen berechnen, d. h. die Abweichungen der Maßzahlen $\gamma_{\mu\nu}$ des Kugelzylinder-Koordinatensystems in ihr von den Maßzahlen eines gewöhnlichen Kugelzylinder-Koordinatensystems.

Ordnet man die Ausdrücke für die $\gamma_{\mu\nu}$ nach steigenden Potenzen von q, so zeigt sich, daß nur geradzahlige Potenzen von q auftreten. Ich werde die Rechnungen nur bis zu den Gliedern von der Ordnung q^2 durchführen. Es zeigt sich ferner, daß in den Entwicklungen der $\gamma_{\mu\nu}$ keine Glieder vorkommen, welche den geodätischen Radius ϱ in einer höheren Potenz enthalten als die Geschwindigkeit q. Ich rechne also bis zu Gliedern von der Ordnung $q^2 \cdot \varrho^2/a^2$ und diese sind nach unserer Annahme bis zur äußersten Grenze $\varrho = \varrho_2$ des zweiten Gebietes noch unendlich klein.

Nach dem Prinzip der Relativität der Gravitationswirkungen gelten in dem zweiten Gebiet die gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen, nur übertragen auf die nicht-minkowskische Geometrie, die hier herrscht.

Nachdem die Lösung der Maxwellschen Gleichungen in unserem Kugelzylinder-Koordinatensystem gefunden worden ist, werden wir auf das vernunftgemäße Koordinatensystem transformieren, in welchem das Elektron eine Kreisbahn um das Gravitationszentrum beschreibt. In den entfernteren Gebieten, wo ϱ/a sehr groß ist, geht die nicht-minkowskische Geometrie allmählich in die gewöhnliche minkowskische Geometrie über, und dem entsprechend wird die gefundene Lösung für große Werte ϱ/a schließlich identisch mit einer Lösung der Maxwellschen Gleichungen für die gewöhnliche minkowskische Geometrie.

Das dritte Gebiet ist der vom Elektron „unendlich ferne Raum". Es ist das Gebiet außerhalb des Kugelzylinders vom Radius ϱ_2. In diesem Gebiet gilt die minkowskische Geometrie, und wir haben eine Lösung für die gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen zu suchen, welche für $q \cdot \varrho_2/a =$ unendl. klein in die für das zweite Gebiet gefundene Lösung übergeht.

Damit ist das gestellte Problem für das ganze Raum-Zeit-Kontinuum gelöst.

Eine merkwürdige Eigenschaft der Lösung.

5. Die auf diese Weise gefundene Lösung des Problems muß die merkwürdige Eigenschaft haben, daß das um das Gravitationszentrum rotierende Elektron keine Energie ausstrahlt. Denn in der nächsten Umgebung des Elektrons ist die Lösung in dem der Berechnung zugrunde gelegten Kugelzylinder-Koordinatensystem identisch mit der Lösung der gewöhnlichen Elektrostatik. Es geht also von dem Elektron keine Energie weg und das Elektron bleibt fortwährend auf derselben Kreisbahn, seine Weltlinie ist eine geodätische Linie des nicht-minkowskischen Kontinuums. Trotzdem aber wird sich zeigen, daß in der Entwicklung der Ausdrücke für die elektromagnetischen Feldgrößen in dem unendlich fernen Raum Glieder vorkommen, welche nicht, wie im elektrostatischen Fall, von der Ordnung $1/\varrho^2$, sondern von der Ordnung $1/\varrho$ gegen Null konvergieren. Diese Glieder sind, wie sich zeigen wird, periodische Funktionen der Zeit von derselben Periode, wie der Kreislauf des Elektrons. Sie können aber nach dem oben gesagten keine Welle darstellen, die in den Raum hinausstrahlt. In der Tat wird die genauere Untersuchung zeigen, daß der periodische Energiestrom, welcher durch die Existenz dieses Gliedes angezeigt wird, nicht dauernd nach außen geht, sondern hin- und herpendelt. Das periodische Glied von der Ordnung $1/\varrho$ stellt eine stehende Schwingung dar, welche das Elektron im unendlich fernen Raum umgibt.

Man kann die gefundene Lösung im unendlich fernen Gebiet berechnen durch Addition zweier Lösungen der Maxwellschen Gleichungen, von denen die erste eine Kugelwellenstrahlung darstellt, welche von dem rotierenden Elektron emittiert wird, die zweite dagegen eine aus dem Unendlichen kommende Kugelwellenstrahlung, welche zentripetal auf das Elektron zueilt und von ihm absorbiert wird. Haben beide Kugelwellen gleiche Intensität, so bilden sie zusammen eine stehende Schwingung, und das Elektron absorbiert von dem zweiten Wellenzug genau dieselbe Energie, die es mit dem ersten aussendet, es behält also im ganzen seine Energie unverändert.

Man wird die gefundene Lösung nicht gut als diejenige Lösung bezeichnen können, welche den Fall eines in einem ungeheuren leeren Raum frei um das Gravitationszentrum

umlaufenden Elektron darstellt. Diese Lösung dürfte im unendlich fernen Gebiet nur eine von dem Elektron wegstrahlende Kugelwelle ergeben, die zentripetal auf das Elektron zueilende Kugelwelle müßte fehlen.

Daraus geht hervor, daß man bei der Anwendung des Prinzips von der Relativität der Gravitationswirkungen vorsichtig sein muß. Das in einem minkowskischen Kontinuum ruhende Elektron entspricht nicht einfach unter allen Umständen dem um das Gravitationszentrum umlaufenden Elektron. Läuft das Elektron in einem ungeheuren leeren Raum, so müssen wir im nicht-minkowskischen Kontinuum von einem Elektron ausgehen, das einem konstanten elektrischen Drehfeld ausgesetzt ist. Dieses Drehfeld muß so gerichtet sein, daß es die Bewegung des Elektrons auf seiner Bahn um das Gravitationszentrum herum immer gerade aufzuhalten sucht, und seine Stärke muß so bemessen sein, daß das Elektron, indem es sich ihm entgegen bewegt, fortwährend gerade soviel von seiner Energie verliert, als im unendlich fernen Gebiet als Strahlung weggeht. Das Elektron läuft dann nicht mehr genau auf einem Kreise, sondern vielmehr auf einer Spirale, und seine Weltlinie ist nicht mehr genau eine geodätische Linie. Alles läßt sich schließlich in der Näherung, auf die ich mich überhaupt beschränke, ausrechnen. Die Strahlung des im Gravitationsfeld umlaufenden Elektrons ergibt sich als genau ebenso groß wie die Strahlung, die sich nach der Maxwellschen Theorie mit Hilfe des Wiechert-Liénardschen retardierten Potentials berechnet, wenn das Elektron durch irgendwelche Zwangskräfte auf demselben Kreise mit derselben Geschwindigkeit umzulaufen genötigt wird.

Das nichtminkowskische Kugelzylinder-Koordinatensystem.

6. Wir gehen aus von einem Kugelzylinder-Koordinatensystem mit vernunftgemäßen Geraden, in welchem also die minkowskische Geometrie gilt. Die Zeitachse dieses Koordinatensystems sei die Weltlinie des Gravitationszentrums. Ein Punkt dieser Achse, der das Zentrum zur Zeit t repräsentiert, heiße C. Von C aus denke ich mir die sämtlichen raumartigen Radienvektoren, die auf der Zeitachse senkrecht stehen, gezogen, sie erfüllen den zur Achse in C senkrecht stehenden dreidimensionalen ebenen Raum $t = \text{const}$. Irgendeine durch

C hindurchgehende Ebene in diesem Raum wähle ich als Äquatorialebene, die Senkrechte auf dieser Ebene im Raume $t = \text{const}$ im Punkte C ist die Polarachse. Durch die Polarachse lege ich irgendeinen Anfangsmeridian.

Der Radiusvektor irgendeines Punktes P im Raume $t = \text{const}$ werde mit r bezeichnet, der Winkel zwischen r und der Polarachse mit ϑ, der Winkel zwischen der durch r gehenden Meridianebene und dem Anfangsmeridian mit φ. Dann sind r, ϑ, φ, t die Koordinaten von P, die seine Lage nach Ort und Zeit eindeutig bestimmen. Die raumartigen Koordinaten r, ϑ, φ wollen wir in dieser Reihenfolge mit 1, 2, 3 numerieren, die Zeitkoordinate t mit 4. Die raumartigen Richtungen sollen so festgelegt sein, daß 1, 2, 3 ein rechtsdrehendes System von Richtungen ist.

Der Deformationstensor des Gravitationsfeldes im Punkte P ist:

$$g_{11} = \frac{r}{r-\alpha}, \quad g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{44} = \frac{r-\alpha}{r}, \quad g_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu.$$

Hier bedeutet α eine sehr kleine Größe, welche durch die schwere Masse des Gravitationszentrums bestimmt ist. Die „natürliche Länge" ds des Streckenelements zwischen den zwei unendlich benachbarten Punkten $(r, \vartheta, \varphi, t)$ und $(r + dr, \vartheta + d\vartheta, \varrho + d\varphi, t + dt)$ beträgt also:

$$(1) \quad ds^2 = \frac{r}{r-\alpha} \cdot dr^2 + r^2 \cdot d\vartheta^2 + r^2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r} \cdot dt^2.$$

In dem durch die Formel (1) definierten nicht-minkowskischen Kontinuum sind die Differentialgleichungen der geodätischen Linien[1]):

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds}\left(r^2 \cdot \frac{d\vartheta}{ds}\right) - r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0, \\ r^2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot \frac{d\varphi}{ds} = B, \\ \frac{r-\alpha}{r} \cdot \frac{dt}{ds} = C, \end{cases}$$

wo B und C zwei willkürliche Konstanten bedeuten.

1) D. Hilbert, Die Grundlagen der Physik. Zweite Mitteilung. Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-naturw. Kl. 23. S. 19 Gl. (46). Dez. 1916. Ich setze hier die Integrationskonstante A gleich 1, dann ist der Hilbertsche Parameter p identisch mit der natürlichen Länge s der geodätischen Linie, von einem willkürlichen Anfangspunkt an gerechnet, und $dp = ds$.

Die vom Gravitationszentrum ausgehenden Radienvektoren $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $t = \text{const}$ sind geodätische Linien, denn ihre Gleichungen erfüllen die Bedingungen (2). Aber ihre Längenteilung ist in der nicht-minkowskischen Geometrie eine andere als im „vernunftgemäßen" System. Die vernunftgemäße Länge eines Radiusvektors CP ist gleich r, und die eines kleinen auf ihm abgetragenen Stückes ist dr. Dagegen ist die natürliche Länge ds desselben kleinen Stückes:

$$ds = \sqrt{\frac{r}{r-a}} \cdot dr.$$

Die natürliche Länge s eines Stückes $P_1 P_2$ auf einem Radiusvektor ergibt sich durch Integration zu:

$$s = \sqrt{r_2 \cdot (r_2 - a)} - \sqrt{r_1 (r_1 - a)} + a \cdot \ln \frac{\sqrt{r_2} + \sqrt{r_2 - a}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_1 - a}}.$$

Wenn a sehr klein ist im Vergleich zu r_1 und r_2, so ist s nur sehr wenig von $r_2 - r_1$ verschieden. Rechnet man bis zu dem Glied von erster Ordnung, so ergibt sich:

$$s = (r_2 - r_1) + \tfrac{1}{2} a \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Für $r = a$ werden die Formeln unbrauchbar, hier hat die Geometrie eine mathematische Singularität.

Weiter ist leicht einzusehen, daß jede Meridianebene auch in dem nicht-minkowskischen Kontinuum eine Ebene ist, in dem Sinne des Wortes, daß die geodätische Verbindung zwischen irgend zwei Punkten der Ebene ganz in die Ebene hineinfällt. Zieht man nämlich von irgendeinem Punkt P der Ebene $\varphi = \text{const}$, $t = \text{const}$ die geodätischen Radienvektoren in sämtlichen in der Ebene enthaltenen Richtungen, so bleiben diese Radienvektoren überall ganz in der Ebene. Für ihre Koordinaten gelten die Gleichungen:

$$\varphi = \text{const}, \; t = \text{const}, \; r^2 \cdot \frac{d\vartheta}{ds} = b, \; \sqrt{\frac{r}{r-a}} \cdot \frac{dr}{ds} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}},$$

wo b eine Integrationskonstante bedeutet. Wie man leicht sieht, sind dann die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Man kann ein Element eines solchen Radiusvektors für einen gegebenen Wert von b leicht konstruieren, wenn man die vernunftgemäße Längenmessung in der Ebene der Konstruktion zugrunde legt. Man lege durch den Endpunkt P eines Radius-

vektors r eine Gerade, welche den mit dem Radius b um den Nullpunkt geschlagenen Kreis berührt. Diese Gerade treffe den gegen $C P$ um den Winkel $d\vartheta$ gedrehten Radiusvektor $C P'$ in Q, P' sei die Projektion des Punktes P auf den neuen Radiusvektor. Man teile nun die unendlich kleine Strecke $\overline{P'Q}$ durch einen Punkt Q' im Verhältnis $\sqrt{r-a} : r = P'Q' : P'Q$. Setzen wir $P'Q' = dr$, so ist also:

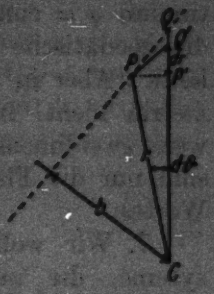


Fig. 1.

$P'Q = \sqrt{\frac{r}{r-a}} \cdot dr$, ferner $PP' = r \cdot d\vartheta$,

folglich $PQ = \sqrt{\frac{r}{r-a} \cdot dr^2 + r^2 d\vartheta^2} = ds$,

$PP' = r \cdot d\vartheta = \frac{b}{r} \cdot ds$, $P'Q = \sqrt{\frac{r}{r-a}} \cdot dr$

$= ds \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}$. Demnach ist PQ' das Element der durch P gehenden geodätischen Linie von dem Parameter b. Man sieht hieraus daß man durch Änderung des Parameters b tatsächlich alle Richtungen um P herum in der Ebene bekommen kann. Die so gewonnenen geodätischen Radienvektoren erfüllen die Ebene kontinuierlich, und man kann also von P zu jedem andern Punkt der Ebene auf einer geodätischen Linie gelangen, die ganz in der Ebene verläuft.

Gleichwohl gilt in der Ebene natürlich nicht die euklidische Geometrie. Man sieht das an der eben ausgeführten Konstruktion. Während man nämlich die natürliche Länge des Elements $P P'$ gleich $r \cdot d\vartheta$ zu rechnen hat, ist die des Elementes $P'Q'$ nicht dr, sondern $\sqrt{\frac{r}{r-a}} \cdot dr$. Das ist mit einer euklidischen Geometrie nicht zu vereinen.

Endlich wollen wir nun noch das dreidimensionale Kontinuum $\varphi = \text{const}$ betrachten, in welchem r, ϑ, t variieren können. Das Element einer geodätischen Linie in diesem Kontinuum ist bestimmt durch die drei Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} r^2 \cdot \frac{d\vartheta}{ds} = b, \\ \frac{r-a}{r} \cdot \frac{dt}{ds} = c, \\ \sqrt{\frac{r}{r-a}} \cdot \frac{dr}{ds} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{r}{r-a} \cdot c^2}. \end{cases}$$

Wenn man b und c variiert, so bekommt man die von einem Punkt nach sämtlichen Richtungen des Kontinuums ausgehenden geodätischen Linien, diese Linien verlaufen ganz in dem Kontinuum und erfüllen es dicht. Man kann das Kontinuum $\varphi = \text{const}$, also einen ebenen Raum nennen, insofern die geodätische Verbindung zweier Punkte ganz in ihm verläuft. Aber in diesem ebenen Raum gilt die euklidische Geometrie nicht, insbesondere existieren in ihm nur ausnahmsweise zweidimensionale Ebenen. Wenn man ganz genau rechnet, sind nur die Flächen $t = \text{const}$ Ebenen im strengen Sinn des Wortes.

7. Wir wollen nun zwei verschiedene Polarkoordinatensyteme, die auf „vernunftgemäßen" Maßangaben beruhen sollen, im Raume $t = \text{const}$ ins Auge fassen. In dem einen sei die Ebene, in welcher das Elektron kreist, die Äquitorialebene, die Meridianebene, welche durch den Mittelpunkt des Elektrons im Moment $t = 0$ geht, sei der Anfangsmeridian. Ich will die Koordinaten in diesem System mit den bisher gebrauchten Buchstaben r, ϑ, φ, t bezeichnen. Die Bewegung des Elektrons geschehe im Sinne des zunehmenden φ.

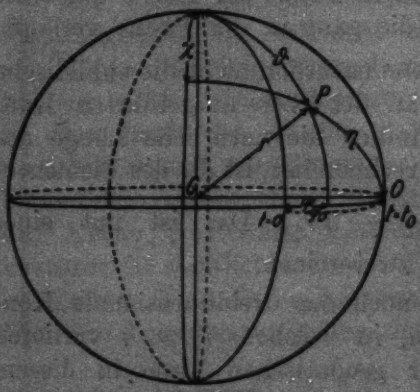


Fig. 2.

Das zweite Koordinatensystem soll als Polarachse den in einem bestimmten Moment $t = t_0$ zum Zentrum des Elektrons gehenden Radiusvektor haben. Der Winkel dieser Polarachse mit dem Anfangsmeridian des vorher definierten Systems, d. h. der Winkel, den das Elektron von der Zeit $t = 0$ bis zur Zeit $t = t_0$ beschrieben hat, heiße φ_0.

Der Anfangsmeridian sei die durch die Polarachse des ersten Systems gelegte Meridianebene. Die Koordinaten dieses zweiten Systems will ich r, η, χ nennen. r, η, χ soll natürlich wieder ein rechtsdrehendes System sein.

Die beiden Koordinatensysteme sind in Fig. 2 dargestellt. Man sieht ohne weiteres, daß zwischen den Winkelkoordinaten der beiden Systeme die Beziehungen bestehen:

$$(4)\qquad \begin{cases} \cos\vartheta = \sin\eta\cdot\cos\chi\,, \\ \sin\vartheta\cdot\sin(\varphi_0-\varphi) = \sin\eta\cdot\sin\chi\,, \\ \sin\vartheta\cdot\cos(\varphi_0-\varphi) = \cos\eta\,. \end{cases}$$

In diesen Formeln ist φ_0 *eine Konstante.*

Ein anderes Koordinatensystem, das ich mit r, η', χ', t bezeichnen will, bekommen wir, wenn wir die CO-Achse mit dem Elektron umlaufen lassen, wenn wir also setzen: $\varphi_0 = q\cdot t/a$, wo q die Geschwindigkeit des Elektrons auf seiner Bahn und a der Bahnradius ist.

$$(4')\qquad \begin{cases} \cos\vartheta = \sin\eta'\cdot\cos\chi'\,, \\ \sin\vartheta\cdot\sin\left(\frac{q\cdot t}{a}-\varphi\right) = \sin\eta'\cdot\sin\chi'\,, \\ \sin\vartheta\cdot\cos\left(\frac{q\cdot t}{a}-\varphi\right) = \cos\eta'\,. \end{cases}$$

Dieses (r, η', χ', t)-Koordinatensystem unterscheidet sich von dem durch (4) definierten normalen Kugelzylinder-Koordinatensystem der (r, η, χ, t) ganz wesentlich dadurch, daß von all den zeitartigen Koordinatenlinien $(r, \eta', \chi') = \text{const}$ nur die Achse $r = 0$ eine Gerade ist, welche die Räume $t = \text{const}$ senkrecht durchsetzt. Alle anderen Trajektorien $(r, \eta', \chi') = \text{const}$ gehen durch die Räume $t = \text{const}$ unter schiefen Winkeln hindurch, und zwar bildet jede Trajektorie eine Schraubenlinie auf einem Zylinder $r = \text{const}$, welche durch jeden Raum $t = \text{const}$ unter gleichem Winkel hindurchgeht. Der Winkel weicht um so mehr vom Rechten ab, je größer der Zylinderradius r ist, alle Schraubenlinien haben dieselbe Ganghöhe, nämlich $2\pi\cdot a/q$.

8. Wir gehen nun von dem durch (4) definierten (r, η, χ, t)-Koordinatensystem zu einem System über, das auf „natürlichen" Messungen beruht und dessen Achse die Weltlinie des Elektronenmittelpunktes ist. Wir bezeichnen den Punkt $t = t_0$ dieser Weltlinie mit O, er liegt auf der Polarachse des (r, η, χ, t)-Koordinatensystems im Raume $t = t_0$. Wenn wir von O aus irgendeinen, zeitartigen oder raumartigen, geodätischen Radiusvektor ziehen, so wissen wir aus unseren in 6. angestellten Überlegungen, daß er ganz in einem dreidimensionalen ebenen Kontinuum $\chi = \text{const}$ verläuft, und ferner, daß sich seine Elemente nach den Gleichungen (8) berechnen

lassen, wo wir nur den Buchstaben ϑ durch η zu setzen haben. Außerdem wollen wir die natürliche Länge des Radiusvektors ϱ nennen und demgemäß überall ds durch $d\varrho$ ersetzen:

$$(5)\quad \begin{cases} r^2 \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial \varrho} = b, \\ \dfrac{\partial \chi}{\partial \varrho} = 0, \\ \dfrac{r-a}{r} \cdot \dfrac{\partial t}{\partial \varrho} = c, \\ \sqrt{\dfrac{r}{r-a}} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial \varrho} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{r^2} + \dfrac{r}{r-a} \cdot c^2}. \end{cases}$$

Da die Gleichungen (5) nur diejenigen Änderungen angeben, welche die Koordinaten r, η, χ, t erfahren, wenn man an einem geodätischen Radiusvektor entlang läuft, müssen wir die Zeichen der partiellen Differentiation anwenden. Der geodätische Radiusvektor ist durch die Parameter b und c bestimmt, welche in den Gleichungen (5) konstant gehalten werden. Um die Änderungen der Koordinaten für ein beliebiges Streckenelement ds zu finden, werden wir im folgenden auch ihre partiellen Differentialquotienten nach b und c berechnen müssen.

Ehe wir dazu übergehen, wollen wir die Weltlinie des Elektronenmittelpunktes, also die Achse unseres neuen Koordinatensystems A, welche zu den durch O gehenden Radienvektoren gehört, etwas genauer betrachten. Die Parameter der Achse A seien mit $-i \cdot B$, $-i \cdot C$ bezeichnet. Da die Achse zeitartig ist, sind B und C reelle Größen. Der Radius der Kreisbahn des Elektrons habe, vernunftgemäß gemessen, die Länge a. Die Geschwindigkeit des Elektrons, vernunftgemäß gerechnet, sei bezogen auf Lichtgeschwindigkeit gleich q. Dann ist für die Weltlinie des Elektronenmittelpunktes:

$$r = a, \qquad \frac{\partial r}{\partial \varrho} = 0, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial \varrho^2} = 0 \quad \text{usw.},$$

also nach (5):

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \varrho}\right)^2 = \frac{r-a}{r} + B^2 \cdot \frac{r-a}{r^3} - C^2 \qquad = 0,$$

$$2 \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial \varrho^2} = \frac{a}{r^3} - B^2 \cdot \frac{2r-3a}{r^4} \qquad = 0,$$

$$2 \cdot \frac{\partial^3 r}{\partial \varrho^3} = -\left(\frac{2a}{r^3} - 6 \cdot B^2 \cdot \frac{r-2a}{r^5}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial \varrho} = 0$$

usf.

Setzt man hier $r = a$ ein, so ergeben sich demnach für B und C die beiden Gleichungen:

$$\frac{a-\alpha}{a} + B^2 \cdot \frac{a-\alpha}{a^2} - C^2 = 0,$$

$$\frac{\alpha}{a^2} - B^2 \cdot \frac{2a-3\alpha}{a^3} = 0.$$

Daraus berechnen sich B und C:

$$B = a \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{2a-3\alpha}}, \quad C = \frac{a-\alpha}{\sqrt{a\cdot(a-\frac{1}{2}\alpha)}}, \quad \frac{B}{C} = \frac{a^2}{a-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{2a}}.$$

Die kleine Änderung dt der Zeit, welche dem Element $-i\cdot d\varrho$ der Weltlinie entspricht, berechnet sich nach (5), wenn man für c seinen Wert $-i\cdot C$ einsetzt:

$$dt = -i\cdot d\varrho \cdot \frac{a}{a-\alpha}\cdot C.$$

Während dieser Zeit schreitet der Mittelpunkt des Elektrons um ein Bogenelement $a\cdot d\eta$ voran, welches demselben Element $-i\cdot d\varrho$ der Weltlinie entspricht und sich aus der ersten Gleichung (5) berechnet, wenn man für b seinen Wert $-i\cdot B$ einsetzt:

$$a\cdot d\eta = -i\cdot d\varrho\cdot\frac{B}{a}.$$

Demnach ergibt sich für die Geschwindigkeit q des Elektronenmittelpunktes:

$$q = \frac{a\cdot d\eta}{dt} = \frac{a-\alpha}{a^2}\cdot\frac{B}{C}.$$

Setzt man für B/C den oben gefundenen Wert:

$$\frac{B}{C} = \frac{a^2}{a-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{2a}}$$

ein, so ergibt sich die wichtige Beziehung:

$$(6) \qquad q = \sqrt{\frac{\alpha}{2a}}, \quad \alpha = 2a\cdot q^2,$$

und man bekommt aus den oben gefundenen Ausdrücken für B und C:

$$(7) \qquad \begin{cases} B = a\cdot\dfrac{q}{\sqrt{1-3q^2}}, \\ C = \dfrac{1-2q^2}{\sqrt{1-3q^2}}. \end{cases}$$

Auf der Achse A bringen wir eine natürliche Längenteilung ϱ an, deren Nullpunkt der Punkt $t = 0$ sei. Da A zeitartig ist, so ist die Länge ϱ auf ihr eine rein imaginäre Zahl $\varrho = i \cdot \tau$, wo τ eine reelle Größe, die Eigenzeit des Elektrons, ist. Zu jedem Wert von τ gehört ein bestimmtes t_0, und zwar, da $dt = -i \cdot d\varrho \cdot a \cdot C/a - a$, nach (6) und (7):

$$t_0 = \frac{\tau}{\sqrt{1 - 3q^2}}. \tag{8}$$

Diesen Wert denken wir uns in $\varphi_0 = q \cdot t_0/a$ und so in die Gleichungen (4) eingesetzt. Legen wir nun durch den zu einem bestimmten Wert τ gehörenden Punkt O der Achse A nach der in 3. geschilderten Methode den zu A senkrechten Raum R, so können wir τ als den zu diesem Raum gehörenden Zeitparameter ansehen. In dem von uns zu konstruierenden Koordinatensystem wird also ein Raum R durch die Gleichung $\tau = \text{const}$ dargestellt. Um die Koordinaten irgendeines Raumzeitpunktes P anzugeben, müssen wir erstens den Zeitparameter τ des Raumes R kennen, in welchem sich der Punkt P befindet, zweitens die beiden Parameter b und c des von O im Raume R durch P gelegten Radiusvektors, drittens die Länge ϱ der Strecke OP, natürlich gemessen. Die vier Größen (ϱ, b, c, τ) sind die Koordinaten von P. Wir müssen nun das Problem lösen, die Transformationsformeln zu finden, welche von dem Koordinatensystem (r, η, χ, t) zu (ϱ, b, c, τ) führen.

Wie sich die vier Größen (r, η, χ, t) zugleich mit ϱ ändern, wird durch die Differentialgleichungen (5) angegeben.

Um ihre Veränderungen bei Variation des Zeitparameters τ zu finden, denke ich mir im Raume τ, der die Achse in O schneidet, einen Punkt P und im Raume $\tau + d\tau$, der die Achse in O_1 schneiden möge, einen Punkt P_1, und zwar sollen P und P_1 ganz dieselben räumlichen Koordinaten ϱ, b, c haben, sie unterscheiden sich nur in den τ. Dann gehören zu P_1 auch dieselben Koordinaten $r_1 = r$, $\eta_1 = \eta$, $\chi_1 = \chi$, vorausgesetzt, daß man η_1 und χ_1 in einem Koordinatensystem rechnet, welches sich von dem (r, η, χ)-System dadurch unterscheidet, daß man an Stelle von φ_0 den Winkel $\varphi_0 + d\varphi_0$ nimmt, wo nach (8): $d\varphi_0 = \frac{q}{a} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{1 - 3q^2}}$. Nennen wir die Koordinaten von P_1 im (r, η, χ, t)-System $r + dr$, $\eta + d\eta$, $\chi + d\chi$, $t + dt$, so ergibt sich: $dr = 0$, und nach (4):

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \sin\eta\cdot\cos\chi, \\ \sin\vartheta\cdot\sin(\varphi_0 + d\varphi_0 - \varphi) = \sin\eta\cdot\sin\chi, \\ \sin\vartheta\cdot\cos(\varphi_0 + d\varphi_0 - \varphi) = \cos\eta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \sin(\eta + d\eta)\cdot\cos(\chi + d\chi), \\ \sin\vartheta\cdot\sin(\varphi_0 - \varphi) = \sin(\eta + d\eta)\cdot\sin(\chi + d\chi), \\ \sin\vartheta\cdot\cos(\varphi_0 - \varphi) = \cos(\eta + d\eta) \end{cases}$$

oder: $d\eta = -\sin\chi\cdot d\varphi_0$, $d\chi = -\cos\eta\cdot\cot\chi\cdot d\varphi_0$.

Bezeichnen wir ferner den Unterschied der Zeit des Punktes P gegen O als t', den des Punktes P_1 gegen O_1 als t_1', so ist auch $t' = t_1'$. Folglich ist der Zeitunterschied dt zwischen P_1 und P ebenso groß, wie der zwischen O_1 und O, also nach (8): $dt = d\tau/\sqrt{1-3q^2}$. Demnach gelten bei einer Änderung des Parameters τ allein die folgenden Differentialgleichungen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial\tau} = 0, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial\tau} = -\dfrac{q}{a}\cdot\dfrac{\sin\chi}{\sqrt{1-3q^2}}, \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial\tau} = -\dfrac{q}{a}\cdot\dfrac{\cot\eta\cdot\cos\chi}{\sqrt{1-3q^2}}, \\ \dfrac{\partial t}{\partial\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{1-3q^2}}. \end{cases}$$

Es bleiben noch zu berechnen die partiellen Änderungen nach den beiden Parametern b und c. Ehe wir diese Rechnung ausführen, wollen wir sie aber durch zwei andere Parameter ersetzen, die der Anschauung bequemer zugänglich sind.

9. Durch den Punkt O der Achse A, welcher die Eigenzeit $\tau = \tau_0$ hat, legen wir den Raum $\tau = \tau_0$, indem wir von O aus alle zu A senkrechten Radienvektoren ziehen. Zu diesen Radienvektoren gehören auch die Polarachse CO und überhaupt die sämtlichen geodätischen Radienvektoren, aus denen sich, wie wir auf S. 500 gesehen haben, die Ebene $\chi = 0$, $t = t_0$ zusammensetzt. Denn diese Radienvektoren stehen im Punkte O sowohl auf der Richtung der t-Linie, als auch auf der Richtung der Bewegung des Elektrons senkrecht und folglich auch auf der Richtung der Achse A, welche in der durch beide gelegten Ebene enthalten ist. Wegen der Symmetrie des Gravitations-

feldes in bezug auf den Radius CO gilt das Gesagte ebensowohl bei natürlicher, wie bei vernunftgemäßer Messung der Winkel. Wir können danach den Satz aussprechen:

Der Raum $\tau = \tau_0$ schneidet sich mit dem Raum $t = t_0$ in der Ebene $\chi = 0$, $t = t_0$.

Wir wollen nun ferner durch das Anfangselement eines im Raume $\tau = \tau_0$ außerhalb der Ebene $\chi = 0$ gelegenen Radiusvektors und die Polarachse CO ein ebenes Flächenelement hindurchlegen. Da im Unendlichkleinen auch im nichtminkowskischen Kontinuum die minkowskische Geometrie gilt, so läßt sich die Konstruktion ohne weiteres ausführen. Alle von O in diesem Flächenelement ausstrahlenden Linienelemente wollen wir geodätisch beliebig weit fortsetzen, alle so erhaltenen Radienvektoren bilden ein im Raum $\tau = \tau_0$ enthaltenes zweidimensionales Kontinuum, welches wir als eine „Meridianfläche" bezeichnen wollen. Alle Meridianflächen schneiden sich in der Polarachse CO, zu ihnen gehört auch die Ebene $\chi = 0$, die einzige Ebene unter ihnen im strengen Sinne des Wortes. Der Winkel, welchen das ebene Element einer Meridianfläche in der Nähe des Punktes O mit der Ebene $\chi = 0$ bildet, natürlich gemessen, sei mit ψ bezeichnet, wir nennen ihn den zu dieser Meridianfläche gehörenden „Meridianwinkel". Endlich sei der Winkel zwischen dem Anfangselement irgend eines Radiusvektors im Raume $\tau = \tau_0$ mit der Polarachse, natürlich gemessen, durch den Buchstaben β bezeichnet, und der „Breitengrad" des betreffenden Radiusvektors genannt. Durch die beiden Winkel β und ψ ist der Radiusvektor eindeutig bestimmt, durch diese beiden Variablen können wir also die beiden oben vorläufig gewählten Parameter b und c ersetzen. Wir bekommen so ein auf natürlichen Messungen beruhendes Koordinatensystem $(\varrho, \beta, \psi, \tau)$, welches mit dem auf vernunftgemäßen Messungen beruhenden System der (r, η, χ, t) leicht in Beziehung zu bringen ist. Beide Systeme haben die Polarachse CO und die Anfangsmeridianebene gemeinsam, welche in dem einen System $\psi = 0$, $\tau = \tau_0$, in dem anderen $\chi = 0$, $t = t_0$ heißt. Doch ist die Geometrie der Ebene in beiden Systemen verschieden. Andere Meridianebenen haben die beiden Systeme nicht gemeinsam, weil die Räume $t = t_0$ und $\tau = \tau_0$ sich nur in dieser einen Ebene schneiden. Ein sehr wesentlicher Unterschied der beiden Koordi-

natensysteme besteht aber darin, daß die $(\varrho, \beta, \psi, \tau)$ keine Kugelzylinderkoordinaten im strengen Sinne des Wortes sind. Konstruieren wir die zeitartigen Linien $(\varrho, \beta, \psi) = \text{const}$, so finden wir, daß unter ihnen nur die Linie $\varrho = 0$ eine Gerade ist, welche die Räume $\tau = \text{const}$ senkrecht durchsetzt. Alle anderen Trajektorien $(\varrho, \beta, \psi) = \text{const}$ bilden Schraubenlinien auf den Zylindern $\varrho = \text{const}$, und zwar hat jede Schraubenlinie dieselbe Ganghöhe, nämlich $2\pi \cdot a \cdot \sqrt{1 - 3q^2}/q$. Das Koordinatensystem ist also ganz ähnlich dem auf S. 503 beschriebenen der (r, η', χ', t), nur ist es wegen der nichtminkowskischen Geometrie etwas weniger regelmäßig. Wir müßten unser Koordinatensystem eigentlich durch $(\varrho, \beta', \psi', \tau)$ bezeichnen. Wir wollen aber der Einfachheit wegen in den folgenden Darlegungen zunächst die Striche weglassen, man kann sie sich ja in Gedanken leicht hinzufügen. Erst im Abschnitt 11. werden wir die Striche auch in den gedruckten Formeln einführen, um das $(\varrho, \beta', \psi', \tau)$-System deutlich von einem $(\varrho, \beta, \psi, \tau)$-System zu unterscheiden, in welchem, wie in dem (r, η, χ, t)-System, die zeitartigen Trajektorien die Räume $\tau = \text{const}$ senkrecht durchqueren sollen.

Wir haben nun zunächst die Aufgabe zu lösen, die beiden Parameter b und c durch die Winkelkoordinaten β und ψ auszudrücken. Es sei $d\varrho$ das im Punkte O beginnende Element irgendeines Radiusvektors. Wir berechnen die Projektionen von $d\varrho$ auf die vier Koordinatenrichtungen des Systems (r, η, χ, t) nach Formel (1), wo wir für ϑ und φ die entsprechenden Winkel η und χ einsetzen. Da der Punkt O auf der Polarachse liegt, ist $d\chi = 0$, die η-Richtung ist unendlich vieldeutig in der auf der Polarachse senkrechten Ebene, die Richtung von dr fällt mit der Richtung der Polarachse zusammen, ferner ist im Punkte O zu setzen: $r = a$. Beachtet man dies, so ergibt sich nach (1):

$$(10)\quad \begin{cases} d\varrho_1 = \sqrt{\dfrac{a}{a-a}} \cdot dr, \; d\varrho_2 = a \cdot d\eta, \; d\varrho_3 = 0, \\ d\varrho_4 = i \cdot \sqrt{\dfrac{a-a}{a}} \cdot dt. \end{cases}$$

Aus der Definition des Winkels β folgt: $d\varrho_1 = d\varrho \cdot \cos\beta$. Setzen wir ferner für $d\eta$ und für dt die aus (5) sich ergebenden Werte ein und beachten wir (6), so bekommen wir:

$$(11)\quad \begin{cases} d\varrho_1 = d\varrho\cdot\cos\beta, \quad d\varrho_2 = \dfrac{b}{a}\cdot d\varrho, \quad d\varrho_3 = 0, \\ d\varrho_4 = \dfrac{i\cdot c}{\sqrt{1-q^2}}\cdot d\varrho. \end{cases}$$

Da nun $d\varrho^2 = d\varrho_1{}^2 + d\varrho_2{}^2 + d\varrho_3{}^2 + d\varrho_4{}^2$, so ist:

$$(12)\quad \begin{cases} \cos\beta = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a} + \dfrac{c^2}{1-2q^2}}, \\ \sin\beta = \dfrac{b}{a}\cdot\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{b^2}\cdot\dfrac{c^2}{1-2q^2}}. \end{cases}$$

Weiter projizieren wir $d\varrho$ auf die zur Bahnebene senkrecht stehende räumliche Richtung, welche wir als x-Achse bezeichnen wollen. Nach den oben gemachten Ausführungen liegt die x-Achse sowohl im Raume $t = t_0$, wie auch im Raume $\tau = \tau_0$. Wir wollen die gesuchte Projektion, die bei natürlicher und bei vernunftgemäßer Maßangabe dieselbe Größe hat, mit dx bezeichnen. Da die Polarachse CO und die t-Richtung auf x senkrecht stehen, ebenso wohl bei vernunftgemäßer wie bei natürlicher Winkelmessung, so können wir dx durch Projektion der Komponente $d\varrho_2$ auf die x-Richtung bekommen. Da ferner auf der im Raume $t = t_0$ um das Gravitationszentrum geschlagenen Kugel bei natürlicher wie bei vernunftgemäßer Messung dieselbe Geometrie gilt, so sieht man aus Fig. 2 unmittelbar, daß $dx = d\varrho_2\cdot\cos\chi$, also nach (11) $dx = b\cdot\cos\chi\cdot d\varrho/a$. Im Raume $\tau = \tau_0$ ist die Projektion von $d\varrho$ auf die zur Polarachse senkrechte Ebene gleich $d\varrho\cdot\sin\beta$, projiziert man in dieser Ebene auf die x-Richtung, so bekommt man $dx = d\varrho\cdot\sin\beta\cdot\cos\psi$. Daraus folgt:

$$\cos\psi = \frac{b\cdot\cos\chi}{a\cdot\sin\beta},$$

oder wenn man von (12) Gebrauch macht:

$$(13)\quad \begin{cases} \cos\psi = \dfrac{\cos\chi}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{b^2}\cdot\dfrac{c^2}{1-2q^2}}}, \\ \sin\psi = \sqrt{\dfrac{\sin^2\chi - \dfrac{a^2}{b^2}\cdot\dfrac{c^2}{1-2q^2}}{1 - \dfrac{a^2}{b^2}\cdot\dfrac{c^2}{1-2q^2}}}. \end{cases}$$

Ich führe jetzt die Bedingung ein, daß $d\varrho$ auf der Achse A senkrecht steht. Bezeichnen wir das Element der Achse im Punkte O mit $i\cdot d\tau$ und seine Projektion auf die vier Koordi-

natenrichtungen durch die Suffixe 1, 2, 3, 4, so haben wir nach der in 8. angestellten Berechnung:

$$d\tau_1 = 0,\ d\tau_2 = -i\frac{B}{a}\cdot d\tau,\ d\tau_3 = 0,\ d\tau_4 = \frac{C}{\sqrt{1-2q^2}}\cdot d\tau,$$

wo für B und C die in (7) angegebenen Werte einzusetzen sind. Um die Bedingung aufzustellen, daß $d\varrho$ und $i\cdot d\tau$ aufeinander senkrecht stehen, muß man beachten, daß die Richtung 2 im Punkte O unendlich vieldeutig ist, und daß die Richtungen von $d\varrho_2$ und $i\cdot d\tau_2$ dementsprechend im allgemeinen verschieden sind. Die Richtung von $i\cdot d\tau_2$ ist die positive φ-Richtung, dagegen bildet $d\varrho_2$ mit dieser Richtung den Winkel $\pi/2+\chi$, wenn χ der Winkel der Meridianebene ist, in welcher die Projektion des Vektors $d\varrho$ im Raume $t=t_0$ verläuft. Die Bedingung lautet demnach:

$$-d\varrho_2\cdot d\tau_2\cdot\sin\chi + d\varrho_4\cdot d\tau_4 = 0$$

oder:

$$\frac{B\cdot b}{a^2}\cdot\sin\chi + \frac{C\cdot c}{1-2q^2} = 0.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (7) ergibt sich:

$$c = -\frac{b}{a}\cdot q\cdot\sin\chi. \tag{14}$$

Diesen Wert von c setzen wir in (18) ein und bekommen:

$$\begin{cases} \cos\chi = \dfrac{\cos\varphi\cdot\sqrt{1-3q^2}}{\sqrt{1-2q^2-q^2\cdot\cos^2\varphi}}, \\ \sin\chi = \dfrac{\sin\varphi\cdot\sqrt{1-2q^2}}{\sqrt{1-3q^2+q^2\cdot\sin^2\varphi}}. \end{cases} \tag{15}$$

Wie vorauszusehen war, liegen alle Punkte einer Meridianfläche $\varphi=\text{const}$ in einem dreidimensionalen Raum $\chi=\text{const}$. Für die Parameter b und c findet man die Ausdrücke:

$$\begin{cases} b = a\cdot\sin\beta\cdot\sqrt{1+\dfrac{q^2}{1-3q^2}\cdot\sin^2\psi}, \\ c = -q\cdot\sin\beta\cdot\sin\psi\cdot\sqrt{\dfrac{1-2q^2}{1-3q^2}}. \end{cases} \tag{16}$$

10. Nach diesen Vorbereitungen gehen wir dazu über, die partiellen Differentialquotienten der vernunftgemäßen Koordinaten r, η, χ, t nach den beiden Parametern b und c, oder besser nach β und ψ, zu berechnen.

Wenn wir an irgendeinem Radiusvektor mit den Parametern b, c im Raume $\tau = \tau_0$ entlang gehen, so kann man nach der letzten der Gleichungen (5) die Länge ϱ als Funktion einer einzigen der vernunftgemäßen Koordinaten, nämlich der Größe r berechnen:

$$d\varrho = \frac{dr}{\sqrt{\frac{r-a}{r}\cdot\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)+c^2}},$$

$$\varrho = \int_a^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{r-a}{r}\cdot\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)+c^2}}. \tag{17}$$

Durch Umkehrung bekommt man r als Funktion von ϱ, b, c oder nach (16) als Funktion von ϱ, β, ψ. Damit ist die Aufgabe für r gelöst. Weiter gibt die erste der Gleichungen (5):

$$d\eta = \frac{b}{r^2}\cdot d\varrho = \frac{b\cdot dr}{r^2\cdot\sqrt{\frac{r-a}{r}\cdot\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)+c^2}}.$$

Die Integration ergibt:

$$\eta = \int_a^r \frac{b\cdot dr}{r^2\cdot\sqrt{\frac{r-a}{r}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)+c^2}}. \tag{18}$$

Substituieren wir für r den vorhin gefundenen Wert und für b und c die Ausdrücke (16), so ist damit die Aufgabe auch für die Koordinate η gelöst, sofern wir $\tau = \tau_0$ konstant halten. Es kommt noch hinzu die durch (9) angegebene Abhängigkeit von τ.

Für χ haben wir schon alles, was wir brauchen in den Gleichungen (15) und (9).

Die Zeitkoordinate t wird ebenso wie η behandelt. Die dritte der Gleichungen (5) gibt uns:

$$dt = \frac{r}{r-a}\cdot c\cdot d\varrho = \frac{c\cdot dr}{\frac{(r-a)}{r}\cdot\sqrt{\frac{r-a}{r}\cdot\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)+c^2}},$$

$$t = t_0 + \int_a^r \frac{c\cdot dr}{\frac{(r-a)}{r}\cdot\sqrt{\frac{r-a}{r}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)-c^2}}. \tag{19}$$

Setzt man hier die Ausdrücke für r, b, c ein und für t_0 den Wert (8), so ist die Aufgabe auch für t gelöst.

Nach Durchführung all dieser Rechnungen können wir nach Formel (1) jedes beliebige Streckenelement mit Hilfe der Koordinaten $\varrho, \beta, \psi, \tau$ berechnen. Damit ist die Geometrie des nicht-minkowskischen Kontinuums genügend klargestellt, um zur Lösung unseres Problems vorgehen zu können.

Wir werden die Rechnungen nur näherungsweise durchführen, indem wir die Geschwindigkeit q als eine sehr kleine Größe ansehen. Da c^2 und a von der Größenordnung q^2 sind, können wir die Nenner der Integrale (17), (18), (19) nach Potenzen von q^2 entwickeln. Solange r nicht sehr kleine Werte annimmt, sind diese Reihen sehr schnell konvergent, wir werden sie schon nach dem Glied mit der ersten Potenz von q^2 abbrechen. Die so gewonnenen Formeln gelten für die ganze nahe und fernere Umgebung des Elektrons mit alleiniger Ausnahme des Gravitationszentrums und seiner allernächsten Umgebung. Hier werden alle Berechnungen schon allein deswegen ungültig, weil die Formeln, die wir der Berechnung des Gravitationsfeldes zugrunde legen, im Innern des Körpers des Gravitationszentrums hinfällig sind. Es hat also kein Interesse, sich bei der Betrachtung der Singularitäten der Integrale für $r = a$ aufzuhalten. Alles, was physikalisch von Bedeutung ist, wird bei der von uns zugelassenen Näherung deutlich zutage treten.

Von besonderer Bedeutung für das folgende wird der Ausdruck sein, der sich für t ergeben hat. Er enthält ein Glied von der Ordnung $q \cdot r$, welches für sehr ferne Gegenden unendlich groß wird.

Wir beginnen nun mit der Durchführung der Rechnungen und zwar mit (17). Wir führen folgende Abkürzung ein:

$$\xi = \frac{a}{r} \cdot \left(1 - \frac{c^2}{1 + c^2 - \frac{b^2}{r^2}}\right) = 2 \cdot q^2 \cdot \frac{a}{r} \cdot \left(1 - \frac{c^2}{1 + c^2 - \frac{b^2}{r^2}}\right),$$

wo c^2 von der Ordnung q^2 sehr klein ist. In der Näherung, mit der wir rechnen, werden wir also setzen:

$$\xi = 2 \cdot q^2 \cdot \frac{a}{r}.$$

Für den Ausdruck (17) ergibt sich nun die Reihenentwicklung:

$$\varrho = \int_a^r \frac{dr}{\sqrt{1+c^2-\frac{b^2}{r^2}}} + q^2 \cdot \int_a^r \frac{a \cdot dr}{r \cdot \sqrt{1+c^2-\frac{b^2}{r^2}}} + \dots$$

Die Integration ergibt:

$$(20)\quad \begin{cases} \sqrt{1+c^2}\cdot\varrho = \pm\left(\sqrt{a^2-b'^2} \mp \sqrt{r^2-b'^2}\right) \\ \qquad\qquad + q^2 \cdot a \cdot \ln \dfrac{r \pm \sqrt{r^2-b'^2}}{a \pm \sqrt{a^2-b'^2}}, \\ b' = \dfrac{b}{\sqrt{1+c^2}}. \end{cases}$$

Wir setzen nun für b und c die Werte (16) und finden durch eine leichte Rechnung in der von uns gebrauchten Näherung:

$$(21)\quad \begin{cases} r^2 = \varrho^2 + 2\varrho\cdot a\cdot\cos\beta + a^2 + q^2\cdot\Big(\varrho^2\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\psi \\ \qquad - 2a\cdot(\varrho + a\cdot\cos\beta)\cdot\ln\dfrac{r+\varrho+a\cdot\cos\beta}{a\cdot(1+\cos\beta)}\Big). \end{cases}$$

Hier steht auf der rechten Seite der Buchstabe r für die erste Näherung:

$$(21a)\qquad r = \sqrt{\varrho^2 + 2\varrho a\cdot\cos\beta + a^2}.$$

Dieselbe Rechnung führen wir mit dem Integral (18) durch:

$$\eta = \int_a^r \frac{b\cdot dr}{r^2\cdot\sqrt{1+c^2-\frac{b^2}{r^2}}} + q^2\cdot\int_a^r \frac{a\cdot b\cdot dr}{r^3\cdot\sqrt{1+c^2-\frac{b^2}{r^2}}} + \dots$$

$$(22)\quad \begin{cases} \eta = \arcsin\dfrac{b'}{a} - \arcsin\dfrac{b'}{r} + q^2\cdot\dfrac{a}{b'}\left(\sqrt{1-\dfrac{b'^2}{r^2}} - \sqrt{1-\dfrac{b'^2}{a^2}}\right) \\ b' = \dfrac{b}{\sqrt{1+c^2}}. \end{cases}$$

Eine einfache Umrechnung, bei der man (21) mit benutzt, liefert:

$$(23)\quad \begin{cases} r\cdot\sin\eta = \varrho\cdot\sin\beta + q^2\cdot\Big[\frac{1}{2}\varrho\cdot\sin\beta\cdot\sin^2\psi \\ + \dfrac{(a+\varrho\cdot\cos\beta)\cdot\varrho\sin\beta}{r+a+\varrho\cdot\cos\beta}\cdot\left(1+\dfrac{a}{r}\right) - a\cdot\sin\beta\cdot\ln\dfrac{r+\varrho+a\cdot\cos\beta}{a\cdot(1+\cos\beta)}\Big], \\ r\cdot\cos\eta = a + \varrho\cdot\cos\beta - q^2\cdot\Big[\dfrac{\varrho^2\sin^2\beta}{r+a+\varrho\cdot\cos\beta}\cdot\left(1+\dfrac{a}{r}\right) \\ \qquad + a\cdot\cos\beta\cdot\ln\dfrac{r+\varrho+a\cdot\cos\beta}{a\cdot(1+\cos\beta)}\Big], \end{cases}$$

wo wieder r auf der rechten Seite zur Abkürzung für die erste Näherung:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + 2\varrho a \cdot \cos\beta + a^2} \tag{23a}$$

gesetzt ist.

Für die zweite Winkelkoordinate χ liefern die Formeln (15) in der hier gebrauchten Näherung:

$$\begin{cases} \cos\chi = \cos\psi \cdot (1 - \frac{1}{2} q^2 \cdot \sin^2\psi), \\ \sin\chi = \sin\psi \cdot (1 + \frac{1}{2} q^2 \cdot \cos^2\psi). \end{cases} \tag{24}$$

Die Formeln (22), (23), (24) gelten natürlich nur für den konstanten Wert $\tau = \tau_0$. Wenn der Parameter τ variiert, behalten sie nur dann ihre Gültigkeit, wenn man statt η, χ und β, ψ die gestrichenen Größen η', χ' und β', ψ' eingesetzt denkt. (Vgl. S. 508 und S. 509.)

Bei der Berechnung von t nach (19) beachten wir, daß c schon von der Ordnung q unendlich klein wird. Da wir überall nur bis zu den Gliedern von der Ordnung q^2 gehen, werden wir aus t schon die Glieder von der Ordnung q^2 weglassen. Wir setzen also $dt = c \cdot d\varrho$. Mit Rücksicht auf (8) und (16) bekommen wir:

$$t = \tau \cdot (1 + \tfrac{3}{4} q^2) - q \cdot \varrho \cdot \sin\beta \cdot \sin\psi\,. \tag{25}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, daß bei Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung q^2 der Raum $\tau = \text{const}$ bei vernunftgemäßen Maßangaben ein ebener Raum ist. Denn man kann unter Weglassung der Glieder von der Ordnung q^2 an schreiben:

$$\tau \cdot (1 + \tfrac{3}{4} q^2) = t + q \cdot r \cdot \sin\eta \cdot \sin\chi\,,$$

oder, wenn man durch O im Raume $t = t_0$ ein kartesisches Koordinatensystem legt, dessen z-Achse die Richtung der Momentanbewegung des Elektrons hat:

$$\tau \cdot (1 + \tfrac{3}{4} \cdot q^2) = t - q \cdot z\,. \tag{26}$$

Verbindet man also irgend zwei Punkte eines Raumes $\tau = \text{const}$ durch eine vernunftgemäße Gerade, so liegt diese ganz in dem Raum.

Aber ebenso ist der Raum $\tau = \text{const}$ auch bei natürlichen Maßangaben innerhalb derselben Fehlergrenzen ein ebener Raum. Zum Beweise verbinden wir irgend zwei Punkte in ihm durch eine Linie, deren räumliche Koordinaten r, η, χ

in der Weise bestimmt werden, daß sie die Differentialgleichungen (1) und (2), von denen wir die letzte weglassen, erfüllen:

$$(27)\quad \begin{cases} \frac{r}{r-a}\cdot\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+r^2\cdot\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2+r^2\cdot\sin^2\eta\cdot\left(\frac{d\chi}{ds}\right)^2 \\ \qquad\qquad -\frac{r}{r-a}\cdot C^2=1, \\ \frac{d}{ds}\left(r^2\cdot\frac{d\eta}{ds}\right)-r^2\cdot\sin\eta\cdot\cos\eta\cdot\left(\frac{d\chi}{ds}\right)^2=0, \\ r^2\cdot\sin^2\eta\cdot\frac{d\chi}{ds}=B. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen soll C eine Konstante von der Größenordnung q bedeuten, deren genaue Festsetzung wir uns noch vorbehalten. B ist eine Konstante, die aus der Bedingung zu ermitteln ist, daß die Linie durch zwei bestimmte Punkte des Raumes $\tau = \text{const}$ hindurch gehen soll.

Die Aufgabe, r, η, χ als Funktionen des Parameters s zu finden, ist eine rein dreidimensionale Aufgabe, und sie ist sofort zu lösen, wenn man die sehr kleinen Größen von der Ordnung q^2 an vernachlässigt. Man hat dazu in der ersten Gleichung den Faktor $r/r-a$ gleich 1 zu setzen und das Glied mit C^2 zu streichen. Als Lösung in dieser ersten Näherung bekommt man eine vernunftgemäße Gerade, in dem dreidimensionalen Kontinuum der Polarkoordinaten (r, η, χ), und ds ist ein Linienelement dieser Geraden.

Nehmen wir dazu weiter die Gleichung

$$t - q\cdot s = \tau\cdot(1+\tfrac{3}{4}q^2).$$

wo die rechte Seite eine Konstante bedeutet, so haben wir die gesuchte Linie in der ersten groben Näherung im vierdimensionalen Kontinuum festgelegt, es ist eine Gerade, die im Raume $\tau = \text{const}$ liegt.

Wir wollen nun den Richtungskosinus der so gefundenen Geraden gegen die z-Achse mit $\cos\gamma$ bezeichnen und für die Konstante C den Wert $q\cdot\cos\gamma$ einsetzen, ebenso für a seinen Wert aus (6) $a = 2a\cdot q^2$. Nun entwickeln wir die linke Seite der ersten Gleichung (27) nach q^2 und suchen in bekannter Weise eine zweite Näherung für die Funktionen r, η, χ zu gewinnen, welche sich von der ersten Näherung durch je ein Glied mit q^2 unterscheidet. Transformieren wir um auf ein

kartesisches Koordinatensystem, so werden wir für die Projektionen dx, dy, dz des Linienelementes bekommen: $dx = ds \cdot \cos\alpha \cdot (1 + h \cdot q^2)$, $dy = ds \cdot \cos\beta \cdot (1 + k \cdot q^2)$, $dz = ds \cdot \cos\gamma \cdot (1 + p \cdot q^2)$, wo $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die drei Richtungskosinusse der in erster Näherung gefundenen Geraden und h, k, p drei Funktionen von s bedeuten, die im allgemeinen keine sehr großen Werte annehmen. Die so gefundene Kurve ist zunächst die Projektion der gesuchten Kurve in den Raum $t = \text{const}$. Wir fügen nun noch die Gleichung $t - q \cdot z = \tau \cdot (1 + 8\, q^2/2)$ hinzu oder: $dt = q \cdot \cos\gamma \cdot (1 + p \cdot q^2) \cdot ds$, so ist die Kurve im vierdimensionalen Kontinuum völlig bestimmt, sie verläuft ganz im Raume $\tau = \text{const}$. Wenn wir uns mit dieser Annäherung begnügen, und in den räumlichen Koordinaten alle Glieder von der Ordnung q^4 an, in der zeitlichen Koordinate schon von der Ordnung q^3 an streichen, so können wir die erste der Gleichungen (27) auch schreiben:

$$\frac{r}{r-a} \cdot \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \cdot \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + r^2 \cdot \sin^2\eta \cdot \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 - \frac{r-a}{r} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1$$

und zu den beiden anderen können wir, wie auf S. 499, noch die dritte hinzufügen:

$$\frac{d}{ds}\left(r^2 \cdot \frac{d\eta}{ds}\right) - r^2 \cdot \sin\eta \cdot \cos\eta \cdot \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$r^2 \cdot \sin^2\eta \cdot \frac{d\zeta}{ds} = B,$$

$$\frac{r-a}{r} \cdot \frac{dt}{ds} = C, \qquad C = q \cdot \cos\gamma.$$

Die Kurve befriedigt also erstens die Differentialgleichungen der geodätischen Linien mit dem verlangten Grade von Genauigkeit, zweitens verläuft sie ganz im Raume $\tau = \text{const}$. Damit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Auf S. 501 ist bewiesen worden, daß jeder dreidimensionale Raum $\chi = \text{const}$, oder was dasselbe ist, $\psi = \text{const}$ bei natürlichen Maßangaben ein ebener Raum ist. Nun schneidet sich ein Raum $\psi = \text{const}$ mit einem Raume $\tau = \text{const}$ stets in einer Meridianfläche, wie sie auf S. 508 definiert worden ist. Verbindet man zwei Punkte P_1 und P_2 dieser Meridianfläche durch eine geodätische Linie, so muß diese erstens in

dem Raume $\psi = \text{const}$, zweitens —, innerhalb der Fehlergrenzen, mit denen wir hier rechnen — auch im Raume $\tau = \text{const}$ verlaufen. Mithin liegt sie ganz in der Schnittfläche der beiden Räume, der Meridianfläche $\psi = \text{const}$, $\tau = \text{const}$.

Wenn man alle sehr kleinen Größen von höherer Ordnung als q^2 vernachlässigt, so kann man jede Meridianfläche $\psi = \text{const}$, $\tau = \text{const}$ als eine Ebene ansehen.

Die Geometrie in diesen Ebenen ist, wenn man die Größen von der Ordnung q^2 mitrechnet, nicht mehr euklidisch, indessen ist leicht einzusehen, daß in allen dieselbe Geometrie herrscht. Denn erstens herrscht in jedem Raume $\chi = \text{const}$ dieselbe Geometrie und zwar sind die drei, auch bei natürlichen Messungen aufeinander senkrecht stehenden Ebenen $t = t_0$, $\eta = 0$, $\eta = \pi/2$ Symmetrieebenen in dieser Geometrie. Diese Symmetrieebenen sind in allen Räumen $\chi = \text{const}$ geometrisch gleichartig. Nun schneidet der Raum $\tau = \text{const}$ den Raum $\chi = \text{const}$ in einer Fläche, welche durch die Achse OC ($t = t_0$, $\eta = 0$) hindurchgeht, und welche mit der t-Achse ($r = 0$) in jedem Raume $\chi = \text{const}$ denselben Winkel bildet. Folglich muß in jeder Fläche $\chi = \text{const}$, $\tau = \text{const}$ dieselbe Geometrie herrschen, und zwar muß sie symmetrisch zu der Achse $\beta = 0$, $\beta = \pi$ sein. Daraus folgt:

Das Linienelement in einer Meridianebene $\tau = \tau_0$, $\psi = \text{const}$ berechnet sich in der Genauigkeit, mit der wir rechnen, als: $ds^2 = d\varrho^2 + (1 + h \cdot q^2) \cdot \varrho^2 \cdot d\beta^2$, wo h eine Funktion von ϱ und β, aber unabhängig von ψ ist.

Beschreiben wir beispielsweise mit dem konstanten Radius ϱ in verschiedenen Ebenen $\psi = \text{const}$ Kreise, so sind die Bogenlängen dieser Kreise vom Pol $\beta = 0$ an gerechnet bis zu einem bestimmten Wert $\beta = \beta_1$ alle gleich. Hieraus folgt weiter:

Die Kurven $\beta = \text{const}$ auf der Oberfläche einer Kugel $\varrho = \text{const}$ im Raume $\tau = \tau_0$ sind sämtlich geodätische Kreise auf der Kugel, Breitenkreise.

Daraus folgt schließlich:

Das räumliche Koordinatensystem der ϱ, β, ψ im Raume $= \tau_0$ ist orthogonal.

Denn ϱ steht nach der Definition der Kugel auf allen Richtungen in der Kugeloberfläche senkrecht, also auch auf den Kreisen $\beta = \text{const}$ und $\psi = \text{const}$. Nach dem vorigen Satz stehen aber auch die Kurven $\beta = \text{const}$ als geodätische Kreise auf den Meridianen $\psi = \text{const}$ senkrecht.

Das Linienelement in einem Raume $\tau = \text{const}$ berechnet sich daher nach der Formel:

$$(28)\quad ds^2 = d\varrho^2 + (1 + h \cdot q^2) \cdot \varrho^2 \cdot d\beta^2 + (1 + k \cdot q^2)\, \varrho^2 \cdot \sin^2\beta \cdot d\psi^2,$$

wo die beiden Größen h und k Funktionen von ϱ und β, unabhängig von ψ, sind.

Die Berechnung eines Streckenelements.

11. Es ist schon hervorgehoben worden, daß das Koordinatensystem, mit dem wir bisher gerechnet haben, kein Kugelzylinder-Koordinatensystem im strengen Sinn des Wortes ist. Die zeitartigen Trajektorien $(\varrho, \beta, \psi) = \text{const}$ sind Schraubenlinien auf den Zylindern $\varrho = \text{const}$, ganz wie in dem auf S. 508 beschriebenen Koordinatensystem (r, η', χ', t) in der minkowskischen Geometrie. Wir werden deswegen im folgenden das bisher benutzte Koordinatensystem stets mit $\varrho, \beta', \psi', \tau$ bezeichnen, in allen bisher entwickelten Formeln denken wir uns anstatt β, ψ eingesetzt β', ψ'.

Um zu einem Koordinatensystem zu kommen, in welchem die zeitartigen Trajektorien die Räume $\tau = \text{const}$ senkrecht durchsetzen, gehen wir von der Tatsache aus, daß der Raum $\tau = \text{const}$ ein ebener Raum ist, welcher in der Näherung, mit der wir rechnen, gegen den Raum $t = \text{const}$ gerade um den Winkel geneigt ist, der sich nach der gewöhnlichen Relativitätstheorie bei einer Bewegung des Elektrons mit konstanter Geschwindigkeit, in der Richtung der z-Achse ergibt. In diesem Raume dreht sich die Polarachse des sphärischen Koordinatensystems β', ψ' in der Ebene $\psi' = \pi/2$ und zwar so, daß sie während der kleinen Zeit $d\tau$ den Winkel $\frac{q}{a} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{1 - 3q^2}}$, natürlich gemessen, beschreibt. Da nach dem Prinzip der Relativität der Gravitationswirkungen in der näheren Umgebung der Achse A bei natürlichen Maßangaben die minkowskische Geometrie gilt, so erfüllt ein sphärisches Koordinatensystem, dessen Winkel wie mit θ und Φ bezeichnen wollen, und das durch die folgenden Gleichungen definiert sei:

$$(29)\quad \begin{cases} \cos\beta' = \sin\theta \cdot \cos(\Phi_1 - \Phi), \\ \sin\beta' \cdot \sin\psi' = \sin\theta \cdot \sin(\Phi_1 - \Phi), \\ \sin\beta' \cdot \cos\psi' = \cos\theta, \\ \Phi_1 = \dfrac{q \cdot \tau}{a \cdot \sqrt{1 - 3q^2}}, \end{cases}$$

jedenfalls in der nächsten Umgebung der Achse A die Bedingung, daß die zeitartigen Trajektorien $(\varrho, \theta, \Phi) = \text{const}$ die Räume $\tau = \text{const}$ überall senkrecht durchsetzen. Das heißt: Wenn wir mit ds_1, ds_2, ds_3, ds_4 die Projektionen einer kleinen Strecke ds auf die vier Koordinatenrichtungen des (τ, η, χ, i)-Systems bezeichnen, alle natürlich gemessen, so ist in der Nähe der Achse A:

$$\frac{\partial s_1}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial \tau} + \frac{\partial s_2}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial s_2}{\partial \tau} + \frac{\partial s_3}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial s_3}{\partial \tau} + \frac{\partial s_4}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial s_4}{\partial \tau} = 0,$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial \tau} + \frac{\partial s_2}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial s_2}{\partial \tau} + \frac{\partial s_3}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial s_3}{\partial \tau} + \frac{\partial s_4}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial s_4}{\partial \tau} = 0,$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial \tau} + \frac{\partial s_2}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial s_2}{\partial \tau} + \frac{\partial s_3}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial s_3}{\partial \tau} + \frac{\partial s_4}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial s_4}{\partial \tau} = 0.$$

Zur Berechnung der Ableitungen nach den ϱ, θ, Φ haben wir die Gleichungen (23), (24), (25) zu nehmen, nachdem mit Hilfe von (29) in ihnen die β', ψ' durch θ, Φ ersetzt sind. Zur Berechnung der Ableitungen nach τ benutzen wir die Gleichungen (9), indem wir beachten, daß zu den in ihnen angegebenen Werten für die $ds/d\tau$ infolge der Koordinatentransformation noch die folgenden Größen hinzutreten:

$$\frac{\partial s}{\partial \beta'} \cdot \frac{\partial \beta'}{\partial \tau} + \frac{\partial s}{\partial \psi'} \cdot \frac{\partial \psi'}{\partial \tau}.$$

Man sieht ohne weiteres, daß die linken Seiten der Orthogonalitätsbedingungen sämtlich von der Ordnung q sehr klein sind. Die Glieder von der ersten Ordnung bekommt man, wenn man in den Ausdrücken (23), (24) die Glieder mit q^2 wegläßt, sie müssen Null ergeben, weil beim Fehlen aller Glieder von der Ordnung q^2 die Geometrie minkowskisch ist. Fügt man nun die Glieder mit q^2 hinzu, so bekommt man allerdings nur in der nächsten Nähe der Achse A Null, aber auch in größeren Entfernungen kommt, weil der ganze Ausdruck mit q multipliziert ist, nur eine Größe von der Ordnung q^3 heraus. In der Näherung, mit der wir rechnen, sind also in dem $(\varrho, \theta, \Phi, \tau)$-Koordinatensystem die Orthogonalitätsbedingungen für die zeitartigen Trajektorien überall erfüllt.

Dafür nehmen wir aber zwei Unbequemlichkeiten in den Kauf: Erstens sind die Maßfaktoren, die in dem Ausdruck für das Linienelement ds auftreten, nicht mehr unabhängig von τ und zweitens bilden die Kurven $\theta = \text{const}$ und $\Phi = \text{const}$ auf der Kugel $\varrho = \text{const}$, $\tau = \text{const}$ kein orthogonales Kurven-

netz. Wir bekommen demnach zur Berechnung von ds einen Ausdruck von folgender Form:

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 \cdot (1 + \varkappa \cdot q^2) \cdot d\theta^2 + \varrho^2 \cdot \sin^2\theta \cdot (1 + \lambda \cdot q^2) \cdot d\Phi^2 + 2\varrho^2 \cdot \sin\theta \cdot \mu \cdot q^2 \cdot d\theta \cdot d\Phi - (1 + \sigma \cdot q^2) \cdot d\tau^2 ,$$

wo $\varkappa, \lambda, \mu, \sigma$ Funktionen von $\varrho, \theta, (\Phi_1 - \Phi)$ sind, die im allgemeinen keine sehr großen Werte annehmen. Die Zeit τ kommt in diesen Ausdrücken nur in der Verbindung $\Phi_1 - \Phi$ vor, wo $\Phi_1 = q \cdot \tau / a \cdot \sqrt{1 - 3q^2}$. Daraus ist zu sehen, daß die Ableitungen der Maßfaktoren nach τ von der Ordnung q^2 sind.

Innerhalb der von uns zugelassenen Fehlergrenzen können wir bei kleinen Änderungen von τ die Maßfaktoren auch in dem Koordinatensystem $\varrho, \theta, \Phi, \tau$ als unabhängig von τ ansehen.

Der zweite Fehler ist dagegen sehr unbequem für die Rechnungen. In dem Polarkoordinatensystem ϱ, θ, Φ sind weder die Meridianflächen Ebenen, noch die Kurven konstanter Krümmung geodätische Kreise auf der Kugelfläche $\varrho = \text{const}$, wenn man von der nächsten Umgebung des Punktes O absieht. Wir gehen deswegen durch eine zweite Transformation zu einem bequemeren System sphärischer Koordinaten über, die wir durch die Buchstaben β, ψ bezeichnen wollen und die folgendermaßen definiert sind:

$$(30) \qquad \begin{cases} \cos\beta = \sin\theta \cdot \cos(\Phi_0 - \Phi), \\ \sin\beta \cdot \sin\psi = \sin\theta \cdot \sin(\Phi_0 - \Phi), \\ \sin\beta \cdot \cos\psi = \cos\theta, \\ \Phi_0 = \dfrac{q \cdot \tau_0}{a \cdot \sqrt{1 - 3q^2}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (30) unterscheiden sich von (29) nur dadurch, daß in ihnen statt der Variablen τ der konstante Wert τ_0 eingesetzt ist. Das System $(\varrho, \beta, \psi, \tau)$ verhält sich zu dem in den vorigen Abschnitten ausschließlich gebrauchten System $(\varrho, \beta', \psi', \tau)$ genau so wie in dem minkowskischen Fall das System (r, η, χ, t) zu dem System (r, η', χ', t), von dem auf S. 508 die Rede war.

Da eine Trajektorie $(\varrho, \beta, \psi) = \text{const}$ stets mit einer nach (30) leicht zu berechnenden Trajektorie $(\varrho, \theta, \Phi) = \text{const}$ zusammenfällt, so gelten für das Koordinatensystem $(\varrho, \beta, \psi, \tau)$ die beiden für das System $(\varrho, \theta, \Phi, \tau)$ bewiesenen Sätze: Innerhalb der Fehlergrenzen, mit denen wir rechnen, durchqueren

seine zeitartigen Trajektorien die Räume $\tau = \text{const}$ überall senkrecht und sind die Maßfaktoren im Ausdruck für ds^2 von τ unabhängig.

Im Raume $\tau = \tau_0$ fällt das System der Winkelkoordinaten β, ψ mit dem in den früheren Abschnitten genau untersuchten System β', ψ' zusammen. Es ändert sich jedoch langsam und die Polarachse geht für große Werte τ schließlich in ganz andere Richtungen über, dann gelten all die einfachen Gesetze, die wir für die Winkelkoordinaten β', ψ' gefunden haben, nicht mehr. Wir werden uns deswegen nur auf solche Werte von τ beschränken, die unendlich nahe an τ_0 liegen.

Das von uns gewählte Koordinatensystem $(\varrho, \beta, \psi, \tau)$ ist in der nächsten Umgebung von $\tau = \tau_0$ orthogonal und die Maßfaktoren ändern sich mit τ innerhalb der Fehlergrenzen, mit denen wir rechnen, nicht merkbar.

Wir bekommen also für die Umgebung von $\tau = \tau_0$:

$$ds^2 = d\varrho^2 + (1 + h \cdot q^2) \cdot \varrho^2 \cdot d\beta^2 + (1 + k \cdot q^2) \cdot \varrho^2 \cdot \sin^2\beta \cdot d\psi^2 - (1 + p \cdot q^2) \cdot d\tau^2,$$

wo h, k, p Funktionen von den Größen ϱ, β, aber unabhängig von ψ und τ sind.

Um diese Ausdrücke zu finden, gehen wir aus von (1):

$$ds^2 = \frac{r}{r-a} \cdot dr^2 + r^2 \cdot d\eta^2 + r^2 \cdot \sin^2\eta \cdot d\chi^2 - \frac{r-a}{r} \cdot dt^2.$$

Danach muß sein:

$$\frac{r}{r-a} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial \varrho}\right)^2 + r^2 \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varrho}\right)^2 + r^2 \cdot \sin^2\eta \cdot \left(\frac{\partial \chi}{\partial \varrho}\right)^2 - \frac{r-a}{r} \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial \varrho}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{r}{r-a} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial \beta}\right)^2 + r^2 \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right)^2 + r^2 \cdot \sin^2\eta \cdot \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\right)^2 - \frac{r-a}{r} \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial \beta}\right)^2 = \varrho^2 \cdot (1 + h \cdot q^2)$$

usf.

Die partiellen Ableitungen nach ϱ sind durch die Gleichungen (5) gegeben, zur Berechnung der Ableitungen nach β und ψ hat man die Ausdrücke (23), (24), (25), wobei aber zu beachten ist, daß in ihnen die Buchstaben β und ψ durch β' und ψ' zu ersetzen sind, welche Funktionen von β, ψ, τ bedeuten. Aus (29) und (30) findet man durch eine ganz einfache Rechnung:

$$(31) \quad \begin{cases} \cos\beta' = \cos\beta \cdot \cos(\Phi_1 - \Phi_0) - \sin\beta \cdot \sin\psi \cdot \sin(\Phi_1 - \Phi_0), \\ \operatorname{tg}\psi' = \dfrac{\cot\beta}{\cos\psi} \cdot \sin(\Phi_1 - \Phi_0) + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos(\Phi_1 - \Phi_0), \\ \Phi_1 - \Phi_0 = \dfrac{q}{a} \cdot \dfrac{\tau - \tau_0}{\sqrt{1 - 3q^2}}. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich:

$$(32)\quad \begin{cases} (\cos\beta')_{\tau=\tau_0} = \cos\beta, & (\operatorname{tg}\psi')_{\tau=\tau_0} = \operatorname{tg}\psi, \\ \left(\frac{\partial\beta'}{\partial\beta}\right)_{\tau=\tau_0} = 1, & \left(\frac{\partial\psi'}{\partial\beta}\right)_{\tau=\tau_0} = 0, \\ \left(\frac{\partial\beta'}{\partial\psi}\right)_{\tau=\tau_0} = 0, & \left(\frac{\partial\psi'}{\partial\psi}\right)_{\tau=\tau_0} = 1, \\ \left(\frac{\partial\beta'}{\partial\tau}\right)_{\tau=\tau_0} = +\frac{q}{a}\cdot\frac{\sin\psi}{\sqrt{1-3q^2}}, & \left(\frac{\partial\psi'}{\partial\tau}\right)_{\tau=\tau_0} = \frac{q}{a}\cdot\frac{\cot\beta\cdot\cos\psi}{\sqrt{1-3q^2}}. \end{cases}$$

Um die Ableitungen nach β und ψ zu gewinnen, kann man also in den Formeln (23), (24), (25) die β' und ψ' wieder durch β und ψ ersetzen und einfach nach diesen Größen differenzieren. Man bekommt den Faktor von $d\beta^2$ am einfachsten, indem man folgendermaßen rechnet:

$$\left(\frac{\partial(r\cdot\sin\eta)}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r\cdot\cos\eta)}{\partial\beta}\right)^2 + 2\cdot q^2\cdot\frac{a}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial\beta}\right)^2 - \left(\frac{\partial t}{\partial\beta}\right)^2 = \varrho^2\cdot(1+k\cdot q^2),$$

wo man im dritten Summanden $r = \sqrt{\varrho^2 + 2a\cdot\varrho\cdot\cos\beta + a^2}$ setzen kann. Der Faktor von $d\psi^2$ ergibt sich am einfachsten folgendermaßen:

$$r^2\cdot\frac{\sin^2\eta}{\sin^2\chi}\cdot\left(\frac{\partial(\cos\chi)}{\partial\psi}\right)^2 - \left(\frac{\partial t}{\partial\psi}\right)^2 = \varrho^2\cdot\sin^2\beta\cdot(1+k\cdot q^2).$$

Um den Faktor von $d\tau^2$ zu berechnen, muß man die Ausdrücke (9) noch durch die aus der Differentation von β' und ψ' hervorgehenden Größen ergänzen. Da wir mit Gliedern von der Ordnung q^3 nicht mehr zu rechnen brauchen, können wir dabei die ersten Näherungen benutzen:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + 2a\varrho\cos\beta + a^2}, \qquad \operatorname{tg}\eta = \frac{\varrho\sin\beta}{a+\varrho\cdot\cos\beta}, \qquad \chi = \psi,$$

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-3q^2}} - q\cdot\varrho\cdot\sin\beta\cdot\sin\psi.$$

Man bekommt dann:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial\tau}\right)^2 + r^2\cdot\left(\frac{\partial\eta}{\partial\tau}\right)^2 + r^2\cdot\sin^2\eta\cdot\left(\frac{\partial\chi}{\partial\tau}\right)^2 - \left(1-2q^2\cdot\frac{a}{r}\right)\cdot\left(\frac{\partial t}{\partial\tau}\right)^2 = -(1+p\cdot q^2),$$

Nach Ergänzung der Ausdrücke (9) erhält man:

$$(33)\quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial \tau} = +\frac{q}{a}\cdot\frac{\partial r}{\partial \beta}\cdot\sin\psi = -q\cdot\frac{\varrho}{r}\sin\beta\cdot\sin\psi, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -\frac{q}{a}\cdot\left(1-\frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right)\cdot\sin\psi = -q\cdot\frac{a+\varrho\cdot\cos\beta}{r^2}\cdot\sin\psi, \\ \frac{\partial \chi}{\partial \tau} = -\frac{q}{a}\cdot\frac{a\cdot\cos\psi}{\varrho\cdot\sin\beta} = -q\cdot\frac{\cos\psi}{\varrho\cdot\sin\beta}, \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} = 1+\frac{3}{2}q^2+\frac{q}{a}\cdot\frac{\partial t}{\partial \beta}\cdot\sin\psi+\frac{q}{a}\cdot\frac{dt}{\partial \psi}\cdot\cot\beta\cdot\cos\psi \\ \qquad = 1+\frac{3}{2}q^2-q^2\cdot\frac{\varrho}{a}\cdot\cos\beta. \end{cases}$$

Führt man alle Rechnungen durch, so bekommt man schließlich:

$$(34)\quad \begin{cases} ds^2 = \gamma_{11}\cdot d\varrho^2+\gamma_{22}\cdot\varrho^2 d\beta^2+\gamma_{33}\cdot\varrho^2\cdot\sin^2\beta\cdot d\psi^2-\gamma_{44}\cdot d\tau^2, \\ \gamma_{11}=1, \\ \gamma_{22}=1+2q^2\cdot\left[\frac{r}{r+a+\varrho\cdot\cos\beta}\cdot\left(1+\frac{a}{r}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left.-\frac{a}{\varrho}\cdot\ln\frac{r+\varrho+a\cdot\cos\beta}{a\cdot(1+\cos\beta)}\right], \\ \gamma_{33}=1+2q^2\cdot\left[\frac{a+\varrho\cdot\cos\beta}{r+a+\varrho\cdot\cos\beta}\cdot\left(1+\frac{a}{r}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left.-\frac{a}{\varrho}\cdot\ln\frac{r+\varrho+a\cdot\cos\beta}{a\cdot(1+\cos\beta)}\right], \\ \gamma_{44}=1+2q^2\cdot\left(1-\frac{a}{r}-\frac{\varrho}{a}\cdot\cos\beta\right), \\ r=\sqrt{\varrho^2+2a\varrho\cos\beta+a^2}. \end{cases}$$

Die Maßfaktoren der nicht-minkowskischen Geometrie in dem durch natürliche Messungen definierten Kugelzylinderkoordinatensystem sind durch (34) dargestellt. In der nächsten Umgebung des Elektrons (ϱ/a = unendlich klein) werden die sämtlichen Maßfaktoren gleich 1, hier wird die Geometrie bei natürlichen Maßangaben minkowskisch.

In großen Entfernungen vom Elektron (ϱ/a = unendl. groß, $r\sim\varrho$) ergibt sich für γ_{11}, γ_{22}, γ_{33} ein endlicher Grenzwert, dagegen enthält γ_{44} ein Glied, welches von der Ordnung ϱ/a über alle Grenzen hinausstrebt.

$$(\gamma_{44})_{\varrho>a} = 1+2q^2\cdot\left(1-\frac{\varrho}{a}\cdot\cos\beta\right).$$

12. Um die Untersuchung auch auf die unendlich entfernten Gebiete ausdehnen zu können, müssen wir auf ein Koordinatensystem mit vernunftgemäßen Maßangaben zurücktransformieren können. Ich gehe zunächst auf ein kartesisches Koordinatensystem, dessen Zeitachse die Weltlinie des Gravitationszentrums ist, dessen x-Achse zur Ebene der Elektronenbahn senkrecht steht und dessen z-Achse die Richtung der Bewegung des Elektrons hat, in dem Augenblick, wo es O passiert. Aus Fig. 2 sieht man, daß: $x = r \cdot \sin\eta \cdot \cos\chi$, $y = r \cdot \cos\eta$, $z = -r \cdot \sin\eta \cdot \sin\chi$. Um die gesuchten Transformationsformeln zu gewinnen, müssen wir zu den Ausdrücken (23), (24) noch die Glieder hinzufügen, welche die Abhängigkeit von τ darstellen. Wir gewinnen diese Glieder aus (33), und eine leichte Rechnung ergibt innerhalb der Fehlergrenzen, mit denen wir immer rechnen:

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \tau} = q, \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1 - q^2 \cdot \frac{\varrho \cdot \cos\beta - a}{a}}{\sqrt{1 - q^2}}.$$

Nun ergeben die Formeln (23), (24), (25):

$$(35)\quad \begin{cases} x = \bar{\varrho} \cdot \sin\bar{\beta} \cdot \cos\bar{\psi} \cdot (1 + p \cdot q^2), \\ y = \bar{\varrho} \cdot \cos\bar{\beta} + a, \\ z = \dfrac{-\bar{\varrho} \cdot \sin\bar{\beta} \cdot \sin\bar{\psi} \cdot (1 + p \cdot q^2) + q \cdot \bar{\tau}}{\sqrt{1 - q^2}}, \\ t = \dfrac{\bar{\tau} \cdot \left(1 + q^2 \cdot \frac{a}{r}\right) - q \cdot \bar{\varrho} \cdot \sin\bar{\beta} \cdot \sin\bar{\psi}}{\sqrt{1 - q^2}}, \end{cases}$$

wo:

$$(36a)\quad \begin{cases} \bar{\varrho} = \varrho - q^2 \cdot a \cdot \ln \dfrac{r + \varrho + a \cdot \cos\beta}{a \cdot (1 + \cos\beta)}, \\ \sin\bar{\beta} = \sin\beta + q^2 \cdot \sqrt{\dfrac{r - (a + \varrho \cdot \cos\beta)}{r + (a + \varrho \cdot \cos\beta)}} \cdot \left(1 + \frac{a}{r}\right) \cdot \cos\beta, \\ \cos\bar{\beta} = \cos\beta - q^2 \cdot \sqrt{\dfrac{r - (a + \varrho \cdot \cos\beta)}{r + (a + \varrho \cdot \cos\beta)}} \cdot \left(1 + \frac{a}{r}\right) \cdot \sin\beta, \\ \bar{\psi} = \psi, \\ \bar{\tau} = \tau \cdot \left(1 - q^2 \cdot \dfrac{\varrho \cdot \cos\beta - a}{a}\right) \cdot \left(1 - q^2 \cdot \frac{a}{r}\right). \end{cases}$$

Anschaulich läßt sich der Wurzelausdruck in den Formeln für β deuten:

$$\sqrt{\frac{r-(a+\varrho\cdot\cos\beta)}{r+(a+\varrho\cdot\cos\beta)}}=\operatorname{tg}\frac{\eta}{2},$$

sein Wert wird für $\eta=\pi$ unendlich groß. Der Korrektionsfaktor p in (35) ist:

$$p=\frac{a}{r+(a+\varrho\cdot\cos\beta)}\cdot\left(1+\frac{a}{r}\right). \tag{36b}$$

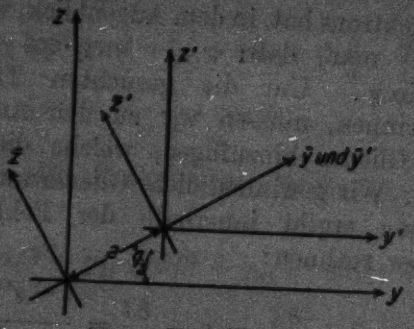


Fig. 8.

Wir wollen nun zu einem Koordinatensystem (x', y', z', t') übergehen, welches sich mit dem Elektron bewegt und welches folgendermaßen definiert sein soll (Fig. 8):

$$\begin{cases} x'=x, \quad \bar{y}'=\bar{y}-a, \quad \bar{z}'=\dfrac{\bar{z}}{\sqrt{1-q^2}}, \quad t'=\dfrac{t-q\cdot\bar{z}}{\sqrt{1-q^2}}, \\ \bar{y}=y\cdot\cos\dfrac{qt}{a}+z\cdot\sin\dfrac{qt}{a}, \quad \bar{z}=-y\cdot\sin\dfrac{qt}{a}+z\cdot\cos\dfrac{qt}{a}, \\ y'=\bar{y}'\cdot\cos\dfrac{qt}{a}-\bar{z}'\cdot\sin\dfrac{qt}{a}, \quad z'=\bar{y}'\cdot\sin\dfrac{qt}{a}+\bar{z}'\cdot\cos\dfrac{qt}{a}. \end{cases} \tag{37a}$$

Für sehr kleine Werte t (t/a von der Größenordnung q oder noch kleiner) gehen die Formeln (37a) bei Vernachlässigung aller Glieder, die von höherer Ordnung als q^2 sehr klein sind, in die Formeln einer Lorentz-Transformation über, und das Koordinatensystem der (x', y', z', t) wird jetzt, was es sonst im allgemeinen nicht ist, ein orthogonales kartesisches Koordinatensystem:

$$\begin{cases} x'=x, \quad y'=y-a, \quad z'=\dfrac{z-q\cdot t}{\sqrt{1-q^2}} \\ t'=\dfrac{t-q\cdot z}{\sqrt{1-q^2}}. \end{cases} \tag{37b}$$

In einem sehr kleinen Zeitintervall in der Nähe von $t = 0$ gilt:

$$(38)\quad \begin{cases} x' = \bar{\varrho} \cdot \sin\bar{\beta} \cdot \cos\bar{\psi} \cdot (1 + p \cdot q^2), \\ y' = \bar{\varrho} \cdot \cos\bar{\beta}, \\ z' = -\bar{\varrho} \cdot \sin\bar{\beta} \cdot \sin\bar{\psi} \cdot (1 + p \cdot q^2), \\ t' = \bar{\tau} \cdot \left(1 + \frac{a}{r}\right), \\ p = \frac{a}{r + a + \varrho \cdot \cos\beta} \cdot \left(1 + \frac{a}{r}\right). \end{cases}$$

Die Formeln (38) ergeben sich aus (35) durch Anwendung der Lorentz-Transformation (37b).

Durch (38) ist die Geometrie des Raumzeit-Kontinuums in unserem Kugelzylinder-Koordinatensystem auf das einfachste dargestellt. Die Formeln (36) sind das Gegenstück der auf S. 500 berechneten Formel für ϱ und r, wenn man von dem Koordinatenanfang C nach O übergeht. Die Formeln sind für den ganzen Raum gültig, so gut für große wie für kleine ϱ. Nur in der allernächsten Nachbarschaft des Gravitationszentrums versagen sie, denn für $r = a = 2a \cdot q^2$ hat unsere Geometrie eine mathematische Singularität. Auch in einem äußerst dünnen, fadenförmigen Kegel hinter dem Gravitationszentrum $\eta = \pi - \varepsilon$, wo ε von der Größenordnung q^2 ist und kleiner, werden die Formeln (36) unbrauchbar. Das muß so sein, weil die Radienvektoren, die von O in dieses Gebiet führen, durch das singulare Gebiet um $r = 0$ herum hindurchgehen müssen. Infolgedessen ist es unmöglich, die Konstruktion der „natürlichen" Meridiankreise durch dieses Gebiet hindurch fortzusetzen. Da die Geometrie selber nur für $r = a$ singulär wird, so ließe sich der kleine Schönheitsfehler der Formeln für $\eta = \pi - \varepsilon$ durch umständlichere Rechnungen und Definitionen jedenfalls ohne prinzipielle Schwierigkeiten beseitigen. Indessen lohnt es der Mühe nicht, weil der Faden, den wir beim Gebrauch von (36) auslassen müssen, nur äußerst dünn ist.

Die durch (38) dargestellte Geometrie des nicht-minkowskischen Kontinuums wird außerordentlich einfach in den sehr entfernten Gebieten, wo a/r sehr klein wird, und wo man deswegen aus den kleinen Korrektionsgliedern die Größen von der Ordnung a/r weglassen kann. Hier verschwindet sowohl der Faktor p als auch das Korrektionsglied in der Formel

für t' und die durch die in (36) definierten Koordinaten $\bar{\varrho}, \bar{\beta}, \bar{\psi}$, dargestellte Geometrie ist dann einfach die minkowskisch Geometrie.

Nun geht aber weiter aus (36) hervor, daß für $\bar{\beta} = \text{const}$ $\bar{\psi} = \text{const}$ $d\bar{\varrho} = d\varrho \cdot (1 - q^2 \cdot a/r)$ wird. Mit anderen Worten Innerhalb der Fehlergrenzen, mit denen wir rechnen, ist i großen Entfernungen vom Elektron $d\bar{\varrho} = d\varrho$ die natürlich gemessene Länge einer Strecke in der Richtung des Radius vektors.

Weiter ergibt sich aus (36) für $\varrho = \text{const}$:

$$d\bar{\beta} = d\beta \cdot \left(1 - q^2 \cdot \frac{r}{r + a + \varrho \cdot \cos\beta} \cdot \left[\left(1 + \frac{a}{r}\right) \frac{\varrho \cdot (\varrho + a \cdot \cos\beta}{r^2} + \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{\varrho^2 \cdot \sin^2\beta}{r^2}\right]\right).$$

Beachten wir das:

$$\frac{\varrho \cdot (\varrho + a \cdot \cos\beta)}{r^2} = 1 - \frac{a}{r} \cdot \frac{\varrho \cdot \cos\beta}{r} - \frac{a^2}{r^2},$$

so ergibt ein Vergleich von (36) mit (34), daß für kleine $a/$ innerhalb der Fehlergrenzen, mit denen wir rechnen:

$$\sqrt{\gamma_{22}} \cdot \varrho \cdot d\beta = \bar{\varrho} \cdot d\bar{\beta}.$$

Schlagen wir einen Meridiankreis $\psi = \text{const}$ mit seh großem Radius $\varrho = \text{const}$, so ist demnach sein Umfang $2\pi \cdot \bar{\varrho}$ und wenn wir auf diesem Kreise eine Winkelteilung anbringe gemäß der Festsetzung, daß gleichen Bogenlängen gleich Winkel entsprechen, so ergibt sich für den Breitenwinkel irgend eines Punktes auf dem Kreise die Größe $\bar{\beta}$. Wir sehen hieraus daß die Winkelteilung auf Kreisen mit kleinen Radien, welch uns β lieferte, mit der Winkelteilung der Kreise mit große Radien nicht übereinstimmt. Die natürliche Teilung au sehr großen Meridiankreisen wird durch die Größe $\bar{\beta}$ dargestell und $\bar{\varrho} \cdot d\bar{\beta}$ ist die natürlich gemessene Länge eines Bogen elements.

Die Einteilung der großen Kugelflächen in Meridianwinke ist mit der Meridianteilung der kleinen Kugelflächen in Über einstimmung, $\psi = \bar{\psi}$ ist der Breitenwinkel, sowohl auf kleinen wie auf großen Kugelflächen. Für das Streckenelement gib ein Vergleich von (36) mit (34) bei kleinen Werten von a/r:

$$\gamma_{33} \cdot \varrho^2 \cdot \sin^2\beta \cdot d\psi^2 = \bar{\varrho}^2 \cdot \sin^2\bar{\beta} \cdot d\bar{\psi}^2.$$

Die natürliche Länge des Bogenelementes auf einem Breitenkreis einer Kugel mit sehr großem Radius ist: $\bar{\varrho} \cdot \sin \bar{\beta} \cdot d\bar{\psi}$.

Für die natürlich gemessene Strecke in zeitartiger Richtung ergibt sich nach (1) die Größe

$$\sqrt{(r-a)/r} \cdot dt' = \sqrt{1 - 2 \cdot q^2 \cdot a/r} \cdot dt' .$$

Ein Vergleich mit (38) zeigt, daß die natürlich gemessene Zeitstrecke bei großem r durch $\bar{\tau}$, nicht durch τ, angegeben wird. Das zeigt uns, daß auf den Zylindern $\varrho = \text{const}$, wenn wir Querschnitte $\tau = \text{const}$ hindurchlegen, die Stücke der zeitartigen Leitlinien zwischen zwei Schnitten $\tau = \tau_1$ und $\tau = \tau_2$ verschieden lang sind, wenn man sie natürlich mißt.

Die mit $(\bar{\varrho}, \bar{\beta}, \bar{\psi}, \bar{\tau})$ bezeichneten Größen geben in großen Entfernungen vom Elektron (ϱ/a groß) die natürlich gemessenen Polarkoordinaten und die natürlich gemessenen Zeiten an. Die Geometrie in den Gebieten, wo ϱ/a groß ist, wird minkowskisch, wenn man ihr die natürlichen Maßangaben zugrunde legt.

Die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes.

18. Die Komponenten des elektromagnetischen Viererpotentials seien, natürlich gemessen, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Die Koordinaten $\varrho, \beta, \psi, \tau$ seien vorübergehend mit $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ bezeichnet. Die Maßfaktoren, des durch sie definierten krummlinigen Koordinatensystems setzen wir:

$$p_{11} = \sqrt{\varrho_{11}}, \quad p_{22} = \varrho \cdot \sqrt{\gamma_{22}}, \quad p_{33} = \varrho \cdot \sin\beta \cdot \sqrt{\gamma_{33}}, \quad p_{44} = \sqrt{\gamma_{44}},$$

also nach (34):

$$(39)\quad \begin{cases} p_{11} = 1, \\ p_{22} = \varrho \cdot \left(1 + q^2 \cdot \left[\dfrac{r}{r + a + \varrho \cdot \cos\beta} \cdot \left(1 + \dfrac{a}{r}\right) - \dfrac{a}{\varrho} \cdot \ln \dfrac{r + \varrho + a \cdot \cos\beta}{a \cdot (1 + \cos\beta)}\right]\right), \\ p_{33} = \varrho \cdot \sin\beta \cdot \left(1 + q^2 \cdot \left[\dfrac{a + \varrho \cdot \cos\beta}{r + a + \varrho \cdot \cos\beta} \cdot \left(1 + \dfrac{a}{r}\right) - \dfrac{a}{\varrho} \cdot \ln \dfrac{r + \varrho + a \cdot \cos\beta}{a \cdot (1 + \cos\beta)}\right]\right), \\ p_{44} = 1 - q^2 \cdot \left(\dfrac{\varrho \cdot \cos\beta - a}{a} + \dfrac{a}{r}\right). \end{cases}$$

Die Komponenten $\mathfrak{F}_{\mu\nu}$ des Feldes gewinnt man aus dem Vierererpotential durch die Operation der vierdimensionalen Rotation,

welche darin besteht, daß man das Linienintegral des Vierervektors um den Umfang eines kleinen Flächenelements bildet:

$$\mathfrak{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{p_{\mu\mu} \cdot p_{\nu\nu}} \cdot \left(\frac{\partial (p_{\nu\nu} \cdot \varphi_\nu)}{\partial \xi_\mu} - \frac{\partial (p_{\mu\mu} \cdot \varphi_\mu)}{\partial \xi_\nu} \right).$$

Das magnetische Feld wird durch $\mathfrak{F}_{23}$, $\mathfrak{F}_{31}$, $\mathfrak{F}_{12}$ dargestellt, das elektrische durch $i \cdot \mathfrak{F}_{14}$, $i \cdot \mathfrak{F}_{24}$, $i \cdot \mathfrak{F}_{34}$. Wir nennen weiter die Komponenten des Viererstromes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Man gewinnt sie aus den $\mathfrak{F}_{\mu\nu}$ durch die Operation der Vierердivergenz, welche darin besteht, daß man das Oberflächenintegral des Sechservektors über die Begrenzung eines kleinen dreidimensionalen Volumenelementes bildet. Man bekommt so:

$$\sigma_i = \frac{1}{p_{hh} \cdot p_{kk} \cdot p_{ll}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi_h} (p_{kk} \cdot p_{ll} \cdot \mathfrak{F}_{kl}) + \frac{\partial}{\partial \xi_k} (p_{ll} \cdot p_{hh} \cdot \mathfrak{F}_{hl}) + \frac{\partial}{\partial \xi_l} (p_{hh} \cdot p_{kk} \cdot \mathfrak{F}_{ik}) \right),$$

wo i, h, k, l die Indizes 1, 2, 3, 4, entweder in dieser Reihenfolge oder nach einer geraden Zahl von Vertauschungen bedeuten.

In dem Koordinatensystem $(\varrho, \beta, \psi, i\tau)$ sind nun die drei ersten Komponenten des Viererstromes gleich Null, weil in diesem Koordinatensystem das Elektron ruht, und es ist $\sigma_4 = i \cdot \sigma$, wenn wir mit σ die räumliche Dichte der elektrischen Ladung bezeichnen. Ferner sind alle in den Gleichungen vorkommenden Größen p_{ii} von τ unabhängig und wir wollen in Analogie zu dem entsprechenden Problem der Elektrostatik auch die φ_i und die $\mathfrak{F}_{\mu\nu}$ als von τ unabhängig annehmen. Dann ergibt sich, genau wie bei dem entsprechenden Problem der Elektrostatik: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$. Wir setzen $\varphi_4 = i \cdot \varphi$, wo φ das skalare Potential des elektrischen Feldes in unserem nicht-minkowskischen Kontinuum ist. Setzen wir die Differentialausdrücke für $\mathfrak{F}_{14}, \mathfrak{F}_{24}, \mathfrak{F}_{34}$ in die vierte Komponente der Vierердivergenz ein, und setzen wir in dem leeren Raum in der Umgebung des Elektrons $\sigma = 0$, so bekommen wir für φ die folgende Differentialgleichung:

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{p_{22} \cdot p_{33}}{p_{11} \cdot p_{44}} \cdot \frac{\partial (p_{44} \cdot \varphi)}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{p_{33} \cdot p_{11}}{p_{22} \cdot p_{44}} \cdot \frac{\partial (p_{44} \cdot \varphi)}{\partial \xi_2} \right) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{p_{11} \cdot p_{22}}{p_{33} \cdot p_{44}} \cdot \frac{\partial (p_{44} \cdot \varphi)}{\partial \xi_3} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Die Lösung des Problems in der näheren und ferneren Umgebung.

14. Wir wollen die Gleichung (40) zuerst für die Umgebung des Elektrons lösen, die sich nur soweit erstreckt, daß auch das Glied $q^3 \cdot \varrho \cdot \cos\beta/a$ in p_{44} immer noch sehr klein ist. Dann können wir die linke Seite von (40) nach q^2 in eine schnell konvergierende Reihe entwickeln, die wir schon nach dem Glied mit q^2 abbrechen, so daß sie aus zwei Summanden besteht. Diese beiden Summanden setzen wir einzeln gleich Null. Wir führen folgende Abkürzung ein:

$$p_{44} \cdot \varphi = f, \tag{41}$$

$$f = f_0 + q^2 \cdot f_1 . \tag{42}$$

Dann lauten die beiden Gleichungen, in welche (40) zerfällt, wenn man (39), (41), (42) einführt und nach q^2 entwickelt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2 \cdot \sin\beta \cdot \dfrac{\partial f_0}{\partial \varrho}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(\sin\beta \cdot \dfrac{\partial f_0}{\partial \beta}\right) \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial \psi}\left(\dfrac{1}{\sin\beta} \cdot \dfrac{\partial f_0}{\partial \psi}\right) = 0 . \end{cases} \tag{43}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2 \cdot \sin\beta \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial \varrho}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(\sin\beta \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial \beta}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \psi}\left(\dfrac{1}{\sin\beta} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial \psi}\right) \\ \quad + \dfrac{\partial}{\partial \varrho}\left\{\varrho^2 \cdot \sin\beta \cdot \left(\dfrac{\varrho \cdot \cos\beta}{a} \right.\right. \\ \qquad \left.\left. + 2 \cdot \dfrac{a}{r} - 2 \cdot \dfrac{a}{\varrho} \ln \dfrac{r + \varrho + a \cdot \cos\beta}{a \cdot (1 + \cos\beta)}\right) \cdot \dfrac{\partial f_0}{\partial \varrho}\right\} \\ \quad + \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left\{\sin\beta \cdot \left(\dfrac{\varrho \cdot \cos\beta}{a} - 2 \cdot \dfrac{\varrho}{r} \cdot \dfrac{\varrho + a \cdot \cos\beta}{r + a + \varrho \cdot \cos\beta}\right) \cdot \dfrac{\partial f_0}{\partial \beta}\right\} \\ \quad + \dfrac{\partial}{\partial \psi}\left\{\dfrac{1}{\sin\beta} \cdot \left(\dfrac{\varrho \cdot \cos\beta}{a} - 2 \cdot \dfrac{\varrho \cdot \cos\beta}{r + a + \varrho \cdot \cos\beta}\right) \cdot \dfrac{\partial f_0}{\partial \psi}\right\} = 0 . \end{cases} \tag{44}$$

Diejenige Lösung der Gleichung (43), welche in der nahen Umgebung des Elektrons in die Lösung der gewöhnlichen Elektrostatik übergeht, ist:

$$f_0 = \frac{\varepsilon_1}{4\pi \cdot \varrho}, \tag{45}$$

wo ε_1 eine Größe bedeutet, die von der Ladung ε des Elektrons nur um Größen von der Ordnung q^2 verschieden ist. Setzen wir (45) in die Gleichung (44) ein, so bekommen wir die Differentialgleichung für f_1:

$$(46)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\sin\beta \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right) + \frac{1}{\sin^2\beta} \cdot \frac{\partial^2 f_1}{\partial \psi^2} \\ = \frac{e_1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{\varrho \cdot \cos\beta}{a} + 2 \cdot \frac{a}{r} - 2 \cdot \frac{a}{\varrho} \cdot \ln \frac{r + \varrho + a \cdot \cos\beta}{a \cdot (1 + \cos\beta)}\right). \end{cases}$$

Durch Einsetzen läßt sich nachweisen, daß der folgende Ausdruck die Lösung der Gleichung (46) darstellt:

$$(47)\quad f_1 = -\frac{e_1}{8\pi\varrho} \cdot \left(\frac{\varrho \cdot \cos\beta}{a} + 2 \cdot \frac{a}{r} - 2 \cdot \frac{a}{\varrho} \cdot \ln \frac{r + \varrho + a \cdot \cos\beta}{a \cdot (1 + \cos\beta)}\right) + u,$$

wo u eine Größe ist, welche die Laplacesche Differentialgleichung befriedigt:

$$(48)\quad \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\sin\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\sin\beta \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) + \frac{1}{\sin^2\beta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = 0.$$

Das erste Glied in dem Ausdruck für f_1 hat genau dieselben Singularitäten wie die rechte Seite von (46). Der Punkt $r = 0$ ist nämlich ein singulärer Punkt und für das fadenförmige Gebiet, welches auf S. 527 erwähnt worden ist, werden die Koordinaten ϱ, β, ψ unbrauchbar. Im Punkte $\varrho = 0$ wird das erste Glied von f_1 Null.

Die Funktion u ist so zu bestimmen, daß sie nur in $r = 0$ eine Singularität hat, ferner muß die Bedingung erfüllt werden, daß der Lösung f nur eine Ladung im Punkte $\varrho = 0$, zufolge der Singularität, die f_0 hier hat, aber keine Ladung im Punkte $r = 0$ entspricht.

Nach (39), (41), (42), (45), (47) ergibt sich schließlich für das skalare Potential φ der Ausdruck:

$$(49)\quad \begin{cases} \varphi = \frac{e^3}{4\pi \cdot \varrho} \cdot \left[1 + q^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\varrho \cdot \cos\beta}{a} - 1\right.\right. \\ \qquad \left.\left. + \frac{a}{\varrho} \cdot \ln \frac{r + \varrho + a \cdot \cos\beta}{a \cdot (1 + \cos\beta)}\right)\right] + q^2 \cdot u. \end{cases}$$

Hier sind die beiden unbestimmten Größen u und e_1 noch zu ermitteln.

15. Um die Funktion u zu gewinnen, wollen wir das elektrische Feld zuerst einmal in der Nähe des Punktes $r = 0$ untersuchen. Wir müssen zu dem Zweck den Ausdruck (49) auf vernunftgemäße Koordinaten umtransformieren, um nicht durch die mathematische Singularität der nicht-minkowskischen Geometrie gestört zu werden. Wir berechnen also das Potential in dem Koordinatensystem der x', y', z', t' und zwar nur für die Zeitpunkte, die unendlich nahe bei $t = 0$

liegen. Wir verwenden zur Transformation also die Formeln (37b) und (38). Da die t'-Achse in dem betrachteten Moment mit der τ-Achse des bisher verwendeten Koordinatensystems gleichgerichtet ist, so hat das Viererpotential auch in dem neuen Koordinatensystem nur eine zeitartige Komponente, die wir φ' nennen wollen. Während φ die Projektion des Vierervektors auf die Zeitachse im natürlichen Maß bedeutet, ist φ' die sog. „kovariante" Komponente des Vierervektors, d. h. φ' ist gleich der Projektion φ dividiert durch die Maßzahl der zeitlichen Strecken $\sqrt{r/r-a} = (1 + q^2 \cdot a/r)$. Wir haben also zu setzen:

$$\varphi' = \varphi \cdot \left(1 - q^2 \cdot \frac{a}{r}\right). \tag{50}$$

Bei der Ersetzung der natürlich gemessenen Längen und Winkel in φ' durch die vernunftgemäßen Größen, beachten wir, daß diese sich von jenen nur um Größen von der Ordnung q^2 unterscheiden. Wir brauchen demnach nur das von q^2 freie Glied zu korrigieren, und da dieses nur die Variable ϱ enthält, so brauchen wir nur die vernunftgemäße Länge des Radiusvektors auszurechnen, die wir ϱ' nennen wollen. Nach (38) und (36) haben wir:

$$\varrho' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \bar{\varrho} \cdot (1 + p \cdot \sin^2\beta \cdot q^2)$$
$$= \varrho \cdot \left[1 + q^2 \cdot \left(p \cdot \sin^2\beta - \frac{a}{\varrho} \cdot \ln \frac{r + \varrho + a \cdot \cos\beta}{a\,(1 + \cos\beta)}\right)\right],$$

wo:

$$p \cdot \sin^2\beta = \frac{a \cdot (r + a) \cdot \sin^2\beta}{r \cdot (r + a + \varrho \cdot \cos\beta)} = \frac{a}{r} \cdot \left(1 - \frac{r - a}{\varrho} \cdot \cos\beta\right).$$

Wir haben also einzusetzen:

$$\varrho' = \varrho \cdot \left\{1 + q^2 \cdot \left[\frac{a}{r} - \frac{a}{\varrho} \cdot \left(\frac{r - a}{r} \cdot \cos\beta + \ln \frac{r + \varrho + a \cdot \cos\beta}{a\,(1 + \cos\beta)}\right)\right]\right\} \tag{51}$$

und bekommen aus (49) und (50):

$$\varphi' = \frac{e_1}{4\pi\varrho'} \cdot \left[1 + q^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\,\frac{\varrho}{a} \cdot \cos\beta - \frac{a}{\varrho} \cdot \frac{r - a}{r} \cdot \cos\beta - 1\right)\right] + q^2 \cdot u. \tag{52}$$

Rechnen wir den Wert von φ' in der Nähe von $r = 0$ aus, indem wir setzen: $\varrho' = a$, $\cos\beta = -1$, so ergibt sich:

$$(\varphi')_{r \text{ sehr klein}} = \frac{e_1}{4\pi a} \cdot (1 - \tfrac{1}{2} q^2) - q^2 \cdot \frac{e_1}{4\pi r} + q^2 \cdot u.$$

Daraus folgt, weil im Punkte $r = 0$ keine elektrische Ladung sitzt:

$$u = \frac{e_1}{4\pi r} + u_1,$$

wo u_1 eine Funktion ist, die in $r = 0$ eine Singularität haben darf, da die Differentialgleichung des elektrischen Potentials für $r = 0$ divergent wird, jedoch nur von der Art eines Dipols oder Quadrupols, die keine freien Ladungen haben.

Wir setzen den Wert von u zunächst in das Potential φ im natürlichen Maß (49) ein und bekommen:

$$\varphi = \frac{e_1}{4\pi\varrho} \cdot \left[1 + q^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\,\frac{\varrho \cdot \cos\beta}{a} + \frac{a}{\varrho} \cdot \ln \frac{r + \varrho + a \cdot \cos\beta}{a \cdot (1 + \cos\varrho)} - 1\right)\right] + q^2 \cdot \frac{e_1}{4\pi r} + q^2 \cdot u_1 .$$

Um u_1 zu bestimmen, rechnen wir das elektrische Feld in der unmittelbaren Nachbarschaft des Elektrons aus. Wir entwickeln die rechte Seite von φ nach Potenzen von ϱ/a und hören bei dem Glied von der Ordnung ϱ^2/a^2 auf.

$$(\varphi)_{\varrho \text{ sehr klein}} = \frac{e_1}{4\pi\varrho} \cdot \left[1 + q^2 \cdot \left(\frac{\varrho}{a} - \frac{\varrho^2}{a^2}\left(\frac{1}{6} + \cos\beta - \frac{1}{2}\cos^2\beta\right)\right)\right] + q^2 \cdot u_1$$

eine ähnliche Näherungsrechnung für p_{44} [nach (89)] ergibt:

$$(p_{44})_{\varrho \text{ sehr klein}} = 1 + q^2 \cdot \frac{\varrho^2}{a^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cos^2\beta\right)$$

und man bekommt nun für die Feldstärke $\mathfrak{e}$ die beiden Komponenten:

$$\mathfrak{e}_\varrho = -\frac{1}{p_{44}} \cdot \frac{\partial (p_{44} \cdot \varphi)}{\partial \varrho}, \qquad \mathfrak{e}_\beta = -\frac{1}{p_{33} \cdot p_{44}} \cdot \frac{\partial (p_{44} \cdot \varphi)}{\partial \beta}$$

in der Nachbarschaft des Elektrons:

$$\mathfrak{e}_\varrho = \frac{e_1}{4\pi\varrho^2} - q^2 \cdot \frac{e_1}{4\pi a^2} \cdot \left(\frac{1}{6} - \cos\beta - \frac{1}{2} \cdot \cos^2\beta\right) - q^2 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \varrho},$$

$$\mathfrak{e}_\beta = -q^2 \cdot \frac{e_1}{4\pi a^2} \cdot (1 + 2 \cdot \cos\beta) \cdot \sin\beta - q^2 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \beta}.$$

In diesen Formeln sind die beiden Glieder:

$$\text{in } \mathfrak{e}_\varrho: \quad q^2 \cdot \frac{e_1}{4\pi a^2} \cdot \cos\beta,$$

$$\text{in } \mathfrak{e}_\beta: \quad -q^2 \cdot \frac{e_1}{4\pi a^2} \cdot \sin\beta$$

sehr auffallend. Denn während die anderen Summanden ein Feld ergeben, welches zentrisch symmetrisch ist, liefern diese beiden ein konstantes Feld von der Größe $q^2 \cdot e_1/4\pi a^2$ in der Richtung der Achse CO. Da diese Achse sich in dem $(\varrho, \beta, \varphi, \tau)$-Koordinatensystem mit der Winkelgeschwindigkeit q/a dreht, so befindet sich das Elektron in einem konstanten Drehfeld. Es muß nach und nach in eine Bewegung relativ zu einem Punkt kommen, dessen Weltlinie eine geodätische Linie ist, und wir haben es also nicht mehr mit dem Problem zu tun, wo das Elektron im Einsteinschen Coupé ruht, umgeben nur von seinem eigenen zentrisch symmetrischen Feld. Um dieses eigentümliche Ergebnis zu verstehen, müssen wir bedenken, daß man die Existenz eines von 1 verschiedenen Gravitationspotentials im Äther auch so auffassen kann, als ob der Äther eine von 1 verschiedene Dielektrizität und Permeabilität angenommen habe. Allerdings ist sein Verhalten ziemlich kompliziert, da er sich entsprechend der Tensornatur des Gravitationspotentials dielektrisch und magnetisch anisotrop verhält. Aber immer läßt sich der Einfluß der Inkonstanz seiner Dielektrizität auf die elektrischen Felder genau wie in irgendeinem anderen Dielektrikum mit Hilfe von freien Ladungen beschreiben, die in ihm influenziert werden. In unserem Falle ist der Äther als Kugel mit dem Zentrum C aufzufassen, in welcher die Dielektrizität in einer konzentrischen Schale überall denselben Wert hat, sich aber von Schale zu Schale ändert. Das Elektron influenziert in dem Dielektrikum von dieser schaligen Struktur freie Ladungen. Das Feld, das die freien Ladungen hervorrufen, ist symmetrisch zur CO-Achse und dreht sich mit ihr um C, an dem Ort des Elektrons hat es also gerade die Richtung CO. Wenn wir vorübergehend $u_1 = 0$ setzen, so hat φ im Punkte C keine Singularität. Das heißt nichts anderes, als daß das von uns gefundene Drehfeld von der Stärke $q^2 \cdot e_1/4\pi a^2$ durch die *in dem leeren Raum* um das Gravitationszentrum herum influenzierten Ladungen allein hervorgerufen wird. Die materielle Kugel, welche das Gravitationsfeld verursacht, haben wir in unserer Rechnung vorübergehend mit der Singularität in C zugleich gewissermaßen aus dem Raum herausgestochen. Nehmen wir die Kugel nun dazu, so müssen wir die in ihr influenzierten Ladungen in bekannter Weise durch einen elektrischen Dipol in C, der sich mit dem

Elektron zugleich dreht, in Rechnung setzen. Wenn wir speziell das Feld eines im Einsteinschen Coupé ruhenden Elektrons berechnen wollen, so müssen wir allerdings diesem Dipol eine ganz bestimmte Größe vorschreiben. Denn in diesem Falle muß das zu CO parallele Drehfeld ganz wegfallen. Dazu muß man den Dipol im Gravitationszentrum als so groß annehmen, daß sein Feld das Feld der im Raume influenzierten Ladungen gerade aufhebt. Wir setzen demgemäß das elektrische Moment des Dipols gleich $-q^2 \cdot e_1 \cdot a/2$, also sein Potential im Punkte r, η, χ oder ϱ, β, ψ:

$$q^2 \cdot u_1 = -\frac{1}{2} q^2 \cdot \frac{e_1 a}{4\pi r^2} \cdot \cos\eta = -\frac{1}{2} q^2 \cdot \frac{e_1 \cdot a \cdot (a + \varrho \cdot \cos\beta)}{4\pi \cdot r^3}.$$

Für kleine Werte von ϱ sind die beiden Komponenten seines Feldes nach ϱ und β:

$$-q^2 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \varrho} = -q^2 \cdot \frac{e_1}{4\pi a^2} \cdot \cos\beta,$$

$$-q^2 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \beta} = +q^2 \cdot \frac{e_1}{4\pi a^2} \sin\beta.$$

Das Feld des Dipols hebt also das Drehfeld $q^2 \cdot e_1/4\pi a^2$ gerade auf. Wir setzen demnach:

$$u = \frac{e_1}{4\pi r} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a \cdot (a + \varrho \cdot \cos\beta)}{r^2}\right) \tag{53}$$

und bekommen für das Potential im natürlichen Maß:

$$\varphi = \frac{e_1}{4\pi\varrho} \cdot \left[1 + q^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{\varrho \cdot \cos\beta}{a} + \frac{a}{\varrho} \cdot \ln \frac{r + \varrho + a \cdot \cos\beta}{a \cdot (1 + \cos\beta)} - 1\right)\right]$$
$$+ q^2 \cdot \frac{e_1}{4\pi r} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot (a + \varrho \cdot \cos\beta)}{r^2}\right).$$

Um endlich noch e_1 zu bestimmen, rechnen wir das Feld für sehr große Werte von ϱ aus, indem wir in dem Korrektionsglied mit q^2 alle Größen von der Ordnung a/r an weglassen. Wir bekommen:

$$(\varphi)_{\varrho \text{ sehr groß}} = \frac{e_1}{4\pi\varrho} \cdot \left(1 + q^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\varrho}{a} \cdot \cos\beta\right),$$

$$(p_{44})_{\varrho \text{ sehr groß}} = 1 - q^2 \cdot \left(\frac{\varrho}{a} \cdot \cos\beta - 1\right).$$

Unter der Annahme, daß $q^2 \cdot \varrho/a$ immer noch sehr klein ist, bekommen wir:

$$\varepsilon = \frac{e_1}{4\pi\varrho^2} \cdot \left(1 + q^2 \cdot \frac{\varrho}{a} \cdot \cos\beta\right).$$

Und das Oberflächenintegral von $\mathfrak{e}$ über eine Kugel vom sehr großen Radius ϱ liefert mit Rücksicht auf den auf S. 529 bewiesenen Satz:

$$2\pi \cdot \bar{\varrho}^2 \cdot \int_0^{\pi} \mathfrak{e}_\varrho \cdot \sin\bar{\beta} \cdot d\bar{\beta} = e_1 .$$

Da nun aber dieses Oberflächenintegral die Ladung des Elektrons e darstellt, so haben wir, bis auf Größen von höherer Ordnung als q^2 genau:

$$e_1 = e . \tag{54}$$

In dem durch natürliche Messungen definierten Kugelzylinder-Koordinatensystem, dessen Achse die Weltlinie des um das Gravitationszentrum umlaufenden Elektrons ist, läßt sich das elektrische Feld aus einem elektrostatischen Potential φ berechnen:

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{e}{4\pi\varrho} \cdot \left[1 + q^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\varrho\cdot\cos\beta}{a} + \dfrac{a}{\varrho} \cdot \ln \dfrac{r+\varrho+a\cdot\cos\beta}{a\cdot(1+\cos\beta)} - 1\right)\right] \\ \qquad + q^2 \cdot \dfrac{e}{4\pi\cdot r} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{a\cdot(a+\varrho\cdot\cos\beta)}{r^2}\right). \end{cases} \tag{55}$$

Zur Berechnung des elektrischen Feldes in dem nicht-minkowskischen Kontinuum dienen die Formeln:

$$\begin{cases} \mathfrak{e}_\varrho = -\left[1 + q^2\left(\dfrac{\varrho\cdot\cos\beta}{a} - 1 + \dfrac{a}{r}\right)\right] \\ \qquad \cdot \dfrac{\partial}{\partial\varrho}\left[1 - q^2\cdot\left(\dfrac{\varrho\cdot\cos\beta}{a} - 1 + \dfrac{a}{r}\right)\right]\cdot\varphi , \\ \mathfrak{e}_\beta = -\dfrac{1}{\varrho}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\beta}\left[1 - q^2\cdot\left(\dfrac{\varrho\cdot\cos\beta}{a} - 1 + \dfrac{a}{r}\right)\right]\cdot\varphi . \end{cases} \tag{56}$$

In der unmittelbaren Nähe des Elektrons gilt, wenn man die Glieder von höherer Ordnung als ϱ^2/a^2 streicht:

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{e}{4\pi\varrho} + \dfrac{1}{2}q^2\cdot\dfrac{e}{4\pi a}\cdot\left[1 - \dfrac{\varrho}{a}\cdot\left(\dfrac{1}{3} - \cos^2\beta\right)\right], \\ p_{44} = 1 + \dfrac{1}{2}q^2\cdot\dfrac{\varrho^2}{a^2}\cdot(1 - 3\cdot\cos^2\beta), \\ \mathfrak{e}_\varrho = \dfrac{e}{4\pi\varrho^2}\cdot\left[1 - q^2\cdot\dfrac{\varrho^2}{a^2}\cdot\left(\dfrac{5}{6} - \dfrac{5}{2}\cdot\cos^2\beta\right)\right], \\ \mathfrak{e}_\beta = -q^2\cdot\dfrac{e}{4\pi a^2}\cdot 2\cdot\cos\beta\sin\beta . \end{cases} \tag{57}$$

Die Abweichung von dem Wert in der minkowskischen Geometrie, die sich in den Gliedern mit q^2 bemerkbar macht,

wird also, wenn man sie mit dem Werte ε_0 vergleicht, von der Ordnung $q^2 \cdot \varrho^2/a^2$ unendlich klein. Das Feld ist um das Elektron herum zentrisch symmetrisch.

16. Wir wollen die gefundene Lösung nun in ein vernunftgemäßes Koordinatensystem umrechnen. Wir gehen aus von dem Wert des skalaren Potentials φ' in dem (x', y', z', t')-Koordinatensystem, den wir auf S. 533 in Formel (52) dargestellt haben. Setzen wir hier den Wert für u nach (53) ein, so bekommen wir:

$$\varphi' = \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \left[1 + q^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\,\frac{\varrho'}{a} \cdot \cos\beta' - \frac{a}{\varrho'} \cdot \frac{r-a}{r} \cdot \cos\beta' - 1\right)\right] + q^2 \cdot \frac{e}{4\pi r} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{(a \cdot (a + \varrho' \cdot \cos\beta')}{r^2}\right).$$

Dies ist der Wert des elektrischen Potentials für Zeiten, die von $t = 0$ nur sehr wenig verschieden sind, in dem (x', y', z', t')-Koordinatensystem. Dieses System ist nicht kartesisch und man kann mit ihm nicht ohne weiteres rechnen. Um Formeln zu gewinnen, die man unmittelbar zum Rechnen brauchen kann, transformieren wir auf die durch (35) definierten kartesischen (x, y, z, t)-Koordinaten. Wie wir auf S. 526 gesehen haben, können wir dazu in der Nähe des Moments $t = 0$ die Lorentztransformation (37b) benutzen.

Die Komponenten des Viererpotentials in dem (x, y, z, t)-Koordinatensystem mögen f_x, f_y, f_z, $i \cdot f$ genannt werden. Dann ist im Moment $t = 0$:

$$f = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-q^2}}, \quad f_x = 0, \quad f_y = 0, \quad f_z = \frac{q \cdot \varphi'}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Da der Anfangspunkt der Zeit willkürlich ist und das Feld in bezug auf die durch (37a) definierten $(\bar{y}, \bar{z})$-Koordinaten, welche zur Zeit $t = 0$ mit den (y, z)-Koordinaten identisch sind, in jedem Augenblick genau dasselbe ist, so gelten die eben hingeschriebenen Formeln für das Viererpotential in dem $(x, \bar{y}, \bar{z}, t)$-Koordinatensystem zu allen Zeiten. Transformieren wir von diesem System in das (x, y, z, t)-System um, so bekommen wir:

$$f = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-q^2}}, \quad f_x = 0, \quad f_y = -\frac{q \cdot \varphi'}{\sqrt{1-q^2}} \cdot \sin\frac{q\,t}{a}, \quad f_z = +\frac{q \cdot \varphi'}{\sqrt{1-q^2}} \cdot \cos\frac{q\,t}{a}.$$

In dem kartesischen Koordinatensystem, dessen Zeitachse die Weltlinie des Gravitationszentrums, dessen x-Achse die Normale zur Bahnebene des Elektrons im Gravitationszentrum, dessen y-Achse der Radiusvektor des Elektrons im Moment $t = 0$ ist, und dessen z-Achse in ihrer positiven Richtung die Richtung der Bewegung des Elektrons im Moment $t = 0$ angibt, wird das elektromagnetische Viererpotential innerhalb der Fehlergrenzen, mit denen wir hier rechnen, durch folgende Formeln dargestellt:

$$(58)\quad \begin{cases} f = \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \left[1 + q^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\,\frac{\varrho'}{a} \cdot \cos\beta' - \frac{a}{\varrho'} \cdot \frac{r-a}{r} \cdot \cos\beta' - \frac{1}{2}\right)\right] \\ \qquad\qquad + q^2 \cdot \frac{e}{4\pi r} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{a(a+\varrho'\cdot\cos\beta')}{r^2}\right), \\ f_x = 0, \quad f_y = -q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \sin\frac{q\cdot t}{a}, \quad f_z = +q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \cos\frac{q\,t}{a}. \end{cases}$$

Hier ist:

e die Ladung des Elektrons,
a der Radius seiner Kreisbahn,
q seine Geschwindigkeit,

ferner:

$$(59)\quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \varrho' = \sqrt{x^2 + (\bar{y} - a)^2 + \frac{\bar{z}^2}{1 - q^2}}, \\ \cos\beta' = \frac{\bar{y} - a}{\varrho'}, \end{cases}$$

wo:

$$(60)\quad \begin{cases} \bar{y} = y \cdot \cos\frac{q\cdot t}{a} + z \cdot \sin\frac{q\cdot t}{a}, \\ \bar{z} = -\,y \cdot \sin\frac{q\cdot t}{a} + z \cdot \cos\frac{q\cdot t}{a}. \end{cases}$$

Es wäre eine verlockende Aufgabe, mit Hilfe der Formeln (58), (59), (60) das elektrische Feld in der Nähe des elektrisch geladenen Kügelchens genauer zu untersuchen, und man würde dabei vielleicht manche für das tiefere Verständnis der Einsteinschen Theorie wichtigen Einzelheiten bemerken können. Wenn man das Gravitationspotential, wie wir es auf S. 585 getan haben, als eine Größe auffaßt, welche eine Änderung der Dielektrizität und der Permeabilität im reinen Äther anzeigt, so stellen unsere Formeln dar, wie sich das elektrische Feld eines

gelagenen Kügelchens in dem inhomogenen Dielektrikum verhält, welches der Äther im Gravitationsfeld ist. Insbesondere kann man die im Äther influenzierten freien Ladungen berechnen, ihre räumliche Dichte beträgt $\operatorname{div} \mathfrak{e}$. Ich will hierauf aber im einzelnen nicht eingehen. Nur soviel sei bemerkt, daß die freie Ladung des Elektrons, die man bekommt, wenn man das Oberflächenintegral von $\mathfrak{e}_\varrho$ über eine das Elektron in allernächster Nähe umschließende Kugelfläche bildet, nicht gleich e, sondern gleich $e \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot q^2)$ ist. Die Vergrößerung der Dielektrizitätskonstante, welche durch das Gravitationspotential beschrieben wird, bringt also eine Verkleinerung der „freien Ladung" des Elektrons mit sich, ganz so, wie es in irgendeinem anderen Dielektrikum, dessen Dielektrizitätskonstante größer als 1 ist, auch der Fall wäre. Aus diesem Grunde habe ich auf S. 537, um die wahre Ladung des Elektrons zu finden, das Oberflächenintegral der elektrischen Feldstärke über eine Kugelfläche von sehr großem Radius gebildet, die in einem Gebiet liegt, wo die Dielektrizitätskonstante schon wieder den Wert 1 hat.

Das Feld in großer Entfernung vom Elektron.

17. In großen Entfernungen vereinfachen sich die Formeln ganz außerordentlich. Wir streichen hier in den Korrektionsgliedern mit dem Faktor q^2 alle Größen von der Ordnung a/r an. Man bekommt dann:

$$(61)\quad \begin{cases} f = \dfrac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2} q^2 \cdot \dfrac{\bar{y}}{a}\right), \quad f_x = 0, \\ f_y = -q \cdot \dfrac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \sin\dfrac{q \cdot t}{a}, \qquad f_z = q \cdot \dfrac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \cos\dfrac{q\,t}{a}, \end{cases}$$

wo ϱ' und $\bar{y}$ in (59) und (60) definiert sind. Man bekommt daraus die Feldstärken:

$$\mathfrak{e}_x = -\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \mathfrak{e}_y = -\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial t}, \qquad \mathfrak{e}_z = -\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial t},$$

$$\mathfrak{h}_x = \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \qquad \mathfrak{h}_y = -\frac{\partial f_z}{\partial x}, \qquad \mathfrak{h}_z = \frac{\partial f_y}{\partial x}.$$

Rechnet man die Komponenten in der Bahnebene nach $\bar{y}$ und $\bar{z}$, anstatt nach y und z, so hat man zu setzen:

$$e_y = e_y \cdot \cos\frac{q\,t}{a} + e_z \cdot \sin\frac{q\,t}{a}, \quad e_z = -e_y \cdot \sin\frac{q\,t}{a} + e_z \cdot \cos\frac{q\,t}{a},$$

$$\mathfrak{h}_y = \mathfrak{h}_y \cdot \cos\frac{q\,t}{a} + \mathfrak{h}_z \cdot \sin\frac{q\,t}{a}, \quad \mathfrak{h}_z = -\mathfrak{h}_y \cdot \sin\frac{q\,t}{a} + \mathfrak{h}_z \cdot \cos\frac{q\,t}{a}.$$

Die Rechnung ergibt:

$$(62)\quad \begin{cases} e_x = \frac{e}{4\pi\varrho'^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}q^2 \cdot \frac{\bar{y}}{a}\right) \cdot \frac{x}{\varrho'}, \\ e_y = \frac{e}{4\pi\varrho'^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}q^2 \cdot \frac{\bar{y}}{a}\right) \cdot \frac{\bar{y}-a}{\varrho'} + q^2 \cdot \frac{e}{8\pi\varrho' \cdot a}, \\ e_z = \frac{e}{4\pi\varrho'^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}q^2 \cdot \frac{\bar{y}}{a}\right) \cdot \frac{\bar{z}}{\varrho'}, \\ \mathfrak{h}_x = -q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'^3} \cdot \frac{\bar{y}-a}{\varrho'}, \quad \mathfrak{h}_y = +q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'^3} \cdot \frac{x}{\varrho'}, \quad \mathfrak{h}_z = 0, \\ \varrho' = \sqrt{x^2 + (\bar{y}-a)^2 + \frac{\bar{z}^2}{1-q^2}}, \\ \bar{y} = y \cdot \cos\frac{q\,t}{a} + z \cdot \sin\frac{q\,t}{a}, \\ \bar{z} = -y \cdot \sin\frac{q\,t}{a} + z \cdot \cos\frac{q\,t}{a}. \end{cases}$$

In den Formeln (62) sind diejenigen Glieder von besonderem Interesse, welche in ϱ' von der Ordnung ϱ'^{-1} sind, nämlich:

$$q^2 \cdot \frac{e}{8\pi\varrho'^3} \cdot \frac{y}{a} \cdot \frac{x}{\varrho'}, \quad q^2 \cdot \frac{e}{8\pi\varrho'^3} \cdot \frac{y}{a} \cdot \frac{y-a}{\varrho'}, \quad q^2 \cdot \frac{e}{8\pi\varrho'^3} \cdot \frac{y}{a} \cdot \frac{z}{\varrho'},$$

und außerdem in der y-Komponente noch:

$$q^2 \cdot \frac{e}{8\pi\varrho' \cdot a}.$$

Durch diese Glieder unterscheidet sich das durch (62) dargestellte Feld wesentlich von dem Feld eines gleichförmig auf gerader Bahn bewegten Elektrons. Sie rühren von dem Glied $2\,q^2 \cdot \varrho \cdot \cos\beta/a$ in γ_{44} (Formel 34) her, auf welches wir schon oben aufmerksam gemacht haben.

18. Wenn wir die Lösung (62) in die unendlich fernen Gebiete fortsetzen wollen, so müssen wir besonders auf die Glieder achten, auf die soeben hingewiesen ist. Wir sehen von vornherein, daß wir es in den unendlich fernen Gebieten nicht mit einem statischen Problem, sondern mit einem Schwingungsproblem zu tun haben werden.

Da in den Entfernungen, wo man in den Korrektionsgliedern die Größe a/r streichen kann, die Geometrie auch bei natürlichen Messungen minkowskisch ist, so müssen die Ausdrücke (62) notwendigerweise eine Lösung der gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen darstellen. Wir wollen zeigen, daß wir sie bekommen, wenn wir das Feld eines rotierenden Elektrons nach der Methode des retardierten Potentials von Liénard und Wiechert berechnen.[1]) Wir wollen den Vierervektor des retardierten Potentials mit $f_x^1, f_y^1, f_z^1, i \cdot f_1$ bezeichnen. Dann ist:

$$(63)\quad \begin{cases} f_1 = \dfrac{e}{4\pi(\varrho_1 - q \cdot z_1)}, \\ f_x^1 = 0, \quad f_y^1 = -q \cdot f_1 \cdot \sin\varphi_1, \quad f_z^1 = +q \cdot f_1 \cdot \cos\varphi_1, \end{cases}$$

wo ϱ_1 die Lösung der folgenden transzendenten Gleichung ist:

$$(64)\quad \begin{cases} \varrho_1^2 = x^2 + (y_1 - a)^2 + z_1^2, \\ y_1 = y \cdot \cos\varphi_1 + z \cdot \sin\varphi_1, \\ z_1 = -y \cdot \sin\varphi_1 + z \cdot \cos\varphi_1, \\ \varphi_1 = \dfrac{q}{a} \cdot (t - \varrho_1). \end{cases}$$

Das Koordinatensystem der y_1, z_1 unterscheidet sich also von dem der $\bar{y}, \bar{z}$ [vgl. (60)] dadurch, daß statt der Winkelgröße $q \cdot t/a$ die Größe $q\,(t - \varrho_1)/a$ eingeführt worden ist. Die (y_1, z_1)-Achsen rotieren, ähnlich wie die $(\bar{y}, \bar{z})$-Achsen, mit dem Elektron um das Gravitationszentrum C, aber so, daß y_1 der Radiusvektor des Elektrons in demjenigen Moment $t - \varrho_1$ ist, in welchem eine elektrische Erregung von dem Elektron ausgehen muß, um gerade zur Zeit t in dem betrachteten Punkt (x, y, z) anzukommen. Bezeichnen wir die Entfernung dieses Punktes vom Gravitationszentrum, wie schon immer, mit r, so ist:

$$(65)\quad \varrho_1^2 = r^2 + a^2 - 2a \cdot y_1 = r^2 + a^2 - 2a\,(y \cdot \cos\varphi_1 + z \cdot \sin\varphi_1).$$

Wir diskutieren nun die beiden extremen Fälle:

1. a/r sehr klein: die unendliche Ferne,
2. a/r groß gegen q: weitere Umgebung des Elektrons.

---

1) M. Abraham, Theorie der Elektrizität II. S. 86. Formel (69) in der vierten Auflage. B. G. Teubner, Leipzig 1920.

Im Falle der unendlichen Ferne begnügen wir uns mit einer rohen Näherung, wir setzen:

$$\varrho_1 = r \qquad \text{und} \qquad f_1 = \frac{e}{4\pi r} \cdot \left(1 + q \cdot \frac{z_1}{r}\right).$$

Ferner wollen wir zu dem schon früher benutzten Polarkoordinatensystem der (r, ϑ, φ) zurückkehren. Man sieht aus Fig. 2 und 3, wenn man den Anfangsmeridian durch die y-Achse gehen läßt, daß die Richtungskosinusse der z_1-Richtung in dem (r, ϑ, φ)-Koordinatensystem sind:

$$\sin\vartheta \cdot \sin(\varphi - \varphi_1), \quad -\cos\vartheta \cdot \sin(\varphi - \varphi_1), \quad \cos(\varphi - \varphi_1).$$

Setzt man hier $\varphi_1 = q \cdot (t - r)/a$ ein, so bekommt man:

$$(66) \quad \begin{cases} f_1 = \frac{e}{4\pi r} + \frac{e}{4\pi r} \cdot q \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\left(\varphi - \frac{q}{a}(t-r)\right), \\ f_r^1 = q \cdot \frac{e}{4\pi r} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\left(\varphi - \frac{q}{a}(t-r)\right), \\ f_\vartheta^1 = -q \cdot \frac{e}{4\pi r} \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\left(\varphi - \frac{q}{a}(t-r)\right), \\ f_\varphi^1 = q \cdot \frac{e}{4\pi r} \cdot \cos\left(\varphi - \frac{q}{a}(t-r)\right). \end{cases}$$

Mit Rücksicht darauf, daß r sehr groß ist, berechnet sich aus (66) das Feld:

$$(67a) \quad \begin{cases} \mathfrak{e}_r = \frac{e}{4\pi r^2}, \\ \mathfrak{e}_\vartheta = -q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \cos\left(\varphi - \frac{q}{a}(t-r)\right)}{r}, \\ \mathfrak{e}_\varphi = -q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{\sin\left(\varphi - \frac{q}{a}(t-r)\right)}{r}, \end{cases}$$

$$(67b) \quad \begin{cases} \mathfrak{h}_r = 0, \\ \mathfrak{h}_\vartheta = +q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{\sin\left(\varphi - \frac{q}{a}(t-r)\right)}{r}, \\ \mathfrak{h}_\varphi = -q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \cos\left(\varphi - \frac{q}{a}(t-r)\right)}{r}. \end{cases}$$

Außer dem elektrostatischen Feld des Elektrons, das in unserer Näherung ($\varrho' = r$) gleich $e/4\pi r^2$ ist, hat sich also eine

Kugelwelle ergeben. Nach dem Poyntingschen Satz berechnet sich der Energiestrom dieser Welle als $\mathfrak{e}_\vartheta \cdot \mathfrak{h}_\varphi - \mathfrak{e}_\varphi \cdot \mathfrak{h}_\vartheta$. Integrieren wir über die ganze Kugelfläche vom Radius r und über die Zeitdauer 1, so bekommen wir die in der Zeiteinheit ausgestrahlte Energie:

$$U = \frac{1}{3} q^4 \cdot \frac{e^2}{a \cdot a^2} \cdot \tag{68}$$

Wir kommen nun zu dem extrem entgegengesetzten Fall: $q \cdot \varrho_1 / a$ sehr klein. Entwickeln wir y_1 und z_1 nach Potenzen dieser kleinen Größe, so ergibt sich:

$$\begin{cases} y_1 = \bar{y} - \frac{q}{a} \cdot \varrho_1 \cdot \bar{z} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{a^2} \cdot \varrho_1^2 \cdot \bar{y} + \frac{1}{6} \cdot \frac{q^3}{a^3} \cdot \varrho_1^3 \cdot \bar{z}, \\ z_1 = \bar{z} + \frac{q}{a} \cdot \varrho_1 \cdot \bar{y} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{a^2} \cdot \varrho_1^2 \cdot \bar{z} - \frac{1}{6} \cdot \frac{q^3}{a^3} \cdot \varrho_1^3 \cdot \bar{y}, \end{cases} \tag{69}$$

wo $\bar{y}$ und $\bar{z}$ die durch (60) definierten Größen sind. Daraus folgt weiter:

$$\varrho_1 - q \cdot z_1 = \bar{\varrho} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} q^2 \cdot \frac{\bar{y}}{a} + \frac{1}{2} q^2 \cdot \frac{\bar{x}^2}{\bar{\varrho}^2} + \frac{1}{3} q^3 \cdot \frac{\bar{\varrho} \cdot \bar{z}}{a^3}\right),$$

wo vorübergehend gesetzt ist:

$$\sqrt{x^2 + (\bar{y} - a)^2 + \bar{z}^2} = \bar{\varrho},$$

oder, da:

$$\bar{\varrho} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} q^2 \cdot \frac{\bar{x}^2}{\bar{\varrho}^2}\right) = \sqrt{x^2 + (\bar{y} - a)^2 + \frac{\bar{x}^2}{1 - q^2}} = \varrho',$$

$$\varrho_1 - q \cdot z_1 = \varrho' \cdot \left(1 - \frac{1}{2} q^2 \cdot \frac{\bar{y}}{a} + \frac{1}{3} q^3 \cdot \frac{\varrho' \cdot \bar{z}}{a^3}\right), \tag{70}$$

wo ϱ' die durch (59) definierte Größe ist. Setzen wir dies in (68) ein und außerdem

$$\begin{cases} \sin \varphi_1 = \sin \frac{q \cdot t}{a} - \frac{q \cdot \varrho'}{a} \cdot \cos \frac{q \cdot t}{a}, \\ \cos \varphi_1 = \cos \frac{q \cdot t}{a} + \frac{q \cdot \varrho'}{a} \cdot \sin \frac{q \cdot t}{a}, \end{cases} \tag{71}$$

wo wir gleich die Glieder von der Ordnung q^2 an weggelassen haben, so erhalten wir:

$$
(72)\quad \begin{cases} f_t = \dfrac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2}\, q^2 \cdot \dfrac{\bar{y}}{a} - \dfrac{1}{3}\, q^2 \cdot \dfrac{\varrho' \cdot \bar{z}}{a^2}\right), \\ f_x^1 = 0, \\ f_y^1 = -\dfrac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \left(q \cdot \sin\dfrac{qt}{a} - q^2 \cdot \dfrac{\varrho'}{a} \cdot \cos\dfrac{qt}{a}\right), \\ f_z^1 = +\dfrac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \left(q \cdot \cos\dfrac{qt}{a} + q^2 \cdot \dfrac{\varrho'}{a} \cdot \sin\dfrac{qt}{a}\right), \\ \varrho' = \sqrt{x^2 + (\bar{y} - a)^2 + \dfrac{\bar{z}^2}{1 - q^2}}, \\ \bar{y} = y \cdot \cos\dfrac{qt}{a} + z \cdot \sin\dfrac{qt}{a}, \\ \bar{z} = -y \cdot \sin\dfrac{qt}{a} + z \cdot \cos\dfrac{qt}{a}. \end{cases}
$$

Vergleichen wir (72) mit (61), so bemerken wir einen auffallenden Unterschied. Würde man die Entwicklung von f nach Potenzen von q fortsetzen, so würde man nur gerade Potenzen bekommen, nach q^2 käme also q^4 usf. In derselben Weise würde man in den Entwicklungen von f_y und f_z nur ungerade Potenzen von q finden, die nächste Potenz nach q wäre also q^3. Dagegen steht in der Entwicklung (72) für f_t ein Term mit q^2 und in den Entwicklungen für f_y^1 und f_z^1 je ein Term mit q^2. Dieser Unterschied hängt eng damit zusammen, daß die Lösung f_t der Maxwellschen Gleichungen eine Energieausstrahlung vom Elektron involviert, daß dagegen f eine Lösung für ein im Gravitationsfeld strahlungsfrei umlaufendes Elektron bedeutet. Daß das Elektron bei der Lösung f strahlungsfrei umläuft, geht daraus hervor, daß das elektrische Feld zufolge (57) in der unmittelbaren Umgebung des Elektrons zentrisch symmetrisch ist. Demzufolge ist es ausgeschlossen, daß das Elektron bei seinem Umlauf Energie verliert, also kann auch keine Energie als Strahlung weggehen. Das Glied mit q^2 in Formel (72) bringt eine Komponente in das elektrische Feld hinein, welche das Elektron fortwährend bremst und ihm so die zu Strahlung nötige Energie entzieht.

19. Die Lösung f_t ist also mit der vorher diskutierten Lösung f noch nicht identisch. Wir suchen nun ein zweites Integral f_{II} der Maxwellschen Gleichungen, welches die Energiestrahlung aufhebt, wenn es zu f_t hinzuaddiert wird.

Dieses Integral f_{II} bekommen wir, wenn wir das Vor-

zeichen von t und das Vorzeichen von allen zeitartigen Größen, beispielsweise von der zeitartigen Komponente f des Vierer-potentials, umkehren. Dann stellt f_{II} Kugelwellen dar, die nicht wie f_I von dem rotierenden Elektron weg in die Unendlichkeit hinausstrahlen, sondern die umgekehrt aus dem Unendlichen herbeieilen, von dem Elektron bei seinen Unläufen absorbiert werden und so seine Bewegung nach und nach beschleunigen. Damit Ladung und Bewegung des Elektrons dieselben bleiben, wie im Falle von f_I, muß man zugleich mit t auch den beiden Größen e und q das umgekehrte Vorzeichen geben, dann bleiben schließlich die Vorzeichen von allen vier Komponenten des Vierer-potentials ungeändert.

Demnach finden wir aus (63) und (64) für f_{II} den folgenden Ausdruck:

$$(73)\quad \begin{cases} f_{II} = \dfrac{e}{4\pi(\varrho_{II} + q \cdot x_{II})}, \\ f_x^{II} = 0, \quad f_y^{II} = -q \cdot f_{II} \cdot \sin\varphi_{II}, \quad f_z^{II} = +q \cdot f_{II} \cdot \cos\varphi_{II}, \end{cases}$$

wo:

$$(74)\quad \begin{cases} \varrho_{II}^2 = x^2 + (y_{II} - a)^2 + z_{II}^2, \\ y_{II} = y \cdot \cos\varphi_{II} + z \cdot \sin\varphi_{II}, \\ z_{II} = -y \cdot \sin\varphi_{II} + z \cdot \cos\varphi_{II}, \\ \varphi_{II} = \dfrac{q}{a} \cdot (t + \varrho_{II}). \end{cases}$$

In der unendlichen Ferne bekommt man nach (66):

$$(75)\quad \begin{cases} f_{II} = \dfrac{e}{4\pi r} - q \cdot \dfrac{e}{4\pi r} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\left(\varphi - \dfrac{q}{a}(t + r)\right), \\ f_r^{II} = +q \cdot \dfrac{e}{4\pi r} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\left(\varphi - \dfrac{q}{a}(t + r)\right), \\ f_\vartheta^{II} = -q \cdot \dfrac{e}{4\pi r} \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\left(\varphi - \dfrac{q}{a}(t + r)\right), \\ f_\varphi^{II} = +q \cdot \dfrac{e}{4\pi r} \cdot \cos\left(\varphi - \dfrac{q}{a}(t + r)\right), \end{cases}$$

und für die Feldkomponenten nach (67):

$$(76\,a)\quad \begin{cases} e_r = \dfrac{e}{4\pi r^2}, \\ e_\vartheta = -q^2 \cdot \dfrac{e}{4\pi a} \cdot \dfrac{\cos\vartheta \cdot \cos\left(\varphi - \dfrac{q}{a}(t + r)\right)}{r}, \\ e_\varphi = -q^2 \cdot \dfrac{e}{4\pi a} \cdot \dfrac{\sin\left(\varphi - \dfrac{q}{a}(t + r)\right)}{r}, \end{cases}$$

$$(76a)\qquad \begin{cases} \mathfrak{h}_r = 0, \\ \mathfrak{h}_\vartheta = -q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{\sin\left(\varphi - \frac{q}{a}(t+r)\right)}{r}, \\ \mathfrak{h}_\varphi = +q^2 \cdot \frac{e}{4\pi r} \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \cos\left(\varphi - \frac{q}{a}(t+r)\right)}{r}. \end{cases}$$

Die Formeln (76) ergeben in der Tat einen zentripetalen Energiestrom von derselben Größe wie der durch (68) dargestellte zentrifugale Energiestrom der Lösung f_{I}.

In der weiteren Umgebung des rotierenden Elektrons, $q \cdot \varrho_{\mathrm{II}}/a$ sehr klein, ergibt sich aus (72) für das Viererpotential:

$$(77)\qquad \begin{cases} f_{\mathrm{II}} = \frac{e}{4\pi \cdot \varrho'} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} q^2 \cdot \frac{\bar{y}}{a} + \frac{1}{8} q^3 \cdot \frac{\varrho' \cdot \bar{z}}{a^2}\right), \\ f_x^{\mathrm{II}} = 0, \\ f_y^{\mathrm{II}} = -\frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \left(q \cdot \sin\frac{qt}{a} + q^2 \cdot \frac{\varrho'}{a} \cdot \cos\frac{qt}{a}\right), \\ f_z^{\mathrm{II}} = +\frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \left(q \cdot \cos\frac{qt}{a} - q^2 \cdot \frac{\varrho'}{a} \cdot \sin\frac{qt}{a}\right), \end{cases}$$

wo $\varrho', \bar{y}, \bar{z}$ genau dieselben Größen bedeuten, wie in (72).

Es ist nun klar, daß wir die durch (58) und (61) dargestellte Lösung des Problems nach der Methode von Liénard und Wiechert bekommen, wenn wir bilden:

$$(78)\qquad \begin{cases} f = \frac{1}{2}(f_{\mathrm{I}} + f_{\mathrm{II}}), \quad f_x = \frac{1}{2}(f_x^{\mathrm{I}} + f_x^{\mathrm{II}}), \quad f_y = \frac{1}{2}(f_y^{\mathrm{I}} + f_y^{\mathrm{II}}), \\ \qquad\qquad f_z = \frac{1}{2}(f_z^{\mathrm{I}} + f_z^{\mathrm{II}}). \end{cases}$$

In der Tat liefert (78) für den Grenzfall: $q \cdot r/a$ klein, genau die Formeln (61). Wir können nach (78) nun auch die Fortsetzung dieser Lösung im unendlich fernen Gebiet gewinnen. Die Addition von (67) und (76) liefert:

$$(79)\qquad \begin{cases} \mathfrak{e}_r = \frac{e}{4\pi r^2}, \\ \mathfrak{e}_\vartheta = -q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \cos\frac{qr}{a}}{r} \cdot \cos\left(\frac{qt}{a} - \varphi\right), \\ \mathfrak{e}_\varphi = +q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{\cos\frac{qr}{a}}{r} \cdot \sin\left(\frac{qt}{a} - \varphi\right), \end{cases}$$

$$(79)\quad \begin{cases} \mathfrak{h}_r = 0, \\ \mathfrak{h}_\vartheta = +q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{\sin\frac{qr}{a}}{r} \cdot \cos\left(\frac{qt}{a} - \varphi\right), \\ \mathfrak{h}_\varphi = -q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \sin\frac{qr}{a}}{r} \cdot \sin\left(\frac{qt}{a} - \varphi\right). \end{cases}$$

Die Formel (79) stellt das Feld des Elektrons $\mathfrak{e}_r$ dar, kombiniert mit einer typischen stehenden Schwingung, deren Energiestrom:

$$\mathfrak{e}_\vartheta \cdot \mathfrak{h}_\varphi - \mathfrak{e}_\varphi \cdot \mathfrak{h}_\vartheta = -q^4 \cdot \frac{e^2}{16\pi^2 \cdot a^2} \cdot \frac{\sin^2\vartheta \cdot \sin\frac{qr}{a} \cdot \cos\frac{qr}{a}}{r^2} \cdot \sin\left(\frac{qt}{a} - \varphi\right) \cdot \cos\left(\frac{qt}{a} - \varphi\right)$$

fortwährend nur zwischen den Schwingungsknoten und Schwingungsbäuchen hin- und herpendelt, ohne dauernd Energie in einer bestimmten Richtung zu transportieren.

Wenn man das Prinzip der Relativität des Gravitationsfeldes in der Weise auf ein um ein Gravitationszentrum umlaufendes Elektron anwendet, daß man das statische Feld eines ruhenden Elektrons in die nicht-minkowskische Geometrie umtransformiert, durch welche man das Gravitationsfeld ersetzen kann, so bekommt man in großen Entfernungen vom Elektron eine stehende elektromagnetische Schwingung. Es fände also, wenn wir diese Lösung annehmen würden, keine Energiestrahlung statt, weder Emission noch Absorption, und das umlaufende Elektron behielte seine Energie ungeändert bei.

Damit steht auch im Einklang, daß die Weltlinie des Elektrons eine geodätische Kurve des Hilbertschen Kontinuums wäre.

Das Feld eines in einem ungeheuer großen freien Raum umlaufenden Elektrons.

20. Es bleibt nun noch die Frage zu diskutieren, ob das von uns gefundene Integral wirklich das Verhalten des umlaufenden Elektrons darstellt, oder genauer, unter welchen physikalischen Bedingungen dies der Fall wäre.

Eines ist sofort klar: Wenn das umlaufende Elektron rings von einem ungeheuren leeren Raum umgeben wäre, in welchem außer dem Gravitationszentrum innerhalb von

Entfernungen, die im Vergleich zur Wellenlänge $\lambda = 2\pi a/q$ ungeheuer groß sind, nur ganz spärlich materielle Körper eingestreut wären, so kann unser Integral unmöglich die gesuchte Lösung sein. Denn wo sollte in diesem unendlichen Raum die stehende Schwingung herkommen, welche das umlaufende Elektron umgibt? Die richtige Lösung muß vielmehr um das Elektron herum eine zentrifugale Kugelwelle ergeben, in welche das Elektron vom Anbeginn seiner Umlaufsbewegung an fortwährend Energie hineingegeben hat. Die Wellenfront dieser Kugelwelle passiert zur betrachteten Zeit gerade eine Kugeloberfläche, deren Radius gleich ist der gesamten Zeit, welche vom Anbeginn der Umlaufsbewegung bis zur Jetztzeit verstrichen ist, und eilt unaufhaltsam weiter vor.

Zu diesem Integral können wir von dem bisher diskutierten Integrale f, welches nach unsrer letzten Bezeichnungsweise gleich $(f_{\mathrm{I}} + f_{\mathrm{II}})/2$ ist, sofort gelangen, wenn wir $f' = (f_{\mathrm{I}} - f_{\mathrm{II}})/2$ hinzuaddieren.

$$(80)\quad \begin{cases} f' = \frac{1}{2}(f_{\mathrm{I}} - f_{\mathrm{II}}), \\ f_x' = \frac{1}{2}(f_x^{\mathrm{I}} - f_x^{\mathrm{II}}), \quad f_y' = \frac{1}{2}(f_y^{\mathrm{I}} - f_y^{\mathrm{II}}), \quad f_z' = \frac{1}{2}(f_z^{\mathrm{I}} - f_z^{\mathrm{II}}), \end{cases}$$

wo für f_{I} und f_{II} ihre Werte aus (63), (64) und (78), (74) einzusetzen sind.

Für unendlich entfernte Gebiete liefern die Formeln (67) und (76):

$$(81)\quad \begin{cases} \mathfrak{e}_r' = 0, \\ \mathfrak{e}_\vartheta' = -q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \sin\frac{qr}{a}}{r} \cdot \sin\left(\frac{qt}{a} - \varphi\right), \\ \mathfrak{e}_\varphi' = -q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{\sin\frac{qr}{a}}{r} \cdot \cos\left(\frac{qt}{a} - \varphi\right), \\ \mathfrak{h}_r' = 0, \\ \mathfrak{h}_\vartheta' = -q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{\cos\frac{qr}{a}}{r} \cdot \sin\left(\frac{qt}{a} - \varphi\right), \\ \mathfrak{h}_\varphi' = -q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \cos\frac{qr}{a}}{r} \cdot \cos\left(\frac{qt}{a} - \varphi\right). \end{cases}$$

Also auch die Lösung f' der Maxwellschen Gleichungen ergibt stehende Schwingungen, aber durch Superposition

beider Lösungen bekommt man $f + f' = f_1$, also nach außen laufende Kugelwellen.

Wir untersuchen nun die Lösung f' in dem anderen Grenzfall: $q \cdot r/a$ klein. Aus (72) und (77) bekommt man:

$$(82) \quad \begin{cases} f' = -\frac{1}{3} q^3 \frac{e}{4\pi a^2} \cdot \bar{z}, \\ f_y' = +q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \cos \frac{qt}{a}, \\ f_z' = +q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \sin \frac{qt}{a}. \end{cases}$$

Die Feldstärken sind demnach für kleine Werte r in dem sich mit drehenden Koordinatensystem der $\bar{y}, \bar{z}$:

$$(83) \quad \mathfrak{e}_x' = 0, \quad \mathfrak{e}_y' = 0, \quad \mathfrak{e}_z' = -\frac{2}{3} \cdot q^3 \cdot \frac{e}{4\pi a^2}, \quad \mathfrak{h}' = 0.$$

Die Lösung f' ergibt also in der Umgebung des Elektrons ein homogenes elektrisches Feld, dessen Richtung jederzeit der Richtung $\bar{z}$ der momentanen Bewegung des Elektrons genau entgegengesetzt ist. Dieses elektrische Drehfeld muß als zeitlich veränderliches Feld selbstverständlich von entsprechenden magnetischen Zuständen begleitet sein, aber das magnetische Feld ist von der Ordnung q^4, infolgedessen setzen wir $\mathfrak{h}' = 0$, da wir das magnetische Feld nicht einmal bis zur Ordnung q^3 genau rechnen. Das Eigenartige an dem durch (83) dargestellten elektrischen Drehfeld besteht darin, daß es nicht von elektrischen Ladungen ausgeht. Die elektrischen Kraftlinien verlaufen ohne Anfang und Ende im Raum und schließen sich in großer Entfernung zu den Kraftlinienschleifen der stehenden elektrischen Schwingung zusammen, welche in unendlichen Entfernungen roh durch die Gleichungen (81) dargestellt wird, zu deren genauer Berechnung man aber $(f_1 - f_{II})/2$ aus den Gleichungen (63), (64) und (73), (74) entnehmen müßte.

Ebenso gut wie in großen Entfernungen vom Elektron wird aber das Feld auch in seiner ganzen Umgebung durch die Formel $f + f'$ richtig dargestellt. Das folgt einfach daraus, daß f' eine Lösung der elektromagnetischen Differentialgleichungen auch in den Gegenden ist, wo das Gravitationspotential beträchtlichere Abweichungen von 1 hat, wenn wir nur von der allernächsten Umgebung der Singularität im Gravitationszentrum absehen. Vorausgesetzt ist dabei, daß wir nur mit dem Grade der Genauigkeit rechnen, auf den wir

uns bisher immer beschränkt haben. Wenn wir nämlich unter Zuhilfenahme der aus der Formel (1) zu entnehmenden Maßfaktoren die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes im Gravitationsfeld aufstellen, wobei wir aus (6) den Wert für a entnehmen, so können wir die linken Seiten der Gleichungen in eine Potenzreihe nach q^2 entwickeln. Zur Lösung der Differentialgleichungen führt dasselbe Näherungsverfahren, das wir schon in (14) benutzt haben. Wir entwickeln beispielsweise f in eine Reihe nach q^2: $f = f_0 + f_1 \cdot q^2 + f_2 \cdot q^4 + \cdots$, setzen diese Reihe in die Differentialgleichung für f ein und ordnen wieder nach q^2. Wir haben dann der Reihe nach die einzelnen Faktoren von $q^0, q^2, q^4, \ldots$ gleich Null zu machen. Der Faktor von q^0 liefert eine Differentialgleichung, welche als einzige Unbekannte f_0 enthält. Haben wir ein Integral für f_0 gewonnen, so gehen wir zu der zweiten Gleichung weiter, welche der Faktor von q^2 liefert. Dieser Faktor enthält schon zwei von den Unbekannten, nämlich f_0 und f_1. Setzen wir den aus der ersten Gleichung gewonnenen Wert von f_0 ein, so haben wir eine Differentialgleichung für f_1, die wir lösen usw. Nun sind die Differentialgleichungen für die f_0 nichts anderes als die aus den gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen hervorgehenden Differentialgleichungen, denn wenn man in den Maßfaktoren setzt $q^2 = 0$, so gehen sie alle in 1 bzw. in 0 über, entsprechend dem Verhalten im gravitationsfreien Raum. Demnach ist f_0 eine Lösung der gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen. Wählen wir als diese Lösung das durch (82) dargestellte Viererpotential des Drehfeldes, so beginnt die Reihe für f' schon mit einem Gliede von der Ordnung q^3, dann folgt q^5, q^7 usw., die Reihen für die f_x' unf f_z' beginnen jede mit einem Gliede von der Ordnung q^2, dann folgt q^4, q^6 usw. Wenn wir uns also auf den Näherungsgrad beschränken, den wir bisher immer innegehalten haben, so können wir uns auf das erste Glied beschränken. Das durch (82) dargestellte Viererpotential ist also in unserem Falle schon selbst das gesuchte Integral.

Wenn sich das Elektron in dem durch die Formeln (83) dargestellten Drehfeld $\mathfrak{e}'$, welches sich über sein eigenes Feld superponieren soll, bewegt, so muß es dabei andauernd Energie verlieren und zwar ist *der Energieverlust in der Zeiteinheit*:

$$-\mathfrak{e}_z' \cdot e \cdot q = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{4\pi a^2} \cdot q^4$$

genau gleich der als Strahlung in der Zeiteinheit emittierten Energie, wie der Vergleich mit (68) zeigt.

21. Zum Schluß sei noch die Frage erledigt, von welchem Integral der Maxwellschen Gleichungen man ausgehen müsse, um durch Transformation des Integrals in das nicht-minkowskische Kontinuum, dessen Geometrie durch die Formeln (35) und (36) dargestellt wird, schließlich zu den nun schon gewonnenen Ausdrücken für das Feld des unter Aussendung einer Wellenstrahlung umlaufenden Elektrons zu kommen.

Wir müssen zu dem Zweck die Ausdrücke für das Vierer-potential f', die wir schon in kartesischen Koordinaten haben, umgekehrt in das auf natürliche Messungen basierte Koordinatensystem der $(\varrho, \beta, \psi, \tau)$ zurücktransformieren. Da sich die Ausdrücke f' bei dieser Transformation nur um Zusatzglieder ändern, die im Vergleich zu den ursprünglichen Größen f' von der Ordnung q^2 sind, so können wir die Zusatzglieder vernachlässigen und so rechnen, als ob wir in das durch (37a) definierte (x', y', z', t')-Koordinatensystem transformierten. In der unmittelbaren Nachbarschaft des Zeitpunktes $t = 0$ geschieht das durch die Lorentztransformation (37b) und wir bekommen so innerhalb der von uns angenommenen Fehlergrenzen:

$$(84)\quad \begin{cases} \varphi' = -\frac{1}{3} q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a^3} \cdot \left(z' \cdot \cos\frac{q t}{a} - (y' - 3a) \sin\frac{q t}{a} \right), \\ \varphi'_{y'} = q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \cos\frac{q t}{a}, \quad \varphi'_{z'} = q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \sin\frac{q t}{a}, \end{cases}$$

wo y' und z' mit den ϱ, β, ψ durch die Gleichungen (38) verknüpft sind. In der unmittelbaren Nachbarschaft von $t = 0$ oder was dasselbe ist: von $\tau = 0$, werden die Gleichungen (84), wenn man die Glieder von der Ordnung q^4 an streicht:

$$(85)\quad \begin{cases} \varphi' = -\frac{1}{3} q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a^3} \cdot z', \qquad z' = -\varrho \cdot \sin\beta \cdot \sin\psi, \\ \varphi'_{x'} = 0, \quad \varphi'_{y'} = q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a}, \quad \varphi'_{z'} = q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a^2} \cdot \tau. \end{cases}$$

Dies ist zu dem früher berechneten Vierer-potential φ, welches durch (55) wiedergegeben worden ist, hinzu zu addieren. Es ergibt sich also genau dasselbe Eigenfeld des Elektrons wie früher, nur tritt zu ihm noch das Drehfeld:

$$\mathfrak{e}'_{x'} = 0, \quad \mathfrak{e}'_{y'} = 0, \quad \mathfrak{e}'_{z'} = -\frac{2}{3} q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a^3}, \quad \mathfrak{h}' = 0$$

hinzu.

Zu dem Felde eines in einem ungeheuren leeren Raum um ein Gravitationszentrum umlaufenden Elektrons kommt man, wenn man nicht das rein statische Feld eines ruhenden Elektrons, sondern ein Elektron in einem homogenen elektrischen Drehfeld nach dem Prinzip der Relativität der Gravitationswirkungen in die nicht-minkowskische Geometrie umtransformiert, durch welche man das Gravitationsfeld ersetzen kann.

Dieses Drehfeld muß so bemessen und so gerichtet sein, daß es einen fortwährenden Energieverlust des umlaufenden Elektrons bedingt, welcher genau gleich der in große Fernen weggestrahlten Energie ist. Dazu kommt aber, wie wir auf S. 535 gesehen haben, noch eine zur Richtung der Bahn senkrecht stehende Drehfeldkomponente, die natürlich keine Energieabgabe veranlaßt. Diese senkrechte Komponente verdankt ihre Existenz, wie wir gesehen haben, der Influenzwirkung des von dem Elektron ausgehenden elektrischen Feldes auf den im Gravitationszentrum befindlichen materiellen Körper. Selbst, wenn dieser Körper an sich vom Äther gar nicht dielektrisch verschieden wäre, so würde doch schon die Existenz des Gravitationspotentials in ihm eine Abweichung der Dielektrizitätskonstante vom Werte 1 bedeuten, und es müßten in ihm freie Ladungen influenziert werden, deren Feld man als das eines im Gravitationszentrum befindlichen Dipols beschreiben könnte, der sich mit dem Elektron zugleich dreht. Ja, sogar in dem ganzen Raum um das Gravitationszentrum herum müssen im reinen Äther freie Ladungen entstehen, weil überall die Existenz des Gravitationspotentials gleichbedeutend ist mit einer Änderung der Dielektrizitätskonstante, und alle diese freien Ladungen wirken bei der Hervorbringung der zur Bewegungsrichtung des Elektrons senkrecht stehenden Komponente des Drehfeldes mit. Wenn man von dieser Drehfeldkomponente nur denjenigen Teil berechnet, der durch die Influenzwirkungen in dem dielektrisch geänderten Äther ohne die Mitwirkung der Materie im Gravitationszentrum hervorgebracht wird, das heißt, wenn man den Dipol im Gravitationszentrum gleich Null setzt, so findet man, wie wir auf S. 585 gesehen haben, die Feldstärke: $q^2 \cdot \varepsilon / 4\pi a^2$, zentrifugal gerichtet. Die der Wellenstrahlung entsprechende Drehfeldkomponente, welche der Bewegung des Elektrons gerade entgegengesetzt gerichtet ist, hat die Intensität: $q^2 \cdot \varepsilon / 6\pi a^2$. Sie

ist also von höherer Ordnung klein, als das zur Bahn senkrechte Drehfeld.

Schlußbemerkungen.

22. Wenn sowohl die Ausstrahlung von Wellen, wie auch die Influenzwirkung in dem dielektrisch inhomogenen Äther in der fernen Umgebung des umlaufenden Elektrons verhindert werden, dann ist die durch (55) dargestellte Lösung des Problems die richtige. Dieser Fall tritt ein, wenn man das elektrisch geladene Kügelchen in einem Einsteinschen Coupé beobachtet, dessen Wandungen aus leitendem Material bestehen. Dann dringen keine Feldlinien von dem Kügelchen in den weiten Raum nach außen, und man wird an ihm eine Verhalten beobachten, welches strenge dem Prinzip von der Relativität der Gravitationswirkungen entspricht. Man wird also durch Beobachtungen an dem elektrischen Kügelchen weder von der Kreisbewegung des Coupés noch von dem Vorhandensein des Gravitationsfeldes etwas bemerken können.

Bestehen dagegen die Wandungen des Coupés aus einem Dielektrikum, durch welches die von dem geladenen Kügelchen ausgehenden Feldlinien in den weiten Raum rings umher hindurchdringen, dann wird sein Verhalten durch das in 21. besprochene Integral der elektromagnetischen Differentialgleichungen dargestellt. Die Feldlinien gehen wie Fühler in die weiten Gebiete hinein, welche man bei Zugrundelegung natürlicher Maßangaben nicht mehr durch eine minkowskische Geometrie beschreiben kann, und sie bringen deswegen auch in das Einsteinsche Coupé hinein eine Kunde von seiner Stellung im Weltsystem. Man beobachtet dann an dem elektrisch geladenen Kügelchen die Wirkung zweier Drehfelder. Das eine hängt mit der in den weiten Weltraum hinausgehenden Strahlung zusammen, es sucht die Bewegung des Elektrons auf seiner Bahn aufzuhalten. Im Coupé muß man es daran bemerken, daß es eine zunehmende Bewegung des Elektrons auf einer Spirale relativ zu den Gegenständen im Coupé hervorbringt. Auf diese Weise legt es Zeugnis ab von der kreisenden Bewegung des Coupés. Das andere Drehfeld entsteht durch die freien Ladungen, welche das elektrische Feld des Elektrons in der Materie des Gravitationszentrums und außerdem auch in dem vom Gravitationsfeld durchsetzten und dadurch dielektrisch veränderten freien Äther influenziert. Dieses Feld

bringt eine Veränderung der Attraktionskraft hervor, welche man ebenfalls relativ zu den anderen Körpern im Coupé, die nur der Schwerewirkung unterworfen sind, bemerken muß. So bezeugt dieses Feld das Vorhandensein der Materie im Gravitationszentrum und vielleicht auch das Vorhandensein von dielektrischen Veränderungen im Äther und damit das eines Gravitationsfeldes in der Umgebung des Coupés.

Es sei besonders hervorgehoben, daß alle in dieser Arbeit gemachten Berechnungen und auch die eben angestellten Betrachtungen unabhängig davon gelten, ob der Weltraum unendlich ausgedehnt ist, oder ob er, wie Einstein annimmt, in sich zurückläuft. Freilich: Wollte man die physikalisch sinnlose Fiktion machen, daß man ein geladenes Kügelchen im weiten leeren Raum um ein Gravitationszentrum während so vieler Aeonen umlaufen ließe, daß die von ihm ausgesandten Wellenzüge mehrmals den ganzen nach Einstein in sich geschlossenen Weltraum durchliefen, zum Anfangspunkt zurückkehrten, wieder wegliefen, bis schließlich eine regelrechte stehende Welle herauskäme, dann würde allerdings das Integral von den „Bedingungen im Unendlichen" nicht abhängen, und die beiden von uns unterschiedenen Fälle wären in Hinsicht auf die elektrischen Wellen identisch, sie würden nur in den Gliedern voneinander abweichen, welche von der Existenz der in endlicher Entfernung in der Umgebung des umlaufenden Elektrons vorhandenen materiellen Körper abhängen. Geht man aber von der physikalisch allein möglichen Voraussetzung aus, daß das Elektron erst vor einer absehbaren Zeit mit seinen Umläufen begonnen hat, dann ist wegen der ungeheuren Ausdehnung, welche man dem in sich geschlossenen Weltraum ohne Zweifel zuerkennen muß, die Wellenfront der von dem Elektron emittierten Strahlung immer noch unterwegs in dem ungeheuren Raum, während die Beobachtungen gemacht werden. Für den Beobachter ist also der geschlossene Raum genau so gut unendlich groß, wie der wirklich unendlich ausgedehnte Raum, weil die Wellen während seiner Beobachtungen das Ende des Raumes nicht erreichen. In mathematischen Arbeiten wird die physikalische Bedeutung der Frage, ob der Weltraum unendlich ist, oder ob er in sich zurückläuft, bisweilen, wie mir scheint, überschätzt. Es ist vielleicht gut, einmal daran zu erinnern, daß man in der Physik zwischen „sehr groß"

und „unendlich groß" so gut wie niemals unterscheiden kann, und daß der theoretische Physiker jedesmal, wenn er das Wort „unendlich groß" gebraucht, dabei im Stillen an eine ganz bestimmte Größenordnung denkt, die von Problem zu Problem sehr verschieden sein kann. Ich glaube, daß die Frage nach der Endlichkeit oder Unendlichkeit des Weltraumes physikalisch eigentlich belanglos ist, so interessant sie auch gewiß vom metaphysischen und vom astronomischen Standpunkt aus sein mag.

23. In der modernen Atomtheorie wird angenommen, daß umlaufende Elektronen ohne Strahlung möglich sind. Diese Annahme bildet keineswegs erst die Grundlage der neueren Quantentheorie und des Bohrschen Atommodells, sie ist vielmehr von vornherein in jeder elektrischen Theorie der Materie, die sich auf der Existenz von Elektronen aufbaut, wie mir scheint, unvermeidlich. Man muß sich die Frage vorlegen, ob sie mit der Vorstellung elektromagnetischer Felder im Sinne der Maxwellschen Theorie vereinbar ist oder nicht. Wenn das elektrische Feld in der Umgebung eines um einen Kern umlaufenden Elektrons andauernd die Bewegung des Elektrons mitmachte, so müßte die Bewegung unbedingt mit Strahlung verbunden sein, weil die Feldänderungen sich nur mit endlicher Geschwindigkeit in die unendliche Ferne übertragen können. Vielleicht wäre es aber möglich, daß sich die Feldlinien in der ferneren Umgebung des Elektrons nach einigen Schwankungen auf eine gewisse mittlere Lage einstellten und nun die Bewegung des Elektrons nicht mehr mitmachten. Dann würden die Wellen, welche sich in der unmittelbaren Nachbarschaft des bewegten Elektrons entwickeln, sofort in den Schichten, in welchen die konstante Einstellung der Feldlinien beginnt, nach dem Innern zurück totalreflektiert werden, und das umlaufende Elektron wäre unmittelbar umgeben von einer stehenden Schwingung. Dazu wäre erforderlich, daß der Äther im Bereich der starken Felder im Atom gewisse Veränderungen seiner dielektrischen und magnetischen Eigenschaften erlitte, die mit Brechung und totaler Reflektion verbunden sein können. Da nun bei strenger Anwendung des Prinzips von der Relativität der Gravitationswirkungen das schwere, um ein Gravitationszentrum umlaufende Elektron nicht strahlt, so könnte man auf die Vermutung kommen,

daß die Änderungen der dielektrischen und magnetischen Eigenschaften des Äthers, welche durch das Gravitationspotential angezeigt werden, eine Totalreflektion der Wellen in der eben geschilderten Weise hervorbringen. In der vorliegenden Arbeit ist der Nachweis geliefert, daß diese Vermutung irrig wäre. Die Änderungen der Dielektrizität und der Permeabilität des Äthers im Gravitationsfeld haben auf die vom Elektron emittierte Strahlung keinen Einfluß, der über die Fehlergrenzen der sehr genauen Rechnungen hinausginge. Trotzdem sind die freien Ladungen in dem leeren Raum um das Elektron herum, welche infolge der Veränderungen der Dielektrizität des Äthers entstehen, so groß, daß das von ihnen erzeugte Feld viel stärker ist als das mit der Strahlung verbundene bremsende Drehfeld. Es kann aber nicht zur Geltung kommen, weil es zur Bahn des Elektrons immer genau senkrecht steht. Es wäre nun sehr wohl möglich, daß auch die starken elektrischen Felder im Bohrschen Atommodell die Eigenschaften des Äthers nach bisher noch unbekannten Gesetzen veränderten. In diesem Falle müßten die Veränderungen der Dielektrizitätskonstante die drehende Bewegung des Elektrons mitmachen und man könnte sich denken, daß dadurch eine tangential gerichtete Komponente des Feldes entsteht, welches die im Äther influenzierten Ladungen hervorbringen. Weiter wäre es möglich, daß diese Komponente in bestimmten Fällen, nämlich denen der bevorzugten Elektronenbahnen, gerade das bremsende Feld kompensierte. Dann müßte aber das Elektron strahlungslos, nur umgeben von einer stehenden Schwingung, umlaufen. Man muß daher zugeben, daß es nicht ausgeschlossen zu sein braucht, eine etwas modifizierte Maxwellsche Theorie mit der Tatsache strahlungsfreier Elektronenbahnen im Einklang zu finden.

(Eingegangen 2. November 1922.)

2. Über das Refraktionsvolumen sehr verdünnter Lösungen; von C. Dieterici.

In einer in diesen Annalen, Bd. 67, S. 387—351, 1922 erschienenen Arbeit habe ich nachgewiesen, daß sich das Landoltsche Refraktionsvolumen für Mischungen zweier Flüssigkeiten und Lösungen additiv aus dem Refraktionsvolumen der Komponenten nach der Gleichung

$$n - 1 = \alpha W + \beta \cdot S$$

darstellen läßt, worin $\alpha = (n_w - 1)\, v_w$ und $\beta = (n_s - 1)\, v_s$ das molekulare Refraktionsvolumen der reinen Komponenten und W und S die Zahl der in der Raumeinheit der Lösungen enthaltenen Molekeln bedeutet.

Die zahlenmäßigen Berechnungen, auf welches sich diese Darstellung stützte, waren wesentlich basiert auf dem reichen Beobachtungsmaterial an wäßrigen Lösungen, welches in Wagners Tabellen zum Zeißschen Eintauchrefraktometer enthalten ist und umfaßte möglichst weite Konzentrationsintervalle, also Lösungen bis zu den höchsten Konzentrationen.

Eine Frage von besonderem Interesse ist die, ob auch bei den verdünntesten Lösungen sich das einfache Gesetz der additiven Wirkung der Komponenten auf den Brechungsexponent der Lösung bewahrheitet. Nach den Vorstellungen der Dissoziationstheorie müssen ja mit zunehmender Verdünnung die gelösten Molekeln immer mehr in ihre Ionen zerfallen, es müßte also das optische Volumen β des gelösten Stoffes sich mit zunehmender Verdünnung ändern und in zwei den gebildeten Ionen entsprechenden Teile zerfallen. Schon Hallwachs[1]) hat nachgewiesen, daß auch bei den verdünntesten Lösungen auf optischem Wege keine zunehmende Dissoziation bemerkbar wird. Die Wagnerschen Tabellen

1) W. Hallwachs, Wied. Ann. 52. S. 1. 14. 1893.

geben ein viel reicheres Beobachtungsmaterial als es damals Hallwachs zur Verfügung stand.

In den folgenden Tabellen sind für wäßrige NaCl und H_2SO_4-Lösungen nach den Originalzahlen von Kohlrausch und Hallwachs[1]) über sehr verdünnte Lösungen unter p die Gewichtsmengen Salz angegeben in 100 ccm Lösung und die zugehörigen Dichten s bezogen auf Wasser gleicher Temperatur; damit ist unter W und S die in 100 ccm Lösung bei $t = 18{,}5°$ C enthaltenen Molenzahlen berechnet, $(n - 1)$ ist aus den Wagnerschen Tabellen entnommen nur durch Multiplikation mit 1,000294 auf das Vakuum reduziert, unter $\alpha W/100$ ist

Tabelle 1.

NaCl-Lösungen $t = 18{,}5$ $M = 58{,}51$ $\alpha = 6{,}0176$ ccm pro Mole.

p gr in 100 cbm Lösung	$s\,\frac{18{,}5}{18{,}5}$	S	W	$n - 1$	$\frac{\alpha W}{100}$	Δ	$\beta\,\frac{\text{cbm}}{\text{Mole}}$
0,00000	1,000000	0	5,54223	0,33351	0,33351	0,00000	—
0,02942	1,000212	0,000503	5,54178	0,33357	0,33348	0,00009	17,89
0,05880	1,000426	0,001005	5,54132	0,33360	0,33345	0,00015	14,92
0,11731	1,000848	0,002005	5,54042	0,33371	0,33340	0,00031	15,46
0,2916	1,002101	0,004983	5,53769	0,33402	0,33324	0,00078	15,65
0,5777	1,004143	0,009873	5,53314	0,33452	0,33296	0,00156	15,80
1,1344	1,008093	0,019388	5,52413	0,33549	0,33242	0,00307	15,83
1,6967	1,012053	0,028999	5,51487	0,33645	0,33186	0,00459	15,83
2,7836	1,019627	0,047544	5,49654	0,33830	0,33076	0,00754	15,85
2,9173	1,020580	0,049860	5,49439	0,33855	0,33063	0,00792	15,88

Tabelle 2.

H_2SO_4-Lösungen $t = 18{,}05$ $M_2 = 98{,}06$ $\alpha = 6{,}0190$ ccm pro Mole.

p gr in 100 cbm Lösung	$s\,\frac{18{,}05}{18{,}05}$	$S\,\frac{\text{Molen}}{100\,\text{cbm}}$	$W\,\frac{\text{Molen}}{100\,\text{cbm}}$	$n - 1$	$\frac{\alpha W}{100}$	Δ	$\beta\,\frac{\text{cbm}}{\text{Mole}}$
0,00000	1,000000	0	5,54174	0,33355	0,33355	0,00000	—
0,14717	1,001121	0,001501	5,53978	0,33375	0,33344	0,00034	22,64
0,2442	1,001810	0,002490	5,53822	0,33388	0,33335	0,00053	21,29
0,4837	1,003460	0,004932	5,53407	0,33418	0,33310	0,00108	21,90
0,71873	1,005045	0,007328	5,52982	0,33448	0,33284	0,00164	22,38
0,94912	1,006580	0,009677	0,52554	0,33478	0,33258	0,00220	22,73
1,4193	1,009686	0,014471	5,51663	0,33536	0,33204	0,00336	23,22
2,3277	1,015616	0,023733	5,49910	0,33655	0,33099	0,00556	23,43
24,422	1,15238	0,2490	5,03091	0,35985	0,30281	0,05704	22,90

1) F. Kohlrausch u. W. Hallwachs, Wied. Ann. 53. S. 14—42. 1893.

das optische Volumen des reinen Wassers angegeben, welches durch Subtraktion von $(n-1)$ unter Δ das optische Volumen des Salzes bzw. der Säure in der Lösung ergibt. $\beta = \frac{\Delta}{\delta} \cdot 100$ gibt dann das optische Volumen des Salzes bzw. der Säure in Kubikzentimeter per Mole.

Aus den Tabellen ergibt sich, daß bei den Lösungen von NaCl und H_2SO_4 in Wasser auch bis zu den allerverdünntesten Lösungen, deren Dichtebestimmung nur die Meßkunst eines Kohlrausch ermöglichte, also Lösungen, die nur 0,001 normal sind, sich aus den Brechungsexponenten ein konstantes optisch wirksames Refraktionsvolumen β berechnen läßt und daß dieses bei beiden gelösten Stoffen sich vollkommen identisch mit dem β-Werte ergibt, der in meiner vorangegangenen Arbeit[1]) aus den Lösungen höherer Konzentration abgeleitet ist, nämlich

für NaCl	15,86 ccm pro Mole
„ H_2SO_4	23,00 „ „ „

Es ist also in Übereinstimmung mit Hallwachs keinerlei Anzeichen einer mit der Verdünnung fortschreitenden Dissoziation auf optischem Wege bemerkbar. Daß bei zunehmender Verdünnung die Größe β etwas größere Schwankungen zeigt, als bei konzentrierteren, ist natürlich bedingt dadurch, daß die geringe Differenz Δ, aus der β berechnet ist, so klein wird, daß auch die Bestimmung des Brechungsexponenten auf 5 Dezimalen, welche das Eintauchrefraktometer gestattet, nicht mehr ausreicht.

Kiel, Physik. Institut d. Universität, 10. Dez. 1922.

1) Ann. d. Phys. 67. S. 347. 1922.

(Eingegangen 10. Dezember 1922.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1923. № 8.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 70.

1. *Zur Theorie der Rückdiffusion von β-Strahlen;* von Gregor Wentzel.

§ 1. Einleitung.

Das Rutherfordsche Atommodell, ursprünglich aus dem Studium der α-Strahlstreuung hervorgewachsen, hat bekanntlich später seine größten Leistungen auf einem ganz andersartigen Gebiete, dem der Spektraltheorie, hervorgebracht. Inzwischen ist es seiner anfänglichen Bestimmung, ein quantitatives Verständnis der Streuungserscheinungen zu vermitteln, etwas fremd geworden. Die Rutherfordsche Streuungstheorie erstreckt sich nämlich nur auf einen extremen Fall, den Fall der *Einfachstreuung* (mittlere freie Weglänge der Strahlpartikeln > Dicke der streuenden Schicht), der überhaupt nur bei den Strahlen höchster Energie, den schwer ablenkbaren α-Strahlen, realisierbar ist. Eine Erweiterung der Theorie wurde vom Verf. in einer kürzlich in diesen Annalen veröffentlichten Abhandlung[1]) (im folgenden als I zitiert) vorgenommen; doch war das dort angegebene Rechenverfahren abermals nur in einem engen Spezialfall anwendbar (freie Weglänge von gleicher Größenordnung wie die Schichtdicke). Die bisherigen Theorien der eigentlichen *Mehrfach-* oder *Vielfachstreuung* erstrecken sich lediglich auf Ablenkungen über *kleine Winkel.*[2]) Im folgenden soll nun der Versuch gemacht werden, auch die *diffuse Mehrfachstreuung*, wie sie sich beim Durchgang von Kathoden- und β-Strahlen durch Materie in der Regel ausbildet, rechnerisch zu erfassen. Wir beschränken uns dabei, wie in I, auf den Fall einer *planparallelen streuenden Schicht* von seitlich unendlicher Ausdehnung und lassen die seitliche Verteilung der Partikeln überhaupt außer Betracht. Dazu ist

1) Ann. d. Phys. 69. S. 335. 1922.

2) Aus der neueren Literatur möchten wir die tiefgehenden Untersuchungen von W. Bothe (Zeitschr. f. Phys. 4. S. 161 u. 300; 5. S. 63. 1921; 12. S. 368. 1923) erwähnen, die sich namentlich auf den wahrscheinlichsten Ablenkungswinkel beziehen.

erforderlich, daß wir die Streuungszentren (Atome) als in der Schicht ungeordnet verteilt voraussetzen können. *Wir vernachlässigen* (wie in I) *den Geschwindigkeitsverlust der Strahlen, berücksichtigen aber* (über I hinausgehend) die *Absorption*. Doch bleibt unsere Theorie hinsichtlich des Absorptionsvorganges rein phänomenologisch; über den Mechanismus desselben machen wir keine Aussage.

Um unnötige Allgemeinheiten und Komplikationen zu vermeiden, beschränken wir uns auf die Nachrechnung eines einzelnen experimentell gut erforschten Streuungsvorganges. Wir entscheiden uns für eine einfache Versuchsanordnung von H. W. Schmidt[1]), welche insbesondere dazu diente, die *Rückdiffusion* der β-Strahlen des Ur X in verschiedenen Metallen (Al, Zn, Sn, Pb) zu studieren. In der Tat verdient die Erscheinung der Rückdiffusion ein besonderes Interesse, da wir in ihr die stärkstmögliche Wirkung der Streuung, eine völlige Richtungsumkehr der β-Partikeln („unechte Reflexion") vor uns haben. Indem wir diesen Streuungsvorgang theoretisch verfolgen und zu befriedigender Übereinstimmung mit den Messungen von Schmidt gelangen, hoffen wir zu zeigen, daß unsere heutigen Vorstellungen vom Bau der Atome auch von solchen relativ komplizierten Prozessen Rechenschaft zu geben vermögen. Eine darüber hinausgehende allgemeinere theoretische Behandlung von Streuungsproblemen scheint kaum der Mühe wert. Immerhin sei bemerkt, daß das im folgenden benutzte Rechenverfahren weitgehender Verallgemeinerung fähig ist.[2])

§ 2. Rückdiffusion und Absorption der β-Strahlen im Experiment.

Die Versuchsanordnung von Schmidt bestand in folgendem. Eine aktive Schicht von Ur X wurde auf die Oberfläche einer planparallelen Metallplatte (Al, Zn, Sn, Pb) variabler Dicke gebracht und die Strahlungsintensitäten an beiden Seiten in Abhängigkeit von der Dicke gemessen. Wurde die Dicke ver-

1) H. W. Schmidt, Ann. d. Phys. **23**. S. 678. 1907.

2) Man kann beispielsweise nach der Richtungsverteilung der austretenden Partikeln fragen (vgl. I) oder an Stelle von zweien beliebig viele parallele, in sich homogene Schichten behandeln. Auch die Zulassung von (kontinuierlichen) Unhomogenitäten des streuenden Mediums senkrecht zur Schicht (Abhängigkeit der Größen μ und F von z) erschwert die rechnerische Behandlung nicht wesentlich.

größert, so mußte die Intensität auf der einen (dem Strahler abgewandten) Seite infolge verstärkter *Absorption* abnehmen, auf der anderen Seite infolge vermehrter *Rückdiffusion* zunehmen.

Schmidt gibt in seiner oben zitierten Abhandlung eine Theorie dieser Absorptions- und Rückdiffusionsvorgänge; doch beruht diese nicht auf Modellvorstellungen, sondern lediglich auf optischen Analogien (Reflexion im trüben Medium). Die Rückdiffusionskonstante, das ist im wesentlichen die rückdiffundierte Intensität bei unendlicher Plattendicke, wird bei Schmidt nicht aus bekannten Materialdaten theoretisch gewonnen, sondern als empirischer Parameter in die Rechnungen hineingesteckt. Von unserer Modelltheorie dagegen müssen wir fordern, daß sie eine *absolute Berechnung der Rückdiffusionskonstanten* ermöglicht.

Einschränkend muß allerdings bemerkt werden, daß in unseren Formeln das wahre Absorptionsvermögen (α) des streuenden Mediums für die betreffende β-Strahlung explizite auftreten wird, dessen theoretische Bedeutung uns unbekannt ist; wir sind genötigt, α als empirische Konstante einzuführen. Doch können wir α aus einer ganz anderen Reihe von Messungen bestimmen, nämlich aus den Messungen der durch die Platte hindurchgegangenen Intensität, die Schmidt gleichzeitig mit seinen Rückdiffusionsmessungen mitgeteilt hat. Auf diese Weise wird wieder jede Unsicherheit der absoluten Werte eliminiert.

Schmidt bemerkt bei der Diskussion seiner Meßergebnisse, daß die Abklingung der durchgegangenen Intensität mit wachsender Plattendicke merkwürdig genau nach einem Exponentialgesetz erfolge, also ähnlich der Abklingung eines Parallelstrahlbündels, während er es in Wirklichkeit mit einem sehr diffusen Bündel zu tun hatte, von dem man ursprünglich ein ganz anderes Verhalten erwarten sollte (vgl. § 10). Wir werden später sehen, daß *die scheinbare Wiederherstellung der exponentiellen Abklingung wiederum gerade eine Wirkung der Streuung ist.* Die Konstante $\bar{\alpha}$, welche die Stärke dieser Abklingung mißt, das sogenannte praktische Absorptionsvermögen, ist natürlich von dem wahren Absorptionsvermögen (für ein Parallelbündel) α wesentlich verschieden. Auf diesen Unterschied hat namentlich Lenard hingewiesen; dieser bezeichnet das Verhältnis $\bar{\alpha}/\alpha$ als Umwegfaktor. Dieser Name deutet darauf hin, daß die Partikeln infolge der Streuung mehr oder

weniger große Umwege in der absorbierenden Schicht zurücklegen und daher verstärkte Absorption erleiden. Über die Größe des Umwegfaktors war bisher nur aus dem Vergleich der Schmidtschen Theorie mit der Erfahrung einiger Aufschluß zu erlangen.[1]) Indem wir Schmidts phänomenologische Theorie der Streuung durch eine Modelltheorie ersetzen, die exakte Geltung beansprucht, behaupten wir über den Umwegfaktor bzw. über den wahren Absorptionskoeffizienten a neue und zuverlässigere Aussagen machen zu können. Wir beschäftigen uns aber mit dieser Frage hier nur insoweit, als sie für unsere Berechnung der Rückdiffusion von Belang ist.

§ 2. Formulierung der Aufgabe.

Das β-strahlende Ur X-Präparat bildete in der Schmidtschen Versuchsanordnung eine ebene Schicht, die auf einer dünnen Aluminiumplatte (Dicke $9{,}5 \cdot 10^{-3}$ cm) aufgetragen war. Die aktive Schicht war also jeweils zwischen eine konstante dünne Al-Schicht und die variable Schicht eingeschlossen. Indem wir die Unterlageplatte von vornherein mitberücksichtigen, können wir die Versuchsanordnung und unsere Aufgabe folgendermaßen kennzeichnen.

Wir führen zur Ortsbeschreibung eine z-Koordinate ein derart, daß die z-Achse auf den streuenden Schichten senkrecht

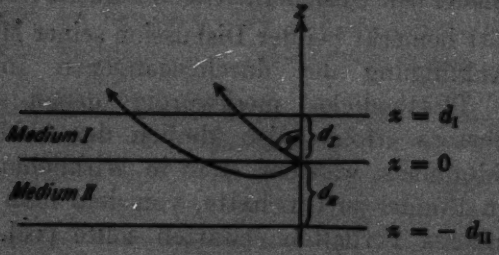


Fig. 1.

steht. Die aktive Schicht befinde sich in der Ebene $z = 0$. Zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = +d_I$ befinde sich ein

1) Nach Schmidt ist $\bar{a}/a = \frac{1+p}{1-p}$, wo p seine „Rückdiffusionskonstante" ist. Die Schlüsse, die Lenard aus dieser Formel in Verbindung mit den Schmidtschen Messungen zieht, sind insbesondere deshalb anfechtbar, weil die von Schmidt gemessenen Größen p, wie wir in § 8 zeigen werden, gar keine Materialkonstanten sind.

Medium I, zwischen $z = 0$ und $z = -d_{II}$ ein Medium II (Fig. 1). *Gefragt ist nach demjenigen Bruchteil der von der aktiven Schicht emittierten Intensität, welcher an der Begrenzungsebene $z = d_I$ (d. h. in Richtung wachsender z) aus dem Medium I austritt.*

a) Wählt man als Medium I Aluminium und setzt $d_I = 9{,}5 \cdot 10^{-3}$ cm und variiert man andererseits das Medium II und seine Schichtdicke d_{II}, so ist der gesuchte Intensitätsbruchteil mit derjenigen Intensität identisch, die Schmidt in seiner Versuchsreihe für *Rückdiffusion* gemessen hat.
b) Wählt man andererseits als Medium II Al und setzt $d_{II} = 9{,}5 \cdot 10^{-3}$ cm und variiert I und d_I, so ist die gesuchte Intensität mit derjenigen identisch, die Schmidt als „hindurchgegangene" Intensität zur Untersuchung der *Absorption* gemessen hat.

Bei der Versuchsreihe a) werden wir uns namentlich für die Fälle $d_{II} = \infty$ und $d_{II} = 0$ interessieren; die gesuchten Intensitätsbruchteile hängen dann eng mit der Schmidtschen „*Rückdiffusionskonstanten*" p zusammen (vgl. § 10). Bei der Versuchsreihe b), die wir nur zur Bestimmung des wahren Absorptionskoeffizienten α benötigen, wird es für unsere Zwecke ausreichend sein, $d_I = 0$ zu setzen, d. h. die dünne Al-Schicht überhaupt zu vernachlässigen.

§ 4. Definitionen.

In Anbetracht der Symmetrieverhältnisse reicht die z-Koordinate allein zur Ortsbeschreibung aus. Desgleichen genügt eine einzige Winkelkoordinate φ zur Beschreibung der momentanen Bewegungsrichtung einer Partikel; φ sei der Winkel zwischen der positiven z-Achse und dem Geschwindigkeitsvektor.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die betrachtete Partikel eine Strecke s im streuenden und absorbierenden Medium *ohne Ablenkung und unabsorbiert* zurücklegt, ist

$$e^{-\mu s}, \tag{1}$$

wo μ die (streuende + absorbierende) Atomquerschnittssumme pro ccm des betreffenden Mediums bedeutet. Wir unterscheiden die Koeffizienten μ der beiden Medien I und II durch Indizes: μ_I und μ_{II}.

Für die Wahrscheinlichkeit, daß eine in der Richtung φ ankommende Partikel auf der unendlich kurzen Wegstrecke ds

in den infinitesimalen Richtungskegel ψ bis $\psi + d\psi$ abgelenkt wird, führen wir (wie in I) die Bezeichnung ein:

$$(2) \qquad ds \cdot d\psi \cdot F(\varphi\,\psi)\,.$$

Es gilt dann die (in I, S. 346, Gl. (5), abgeleitete) Formel:

$$(3) \qquad F(\varphi\,\psi) = \frac{\sin\varphi}{2\pi} \cdot \oint \frac{d\vartheta \cdot F(\vartheta\,\vartheta)}{\sqrt{[\cos(\varphi-\psi)-\cos\vartheta][\cos\vartheta-\cos(\varphi+\psi)]}}\,.$$

Wir unterscheiden auch die Ablenkungswahrscheinlichkeiten F in den Medien I und II durch Indizes: $F_{\mathrm{I}}(\varphi\,\psi)$ und $F_{\mathrm{II}}(\varphi\,\psi)$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Partikel auf der Wegstrecke ds auf ein Atom auftrifft, ist nach (1):

$$1 - e^{-\mu \cdot ds} = \mu \cdot ds\,.$$

Bei einem solchen Stoß kann die Partikel entweder absorbiert (d. h. völlig gebremst) oder nur aus ihrer Bahn abgelenkt werden. Die Wahrscheinlichkeit für eine Ablenkung (in eine beliebige Richtung) ist nach der Definition (2) gleich

$$ds \cdot \int_0^{\pi} d\psi\, F(\varphi\,\psi)$$

(unabhängig von φ!); die Wahrscheinlichkeit für die Absorption sei $\alpha \cdot ds$ ($\alpha_{\mathrm{I}} \cdot ds$ bzw. $\alpha_{\mathrm{II}} \cdot ds$ in den Medien I bzw. II). Die fundamentale Wahrscheinlichkeitsfunktion F ist demnach mit der Atomquerschnittssumme μ und dem wahren Absorptionskoeffizienten α durch die Gleichung verbunden:

$$(4) \qquad \int_0^{\pi} d\psi\, F(\varphi\,\psi) = \mu - \alpha\,.$$

[Vgl. I, Gl. (24), wo $\alpha = 0$.]

Wir stellen uns vor, es werde eine Partikel an einer beliebigen Stelle z im Innern oder am Rande der streuenden Schicht ($-d_{\mathrm{II}} \leqq z \leqq d_{\mathrm{I}}$) in der Richtung φ abgeschossen. Die Wahrscheinlichkeit, daß diese Partikel nach gerade n-maliger Ablenkung ($n = 0, 1, 2, \ldots$) auf der Seite des Mediums I (d. h. in einer Richtung zwischen 0 und $\pi/2$, an der Begrenzungsebene $z = d_{\mathrm{I}}$) aus der Schicht austritt, werde mit

$$(5) \qquad J_n(z, \varphi)$$

bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein solcher Austritt überhaupt irgend einmal (nach beliebig vielen Ablenkungen)

erfolgt, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß die Partikel *nicht* an der anderen Seite (II) austritt und auch nicht vor dem Austritt absorbiert wird, ist dann:

$$J(z,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(z,\varphi). \tag{6}$$

In der Versuchsanordnung von Schmidt wurden die Partikeln in der Ebene $z = 0$ abgeschossen, und zwar in kugelsymmetrisch verteilter Intensität. Auf den Richtungsbereich φ bis $\varphi + d\varphi$ entfiel somit der Intensitätsbruchteil:

$$\frac{d\varphi \sin\varphi}{\int_0^{\pi} d\varphi \sin\varphi} = \frac{d\varphi \sin\varphi}{2}.$$

Der gesamte an der Seite I austretende Intensitätsbruchteil, nach dem in § 3 gefragt wurde, schreibt sich demnach:

$$U = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} d\varphi \sin\varphi \cdot J(0,\varphi). \tag{7}$$

§ 5. Integrodifferentialgleichung für $J(z,\varphi)$.

Eine in Richtung *abnehmender* z $\left(\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right)$ abgeschossene Partikel kann sicher nicht ohne vorherige Ablenkung an der Seite I austreten; gemäß Definition von $J_0(z,\varphi)$ ist deshalb

$$J_0(z,\varphi) = 0 \qquad \text{für} \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi, \\ -d_{II} \leqq z \leqq d_I. \end{cases} \tag{8}$$

Bei einer in Richtung *wachsender* z abgeschossenen Partikel $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ haben wir zu unterscheiden, ob sie im Medium I ($z > 0$) oder im Medium II ($z < 0$) abgeschossen wird. Im ersten Falle erhalten wir die Wahrscheinlichkeit, daß sie unabgelenkt an der Seite I austritt, einfach dadurch, daß wir in (1) $\mu = \mu_I$ und s gleich der Wegstrecke $\frac{d_I - z}{\cos\varphi}$ von z bis zur Austrittsstelle d_I setzen:

$$J_0(z,\varphi) = e^{-\frac{\mu_I (d_I - z)}{\cos\varphi}} \qquad \text{für} \begin{cases} 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leqq z \leqq d_I. \end{cases} \tag{9}$$

Erfolgt der Abschuß im Medium II ($z < 0$), so hat man zunächst die Wahrscheinlichkeit unabgelenkten Durchgangs durch das Medium II (bis $z = 0$) zu bilden: $e^{+\frac{\mu_{II} z}{\cos\varphi}}$, und diese noch mit der Wahrscheinlichkeit unabgelenkten Durchgangs durch die ganze Schicht I (von 0 bis d_1), d. h. mit $e^{-\frac{\mu_1 d_1}{\cos\varphi}}$, zu multiplizieren:

$$J_0(z,\varphi) = e^{-\frac{\mu_1 d_1 - \mu_{II} z}{\cos\varphi}} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ -d_{II} \leqq z \leqq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Aus (8, (9) und (10) ist ersichtlich, daß unter allen Umständen:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-\frac{\mu z}{\cos\varphi}} J_0(z,\varphi)\right) = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 < \varphi < \pi, \\ -d_{II} \leqq z \leqq d_1. \end{cases} \tag{11}$$

Hier hat man unter μ den Wert des Streuungskoeffizienten an der Stelle z zu verstehen; also:

$$\mu = \begin{cases} \mu_1 & \text{für } 0 < z \leqq d_1, \\ \mu_{II} & \text{für } -d_{II} \leqq z < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Wir fragen nun nach der Wahrscheinlichkeit $J_n(z,\varphi)$ eines Austritts nach gerade n-maliger Ablenkung ($n \geqq 1$) und führen sie auf die Wahrscheinlichkeiten (1), (2) und $J_{n-1}(z,\varphi)$ zurück. Wir lassen den Abschuß zunächst im Medium I in Richtung wachsender z $\left(0 \leqq z \leqq d_1,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ erfolgen. Die erste der n Ablenkungen erfolge an der Stelle x. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Partikel von z bis x unabgelenkt durchgeht, auf der Strecke $dx/\cos\varphi$ aber in den Winkelbereich ψ bis $\psi + d\psi$ abgelenkt wird und dann schließlich nach $n-1$ weiteren Ablenkungen an der Seite I austritt, ist nach (1) und (2):

$$e^{-\frac{\mu_1 (x-z)}{\cos\varphi}} \cdot \frac{dx}{\cos\varphi}\, d\psi\, F_1(\varphi,\psi) \cdot J_{n-1}(x,\psi).$$

Integrieren wir diesen Ausdruck über x von z bis d_1 und über ψ von 0 bis π, so erhalten wir offensichtlich $J_n(z,\varphi)$:

$$(13)\quad \begin{cases} J_n(z,\varphi) = \int_z^{d_1} \frac{dx}{\cos\varphi} \cdot e^{-\frac{\mu_1(x-z)}{\cos\varphi}} \cdot \int_0^{\pi} d\psi\, F_1(\varphi\psi) \cdot J_{n-1}(x,\psi) \\ \text{für} \quad \begin{cases} 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leqq z \leqq d_1. \end{cases} \end{cases}$$

Erfolgt der Abschuß im Medium I in Richtung abnehmender z $\left(0 \leqq z \leqq d_1,\ \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right)$, so hat man zu unterscheiden, ob die erste Ablenkung schon im Medium I ($z > x > 0$) oder erst im Medium II ($0 > x > -d_{II}$) erfolgt. Dementsprechend setzt sich $J_n(z,\varphi)$ aus zwei Termen zusammen:

$$(14)\quad \begin{cases} J_n(z,\varphi) = \int_z^{0} \frac{dx}{\cos\varphi} \cdot e^{-\frac{\mu_1(x-z)}{\cos\varphi}} \cdot \int_0^{\pi} d\psi\, F_1(\varphi\psi)\, J_{n-1}(x,\psi) \\ \qquad + \int_0^{-d_{II}} \frac{dx}{\cos\varphi} \cdot e^{-\frac{\mu_{II}x - \mu_1 z}{\cos\varphi}} \cdot \int_0^{\pi} d\psi\, F_{II}(\varphi\psi) \cdot J_{n-1}(x,\psi) \\ \text{für} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi, \\ 0 \leqq z \leqq d_1. \end{cases} \end{cases}$$

Analoge Formeln ergeben sich für den Fall des Abschusses im Medium II ($-d_{II} \leqq z \leqq 0$).

Man bemerkt, daß sich auf den rechten Seiten der Gl. (13) und (14) der Faktor $e^{+\frac{\mu_1 z}{\cos\varphi}}$ isolieren läßt; bei den entsprechenden Gleichungen für $-d_{II} \leqq z \leqq 0$ ist es der Faktor $e^{+\frac{\mu_{II} z}{\cos\varphi}}$. Unter Benutzung der zusammenfassenden Bezeichnung (12) für die Streuungskoeffizienten der beiden Medien und einer analogen Bezeichnung für die Funktionen F_I und F_{II} erhält man *allgemein*:

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-\frac{\mu z}{\cos\varphi}} J_n(z,\varphi)\right) = -\frac{e^{-\frac{\mu z}{\cos\varphi}}}{\cos\varphi} \cdot \int_0^{\pi} d\psi\, F(\varphi\psi)\, J_{n-1}(z,\psi) \\ \text{für} \quad \begin{cases} 0 < \varphi < \pi, \\ -d_{II} \leqq z \leqq d_1, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Summiert man die Gleichungen (15) über n von 1 bis ∞ und

addiert außerdem Gl. (11), so kann man *beiderseits* die Bezeichnung (6) benutzen und erhält:

$$(16)\quad \cos\varphi \cdot \frac{\partial J(z,\varphi)}{\partial z} - \mu \cdot J(z,\varphi) + \int_0^{\pi} d\psi\, F(\varphi\psi) \cdot J(z,\psi) = 0.$$

Dieser Integrodifferentialgleichung[1]) für J haben wir noch einige Grenzbedingungen beizugeben. Nach (9) bzw. (18) ist:

$$J_0(d_1, \varphi) = 1, \qquad J_n(d_1, \varphi) = 0, \qquad (n \geqq 1)$$
$$\text{für } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Andererseits [vgl. (8)]:

$$J_0(-d_{II}, \varphi) = 0, \qquad J_n(-d_{II}, \varphi) = 0, \qquad (n \geqq 1)$$
$$\text{für } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi.$$

Durch Summation über n folgt:

$$(17)\quad \begin{cases} J(d_1, \varphi) = 1 & \text{für } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ J(-d_{II}, \varphi) = 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi. \end{cases}$$

Die physikalische Bedeutung dieser Bedingungen ist unschwer einzusehen.

Ferner muß für $J(z,\varphi)$ Stetigkeit in beiden Variabeln (auch bei $z = 0$) verlangt werden, außer an den beiden singulären Stellen:

$$(18)\qquad z = d_1, \ \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad z = -d_{II}, \ \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

In der Tat erkennt man aus (8), (9), (10), (13), (14) leicht (für $\varphi = \pi/2$ mittels der Substitution $x = z + s \cdot \cos\varphi$), daß alle Glieder der Reihe (6) einzeln die genannten Stetigkeitseigenschaften besitzen.

In der Gleichung (16) und den genannten Grenzbedingungen haben wir unser Problem in mathematisch allgemeinster Weise gefaßt.

§ 6. Integration.

Wir stellen das Integral unseres Problems in Gestalt einer *stark konvergenten Reihe* dar, zu der wir gelangen, indem wir

1) Genau gesagt ist die (Gl. 16) eine *Differential*gleichung bezüglich der Ortsvariablen z, eine *Integral*gleichung bezüglich der Richtungsvariablen φ.

den im vorigen Paragraphen beschrittenen Weg in etwas veränderter Weise zurückgehen.

Wir führen eine Folge von Funktionen $I_n(z, \varphi)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ ein, die wir der Reihe nach den folgenden Differentialgleichungen und Grenzbedingungen unterwerfen:

$$(19)\quad \begin{cases} \cos\varphi \cdot \dfrac{\partial I_0(z,\varphi)}{\partial z} - \alpha \cdot I_0(z,\varphi) = 0, \\ I_0(d_I, \varphi) = 1 \qquad \text{für } \varphi < \dfrac{\pi}{2}, \\ I_0(-d_{II}, \varphi) = 0 \qquad \text{für } \varphi > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \cos\varphi \cdot \dfrac{\partial I_n(z,\varphi)}{\partial z} - \alpha \cdot I_n(z,\varphi) \\ \qquad + \displaystyle\int_0^{\pi} d\psi\, F(\varphi\psi) \cdot I_{n-1}(z,\psi) - (\mu-\alpha) \cdot I_{n-1}(z,\varphi) = 0, \\ I_n(d_I, \varphi) = 0 \qquad \text{für } \varphi < \dfrac{\pi}{2}, \\ I_n(-d_{II}, \varphi) = 0 \qquad \text{für } \varphi > \dfrac{\pi}{2}, \\ \qquad\qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Durch Summation der Gleichungen (19), (20) erkennt man unmittelbar, daß die Reihe

$$(21)\qquad J(z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(z, \varphi)$$

die Integrodifferentialgleichung (16) und die Grenzbedingungen (17) befriedigt.

Integration von (19) ergibt:

$$(22)\quad I_0(z, \varphi) = e^{-\frac{\alpha_I (d_I - z)}{\cos\varphi}} \qquad \text{für } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqq z \leqq d_I,$$

$$(23)\quad I_0(z, \varphi) = e^{-\frac{\alpha_I d_I - \alpha_{II} z}{\cos\varphi}} \qquad \text{für } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad -d_{II} \leqq z \leqq 0,$$

$$(24)\quad I_0(z, \varphi) = 0 \qquad \text{für } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi, \quad -d_{II} \leqq z \leqq d_I.$$

Die Formeln (22), (23), (24) sind genau analog den Formeln (9), (10) und (8) für $J_0(z, \varphi)$; in der Tat unterscheiden sich auch die Differentialgleichungen (19) und (11) nur in den

Koeffizienten a bzw. μ. Ebenso erhält man durch Integration von (20) Rekursionsformeln für die $I_n(z, \varphi)$, die den Formeln (13), (14) für die $J_n(z, \varphi)$ sehr verwandt sind:

$$(25)\quad \begin{cases} I_n(z,\varphi) = \int_z^{d_I} \frac{dx}{\cos\varphi} \cdot e^{-\frac{a_I(x-z)}{\cos\varphi}} \\ \qquad \left[\int_0^{\pi} d\psi\, F_I(\varphi\psi) \cdot I_{n-1}(x,\psi) - (\mu_I - \alpha_I) \cdot I_{n-1}(x,\varphi)\right] \\ \qquad \text{für } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqq z \leqq d_I. \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} I_n(z,\varphi) = \int_z^{0} \frac{dx}{\cos\varphi} \cdot e^{-\frac{a_{II}(x-z)}{\cos\varphi}} \\ \qquad \left[\int_0^{\pi} d\psi\, F_{II}(\varphi\psi) \cdot I_{n-1}(x,\psi) - (\mu_{II} - \alpha_{II}) \cdot I_{n-1}(x,\varphi)\right] \\ \qquad + \int_0^{d_I} \frac{dx}{\cos\varphi} \cdot e^{-\frac{a_I x - a_{II} z}{\cos\varphi}} \\ \qquad \left[\int_0^{\pi} d\psi\, F_I(\varphi\psi) \cdot I_{n-1}(x,\psi) - (\mu_I - \alpha_I) \cdot I_{n-1}(x,\varphi)\right] \\ \qquad \text{für } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad -d_{II} \leqq z \leqq 0. \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} I_n(z,\varphi) = \int_z^{0} \frac{dx}{\cos\varphi} \cdot e^{-\frac{a_I(x-z)}{\cos\varphi}} \\ \qquad \left[\int_0^{\pi} d\psi\, F_I(\varphi\psi) \cdot I_{n-1}(x,\psi) - (\mu_I - \alpha_I) \cdot I_{n-1}(x,\varphi)\right] \\ \qquad + \int_0^{-d_{II}} \frac{dx}{\cos\varphi} \cdot e^{-\frac{a_{II} z - a_I x}{\cos\varphi}} \\ \qquad \left[\int_0^{\pi} d\psi\, F_{II}(\varphi\psi) \cdot I_{n-1}(x,\psi) - (\mu_{II} - \alpha_{II}) \cdot I_{n-1}(x,\varphi)\right] \\ \qquad \text{für } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi, \quad 0 \leqq z \leqq d_I. \end{cases}$$

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} I_n(z,\varphi) &= \int_{z}^{-d_n} \frac{dx}{\cos\varphi} \cdot e^{-\frac{\alpha_n (x-z)}{\cos\varphi}} \\ &\qquad \left[\int_0^{\pi} d\psi\, F_n(\varphi\psi) \cdot I_{n-1}(x,\psi) - (\mu_n - \alpha_n) \cdot I_{n-1}(x,\varphi) \right] \\ &\qquad \text{für } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi, \quad -d_n \leqq z \leqq 0. \end{aligned} \right.$$

Bezüglich der Stetigkeitsforderungen sei bemerkt, daß jedes einzelne Glied der Reihe denselben genügt. Für $z = 0$ nämlich werden (22) und (23), (25) und (26), (27) und (28) identisch. Andererseits geht im Limes $\varphi = \pi/2$ (22) in (24), (23) in (24), (27) in (25) und (26) in (28) über, wie durch die Substitution $x = z + s \cdot \cos\varphi$ leicht nachgewiesen wird.

§ 7. Die Funktion $F(\varphi\psi)$.

Die bisherigen Erörterungen gelten für jedes beliebige Atommodell. Von jetzt ab stellen wir uns auf den Boden des Rutherford-Bohrschen Modells. Da wir es mit schnellen, schwer ablenkbaren β-Strahlen zu tun haben, werden wir im wesentlichen nur mit der *Kernablenkung* zu rechnen brauchen; nur bei den kleinsten Ablenkungen ($< 1^0$) wird sich die abschirmende Wirkung der Elektronenhülle (vgl. I, 3. Abschn., § 2) geltend machen. Wenn wir also zunächst von kleinen Ablenkungswinkeln φ absehen, können wir für die Wahrscheinlichkeit der Elementarablenkung $F(0, \varphi)$ den Rutherfordschen Ansatz:

$$(29)\quad F(0,\varphi) = -\varkappa \cdot \frac{d\,\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{d\varphi} \qquad (\varphi > 0).^1)$$

verwenden. Die Zahl $\varkappa$ setzt sich folgendermaßen aus lauter bekannten Materialkonstanten zusammen:

$$(30)\quad \varkappa = \pi n b^2, \qquad b = \frac{e^2 Z}{2T}.$$

n = Atomzahl pro ccm,
e = Elektronenladung,
eZ = Kernladung,
T = kinetische Energie eines β-Elektrons.

1) Vgl. Phil. Mag. 21. 1911. S. 674, Gl. (4) oder auch I, 3. Abschnitt, § 1, Gl. (33).

Aus (29) folgt mittels (8) [vgl. I, Gl. (39)]:

$$(31)\quad \begin{cases} F(\varphi\psi) = \varkappa \cdot \left| \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\sin\psi}{\cos\varphi - \cos\psi}\right)^2\right| = \varkappa \cdot \frac{2\sin\psi(1-\cos\varphi\cos\psi)}{|\cos\varphi - \cos\psi|^3} \\ (|\varphi - \psi| > 0). \end{cases}$$

Der Umstand, daß diese Formel bei kleinen Richtungsänderungen $|\varphi - \psi|$ unzuverlässig wird, bringt es mit sich, daß wir sie zur Auswertung der Formeln (25) bis (28) nur in den Fällen

$$\varphi < \tfrac{\pi}{2} < \psi \quad \text{und} \quad \psi < \tfrac{\pi}{2} < \varphi \quad \left(\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} < 0\right)$$

bequem verwenden können, dann aber auch ohne Bedenken, selbst wenn φ und ψ von beiden Seiten gleichzeitig gegen $\pi/2$ konvergieren. In letzterem Falle wird nämlich der durch fälschliche Anwendung von (31) begangene Fehler dadurch unterdrückt, daß die betreffenden Partikeln besonders stark absorbiert werden (Bewegung parallel zur Oberfläche; Faktor $e^{-\frac{a\varkappa}{\cos\varphi}} \ll 1$!).

Glücklicherweise können wir uns in allen Fällen, wo uns die Formel (31) im Stich läßt, mit einer noch bequemeren Näherung begnügen. Man beachte nämlich, daß die Funktion $F(\varphi\psi)$, in Abhängigkeit von ψ betrachtet, bei Annäherung von ψ an den Wert φ rapid ansteigt und in der Nähe von $\psi = \varphi$ ein oder zwei stark ausgeprägte Maxima besitzt. Physikalisch bedeutet dies, daß die kleinen Richtungsänderungen $(\varphi - \psi)$ sehr viel häufiger sind als die großen. Es scheint deshalb statthaft, in einem Integral von der Form

$$\int_0^\pi d\psi\, F(\varphi\psi)\cdot f(\psi)$$

die Funktion $f(\psi)$ nach Potenzen von $(\cos\psi - \cos\varphi)$ zu entwickeln und nach dem quadratischen Glied abzubrechen. Aus Formel (8), die in I, S. 846 bewiesen wurde, findet man aber leicht durch Umkehrung der Integrationsreihenfolge:

$$(32)\quad \int_0^\pi d\psi\, F(\varphi\psi)(\cos\psi - \cos\varphi) = -\cos\varphi\cdot\Theta,$$

$$(33)\quad \int_0^\pi d\psi\, F(\varphi\psi)(\cos\psi - \cos\varphi)^2 = \sin^2\varphi\cdot\Theta,$$

wenn man

$$\int_0^{\pi} d\psi\, F(0\,\psi)\,(1-\cos\psi) = \Theta \tag{34}$$

setzt und höhere Glieder:

$$\int_0^{\pi} d\psi\, F(\varphi\,\psi)\,(\cos\psi-\cos\varphi)^n \qquad (n \geqq 2)$$

vernachlässigt. Wie man durch Entwickeln des $\cos\psi$ nach ψ in (34) erkennt, ist 2Θ das mittlere Quadrat der Ablenkungen auf der Wegstrecke 1. Man kann also, vorausgesetzt daß die Funktion $f(\psi)$ die erforderlichen Stetigkeitseigenschaften besitzt, wegen (4), (32) und (33) mit guter Annäherung schreiben:

$$\left\{\begin{aligned}\int_0^{\pi} d\psi\, F(\varphi\,\psi) f(\psi) &= (\mu-\alpha)\cdot f(\varphi)\\ &+\Theta\cdot\left[-\cos\varphi\cdot\frac{d\,f(\varphi)}{d\cos\varphi}+\sin^2\varphi\cdot\frac{d^2 f(\varphi)}{d\cos\varphi^2}\right].\end{aligned}\right. \tag{35}$$

Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Formel ist, daß wirklich nur die *kleinen* Richtungsänderungen für den Wert des Integrals maßgebend sind.

Um den Zahlwert von Θ zu ermitteln, haben wir in der Formel (29) für $F(0\,\varphi)$ eine Korrektur für den Einfluß der Elektronenhülle der Atome (für kleine φ) anzubringen. Die hierher gehörigen Fragen sind im 3. Abschnitt der oben zitierten Arbeit I eingehend diskutiert. Wir übernehmen den dort (§ 4) begründeten Ansatz (44) für $F(0\,\varphi)$ hierher [man vgl. auch die dortige Formel (34)]:

$$F(0\,\varphi) = -\varkappa\frac{d\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{d\,\varphi}\cdot e^{-\left(\frac{b}{R}\right)^2\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}. \tag{36}$$

Hier bedeutet b die in (30) verwendete Länge, R den Atomradius, d. h. den nach der Bohrschen Theorie zu schätzenden mittleren Abstand der Elektronen vom Atomkern. Mit (34) und (36) erhält man:

$$\Theta = -2\varkappa\cdot e^{-(b/R)^2}\cdot Ei\left[-(b/R)^2\right]. \tag{37}$$

Die Funktion $Ei(-x)$ ist der bekannte Integrallogarithmus:

$$Ei(-x) = \int_{\infty}^{x} \frac{dx\, e^{-x}}{x}.$$

In unserem Falle ist wegen der hohen Geschwindigkeit der β-Strahlen $b \ll R$. Man erhält daher aus (37) nach Einsetzung einer bekannten Entwicklung sehr genau:

$$\Theta = 4\pi \cdot \left(\log \text{nat}\, \frac{R}{b} - \frac{C}{2}\right) \tag{38}$$

($C =$ Eulersche Konstante $= 0{,}5772$). Da hier der Atomradius R nur logarithmisch eingeht, ist die durch ihn hereingebrachte Unsicherheit nur eine geringe.[1])

§ 8. Allgemeine Folgerungen.

Es soll zunächst untersucht werden, was aus unseren Ansätzen wird, wenn wir die Formel (35) unbedingt und ohne Einschränkung in sie einführen. Die Integrodifferentialgleichung (16) geht durch sie in eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung vom Typus einer allgemeinen Wärmeleitungsgleichung über.[2]) Das oben angegebene Integrationsverfahren bleibt gültig, wenn man in den Formeln (25) bis (28) überall auf (35) Rücksicht nimmt. An Stelle von (25) erhält man beispielsweise:

$$I_n(z,\varphi) = \Theta \cdot \int_z^{d_1} \frac{dx}{\cos\varphi} \cdot e^{-\frac{a_1(x-z)}{\cos\varphi}} \cdot \left[-\cos\varphi \cdot \frac{\partial I_{n-1}(x,\varphi)}{\partial \cos\varphi} + \sin^2\varphi \cdot \frac{\partial^2 I_{n-1}(x,\varphi)}{\partial \cos\varphi^2}\right].$$

Der Umstand, daß hier das kleine mittlere Ablenkungsquadrat vor das Integralzeichen tritt, ist bestimmend für die starke

1) Auch die in (36) steckende Annahme über die Verteilung der Elektronen ist so gut wie belanglos. Wählt man nämlich statt (36) den anderen in I vorgeschlagenen Ansatz [daselbst (36)], so fällt in (38) nur der kleine Term $-\frac{C}{2}$ fort, wodurch sich Θ höchstens um einige Prozent ändert. Man vergleiche auch die eingehende Diskussion dieser Frage bei Bothe [Zeitschr. f. Phys. 4. S. 300. 1921, Gl. (10) S. 308 und 309].

2) Vgl. den Vortrag des Verf.s auf der Naturforscherversammlung in Leipzig. Phys. Zeitschr. 23. S. 435. 1922.

Konvergenz der Reihe ΣI_n und begründet nachträglich die spezielle Form unseres Ansatzes (19), (20), (21).

Indessen führt uns die Näherung (35) im Rahmen dieses Integrationsverfahrens nicht zu unserem eigentlichen Ziel, zur Ermittlung der Rückdiffusion. Da nämlich nach (24) für $\varphi > \pi/2$ $I_0(z, \varphi) = 0$ ist, wird vermöge (27) und (28) bei Verwendung von (35) für $\varphi > \pi/2$ auch $I_1(z, \varphi) = 0$, $I_2(z, \varphi) = 0$ usw., allgemein $I_n(z, \varphi) = 0$. Dies bedeutet: wird eine Partikel in Richtung abnehmender z ($\varphi > \pi/2$) abgeschossen, so gelingt es ihr *nicht*, durch eine *endliche* Zahl von Ablenkungen in eine Richtung $\varphi < \pi/2$ zu gelangen und in dieser Richtung (an der Seite I) auszutreten. In der Tat hatten wir die Näherungsformel (35) in der Voraussetzung abgeleitet, daß die sehr kleinen Ablenkungen für die Streuung bestimmend seien, so daß eine Rückdiffusion erst durch unendlich viele Ablenkungen zustande kommen kann. Unser Integrationsverfahren würde uns also bei durchgehender Verwendung der Näherungsformel (35) *keine Rückdiffusion* liefern. Damit ist noch nicht gesagt, daß die Differentialgleichung, in welche (16) durch (35) übergeht, überhaupt keine Rechenschaft von der Erscheinung der Rückdiffusion geben könne; während unsere Reihenlösung versagt, könnte es möglicherweise Integrale in anderer Form geben, die dem Problem gerecht werden. Wie dem auch sei: am bequemsten ist es jedenfalls, direkt von der *Integrodifferentialgleichung* (16) auszugehen und den Gebrauch der Formel (35) auf das Notwendige zu beschränken.

Zur Abkürzung der folgenden Formeln wollen wir dazu übergehen, alle Längen in Vielfachen von $1/\alpha$, d. i. der freien Weglänge der Absorption zu messen, indem wir setzen:

$$(39)\qquad \begin{cases} \alpha_{\mathrm{I}}\, d_{\mathrm{I}} = \delta_{\mathrm{I}}, & \alpha_{\mathrm{I}}\, z = \zeta, \quad \text{solange } z > 0, \\ \alpha_{\mathrm{II}}\, d_{\mathrm{II}} = \delta_{\mathrm{II}}, & \alpha_{\mathrm{II}}\, z = \zeta, \quad \text{solange } z < 0. \end{cases}$$

Wir betrachten zunächst diejenigen Partikeln, welche (in der Ebene $z = 0$) in Richtung *wachsender* z ($\varphi < \pi/2$) abgeschossen werden. Würden sie keine Streuung erleiden, so würde von ihnen der Bruchteil

$$(40)\qquad \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin\varphi\, I_0(0, \varphi) = e^{-\delta_1} + \delta_1 \cdot Ei(-\delta_1)$$

an der Seite I austreten. Der Einfluß der Streuung, welche die Partikeln bei der Durchquerung des Mediums I erfahren, gibt sich in den höheren Gliedern

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \sin\varphi \, I_n(0,\varphi) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

kund. Dieser Einfluß wird, sofern die Dicke d_1 nicht sehr groß ist, nur von untergeordneter Größe sein; man wird sich deshalb bei Berechnung des ersten Zusatzgliedes bereits mit der Näherung (35) begnügen und das zweite Glied schon vernachlässigen können:

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \sin\varphi \, I_1(0,\varphi) = -\frac{1}{6} \frac{\Theta_1}{\alpha_1} \cdot \delta_1 \cdot e^{-\delta_1}, \tag{41}$$

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \sin\varphi \, I_n(0,\varphi) \cong 0 \qquad (n \geqq 2). \tag{42}$$

Wie das negative Vorzeichen in (41) aussagt, hat die Streuung eine *Verstärkung* der Absorption zur Folge; in der Tat wird die von einer Partikel im Schichtinnern zurückgelegte Wegstrecke, wie man leicht einsieht, durch die Streuung öfter und mehr vergrößert als verkleinert. Bei den folgenden Berechnungen der Rückdiffusion wird der Term (41) immer sehr klein gegen (40) sein, so daß die Vernachlässigung der höheren Terme berechtigt scheint. Auch bei der Ermittlung des wahren Absorptionskoeffizienten werden wir uns auf hinreichend kleine Dicken d_1 beschränken können.

Von den in Richtung *abnehmender* z ($\varphi > \pi/2$) ausgesandten Partikeln kann keine ohne vorherige Ablenkung an der Seite I zum Austritt gelangen:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \sin\varphi \, I_0(0,\varphi) = 0. \tag{43}$$

Hier bildet also der Term mit I_1 den wichtigsten Bestandteil, den *Hauptbeitrag der Rückdiffusion*. Wegen (24) haben wir diesen Term aus (27/28) mittels der Formel (31) *exakt* ausintegrieren können:

$$
(44)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \sin\varphi\, I_1(0,\varphi) = \frac{\varkappa_{II}}{3\sigma_{II}} \\ &\quad \cdot \left[\left\{ e^{-\delta_I} \left(\frac{2}{\delta_I} + \frac{1}{2} \right) + e^{+\delta_I} \cdot \delta_I \cdot Ei(-2\delta_I) \right\} \right. \\ &\quad - e^{-(\delta_{II}+\sigma)} \cdot \left\{ \frac{\delta_{II}+\sigma}{2\delta_I} + \frac{2\sigma^2 + 5\delta_{II}\sigma - \delta_{II}^2}{\delta_I^2} \right\} \\ &\quad - e^{\delta_I} \cdot Ei(-2\sigma) \cdot \left\{ \frac{\sigma^2(\sigma - 3\delta_{II})}{\delta_I^3} + 6\delta_{II}\sigma^2 \cdot \frac{\delta_I - 1}{\delta_I^4} \right\} \\ &\quad \left. - e^{-\delta_I} \cdot Ei(-2\delta_{II}) \cdot \left\{ \frac{\delta_{II}^2(3\sigma - \delta_{II})}{\delta_I^3} + 6\delta_{II}\sigma^2 \cdot \frac{\delta_I + 1}{\delta_I^4} \right\} \right] . \end{aligned} \right.
$$

Hier bedeutet:

$$
(45)\qquad \sigma = \delta_I + \delta_{II} = \alpha_I d_I + \alpha_{II} d_{II} .
$$

Für $\delta_{II} = 0$ wird die rückdiffundierte Intensität (44) Null, wie auch physikalisch zu fordern ist. Bei wachsendem δ_{II}

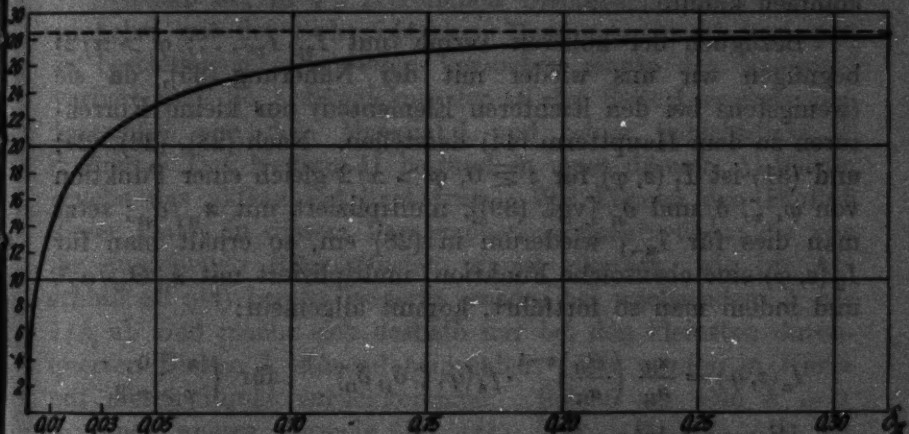


Fig. 2.

nimmt (44) monoton zu und nähert sich schnell einem Sättigungswert, der durch den in der zweiten Zeile von (44) stehenden Ausdruck dargestellt wird ($\delta_{II} = \infty$, $\sigma = \infty$). Fig. 2 stellt den Term (44) für $\frac{\varkappa_{II}}{3\sigma_{II}} = 1$ und $\delta_I = 0{,}0665$ (vgl. § 10) in Abhängigkeit von δ_{II} graphisch dar.

Bemerkenswerterweise zeigt (44) auch eine ausgeprägte Abhängigkeit von der Dicke δ_I der Unterlageplatte, die Schmidt als ziemlich nebensächlich ansah; der Sättigungswert speziell geht in der Hauptsache mit $1/\delta_I$. Auch die Schmidtschen „Rück-

diffusionskonstanten" (vgl. § 10) sind hiernach stark von δ_1 abhängig und *haben also durchaus nicht den Charakter von Materialkonstanten des Mediums II.*[1]) Diese Abhängigkeit von δ_1 erklärt sich daraus, daß die rückdiffundierte Intensität überwiegend beinahe streifend aus der Schicht I austritt und daher in dieser durch Absorption beträchtliche Verluste erleidet. Für $\delta_1 = 0$ wird der Ausdruck (44) sogar unendlich, was natürlich physikalisch sinnlos ist. In Wirklichkeit liegt hier der Fall vor, daß die Formel (31) für $\varphi \sim \pi/2 \sim \psi$ unzuverlässig wird und der durch ihre Anwendung begangene Fehler nicht mehr durch hinreichend starke Absorption in der Vorschaltdicke δ_1 unterdrückt wird (vgl. § 7). Unsere Formeln gelten also nur für den Fall, daß überhaupt eine Vorschaltdicke $\delta_1 > 0$ vorhanden ist; in praxi wird ihre Dicke nie so klein sein, daß der durch fälschliche Anwendung von (31) begangene Fehler in (44) zur Geltung kommen könnte.

Bezüglich der höheren Terme (mit I_2, I_3, ...; $\varphi > \pi/2$) begnügen wir uns wieder mit der Näherung (35), da sie (wenigstens bei den leichteren Elementen) nur kleine Korrekturen zu dem Hauptterm (44) darstellen. Nach (28), (23), (24) und (31) ist $I_1(z, \varphi)$ für $z \gtrless 0$, $\varphi > \pi/2$ gleich einer Funktion von φ, ζ, δ_1 und δ_{II} [vgl. (39)], multipliziert mit $\varkappa_{II}/\alpha_{II}$; setzt man dies für I_{n-1} wiederum in (28) ein, so erhält man für $I_2(z, \varphi)$ eine ebensolche Funktion, multipliziert mit $\varkappa_{II}\,\Theta_{II}/\alpha_{II}^2$, und indem man so fortfährt, kommt allgemein:

$$I_n(z, \varphi) = \frac{\varkappa_{II}}{\alpha_{II}} \left(\frac{\Theta_{II}}{\alpha_{II}}\right)^{n-1} \cdot f_n(\varphi, \zeta, \delta_1, \delta_{II}) \qquad \text{für} \quad \begin{cases} z \gtrless 0, \\ \varphi > \pi/2. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$(46) \qquad \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \sin\varphi\, I_n(0, \varphi) = \frac{\varkappa_{II}}{\alpha_{II}} \left(\frac{\Theta_{II}}{\alpha_{II}}\right)^{n-1} \cdot f_n(\delta_1, \delta_{II}) \quad (n \geqq 1).$$

Diese Formel ist natürlich cum grano salis zu verstehen, da ja die Anwendung der Näherung (35) überhaupt nur dann angängig ist, wenn das Glied $n = 2$ bereits sehr klein ist und die folgenden praktisch verschwinden. Mit Rücksicht hierauf können wir an Stelle von (46) auch schreiben:

---

1) Diese Aussage der Theorie dürfte sich durch Wiederholung der Schmidtschen Messungen bei variierter Unterlageplatte leicht prüfen lassen.

$$(47)\qquad \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \sin\varphi \, I_n(0,\varphi) = \left(\frac{\varkappa_{II}}{\sigma_{II}}\right)^n \cdot f_n(\delta_I, \delta_{II}) \qquad (n \geqq 1),$$

indem wir Θ_{II} einfach proportional $\varkappa_{II}$ setzen und die geringe logarithmische Abhängigkeit von R/b, wie sie in (38) zum Ausdruck kommt, vernachlässigen. Auf die Ermittlung der Funktionen $f_n(\delta_I, \delta_{II})$ für $n \geqq 2$ können wir verzichten. Für das Folgende genügt uns zu wissen, daß im Grenzfall $\delta_{II} = 0$:

$$(48)\qquad f_n(\delta_I, 0) = 0 \qquad (n \geqq 1)$$

wird, wie physikalisch zu fordern und auch aus (28) abzulesen ist.

Die Formeln (46), (47), (48) gelten gemäß (44) auch für $n = 1$.

§ 9. Bestimmung des wahren Absorptionskoeffizienten.

Gemäß der in § 2 getroffenen Disposition haben wir uns zunächst mit der Schmidtschen Messungsreihe b) (vgl. § 8) zu beschäftigen. In diesen Versuchen wurde das Medium I variiert und die Abhängigkeit der an der Seite I austretenden Intensität von dem Material I und seiner Schichtdicke d_I studiert. Das Medium II bestand in einer dünnen Al-Platte, welche das aktive Präparat trug. Wir können den Einfluß dieser Platte in diesem Paragraphen vernachlässigen; die von ihr ausgehende Rückdiffusion nimmt nämlich, wie im Anschluß an (44) bereits bemerkt wurde, bei wachsendem δ_I wie $1/\delta_I$ ab und macht sich deshalb nur bei den kleinsten durchquerten Dicken δ_I störend bemerkbar. Wir werden in Kürze auf diesen Punkt zurückkommen. Setzen wir also $\delta_{II} = 0$, so geben unsere Formeln (40), (41), (42), (43), (47), (48) für die durchgegangene Intensität (7), (21):

$$(49)\qquad \begin{cases} U_0 = \frac{1}{2}\left[e^{-\delta_I} + \delta_I \cdot Ei(-\delta_I) - \frac{1}{6}\frac{\Theta_I}{\sigma_I}\delta_I \cdot e^{-\delta_I}\right] \\ (\delta_I = \alpha_I d_I, \quad \delta_{II} = 0). \end{cases}$$

Wir haben nun das wahre Absorptionsvermögen α_I des variierten Mediums für jedes Material so zu bestimmen, daß unsere Formel (49) die Ergebnisse der Messungen von Schmidt in möglichst guter Übereinstimmung wiedergibt.

Zur Kenntnis des Zahlwertes von Θ benötigen wir nach (38) die Kenntnis von $\varkappa$, b und R. Wie oben schon bemerkt wurde, genügt für den Atomradius R, welcher nur logarith-

misch eingeht, eine grobe Schätzung. Wir wählen (wie in I) in jedem Atom unter den Kosselschen Elektronenschalen diejenige aus, welche die meisten Elektronen enthält, (bei Al die L-Schale, bei Zn und Sn die M-Schale und bei Pb die N-Schale) und setzen ihren (nach der Bohrschen Formel I, (47)) geschätzten Radius für R ein. Zur Berechnung von b und $\varkappa$ brauchen wir nach (30) außer den Materialdaten (Ordnungszahl Z, Atomzahl n = Loschmidtzahl mal Dichte durch Atomgewicht) nur die kinetische Energie T der β-Strahlen zu kennen.

Hier begegnen wir der Schwierigkeit, daß die von Schmidt verwendeten β-Strahlen des Ur X der Geschwindigkeit nach nicht homogen sind, sondern ein verwaschenes Spektrum von etwa 0,78 c bis 0,98 c bilden, von dem wir keine sehr genaue Kenntnis besitzen. Lenard gibt in seinem Bericht „Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten" (Heidelberger Akademie 1918), S. 124, eine graphische Darstellung des mutmaßlichen spektralen Intensitätsverlaufs, die sich auf eine photographische Aufnahme des magnetischen Spektrums von v. Baeyer, Hahn und Meitner stützt. Die Kurve zeigt Maxima bei 0,82 c und bei 0,96 c, sowie ein Minimum bei etwa 0,86 c. Um die Unhomogenität der Strahlen zu berücksichtigen, andererseits aber — angesichts der Unsicherheit der empirischen Kenntnis — die Genauigkeit und Komplikation der Rechnung nicht unnötig weit zu treiben, haben wir versucht, das Spektrum in erster Näherung durch 2 Spektrallinien zu ersetzen. Wir haben es zu diesem Zwecke an der Stelle 0,88 c auseinandergeschnitten und die Schwerpunkte und Gesamtintensitäten beider Teilspektren, des langsamen und des schnellen, bestimmt. Der Schwerpunkt des schnellen Spektrums kommt auf 0,94 c, der des langsameren Spektrums auf 0,84 c zu liegen; insgesamt ist das schnelle Spektrum 4 mal so intensiv wie das langsamere. Wir haben unsere β-Strahlung also aus 2 Spektrallinien bei 0,84 c und bei 0,94 c von den Intensitäten 0,2 bzw. 0,8 zusammengesetzt zu denken. Die Formel (49) ist für jede Linie gesondert auszuwerten, und die Ergebnisse sind dann mit 0,2 bzw. 0,8 zu multiplizieren und zu addieren. Zur Berechnung der kinetischen Strahlenergie aus der Geschwindigkeit wurde die Einsteinsche Formel benutzt. Die damit erhaltenen Zahlwerte von Θ sind in Tab. 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

	Al	Zn	Sn	Pb
Schnelle Strahlung . . .	5,0	26	34	76 cm^{-1}
Langsame Strahlung . . .	23	122	152	334 cm^{-1}

Die beiden β-Spektrallinien haben natürlich verschiedene Absorptionskoeffizienten α; die langsame Strahlung wird sehr viel stärker absorbiert als die schnelle. Nach einer Kurve, die Lenard in seinem oben genannten Berichte (Tafel III) mitteilt, verhalten sich die *praktischen* Absorptionskoeffizienten der Geschwindigkeiten 0,94 c und 0,84 c in Al und Luft ungefähr wie 1 : 8. Wir wollen dies auf die *wahren* Absorptionskoeffizienten und auf die übrigen Stoffe übertragen. Wir begehen damit sicher keinen nennenswerten Fehler, da die langsame Strahlung sowohl ihrer geringeren Intensität als ihres größeren Absorptionsvermögens wegen von ganz untergeordneter Bedeutung ist, so daß wir ihren Absorptionskoeffizienten nur in grober Annäherung zu kennen brauchen. Dagegen geht der Absorptionskoeffizient der *schnellen* Strahlung (0,94 c) entscheidend in unsere Rechnung ein; indem es uns gelingt, durch geeignete Wahl desselben Übereinstimmung zwischen unserer Formel (49) und den Versuchsergebnissen herzustellen, können wir über seine Größe einigermaßen zuverlässige Angaben machen, während über das Absorptionsvermögen der *langsamen* Strahlung nichts Genaues ausgesagt werden kann.

Die beste Übereinstimmung wird erzielt, wenn man für die wahren Absorptionskoeffizienten der Spektrallinie 0,94 c die folgenden Zahlwerte in (49) einsetzt:

(50) Al: 7 cm^{-1}, Zn: 22 cm^{-1}, Sn: 20 cm^{-1}, Pb: 80 cm^{-1}.

Die Güte der Übereinstimmung ist aus Fig. 8 zu ersehen. In dieser sind als Abszissen die Schichtdicken d (für die verschiedenen Metalle in verschiedenen Maßstäben), als Ordinaten die dekadischen Logarithmen der durchgegangenen Intensitäten abgetragen. Die Punkte ∘ stellen die von Schmidt gemessenen Intensitäten dar; sie sind aus den Figg. 4 und 5 seiner Arbeit entnommen. Die ausgezogenen Kurven sind durch Auswertung der Formel (49) erhalten. Wie man sieht, sind die *mittleren Kurventeile* in vollkommener Übereinstimmung

mit dem experimentellen Befund. An den Enden dagegen zeigen die berechneten Kurven eine systematische Abweichung, meist (bei Pb, Sn und Zn) nach *unten*. Der Grund hierfür liegt darin, daß wir einerseits die Rückdiffusion in der hintergeschalteten Al-Schicht II, andererseits die höheren Glieder (42) vernachlässigt haben. In der Tat wird die Rückdiffusion nach obigem nur bei kleinsten Dicken d_1 merklich und *erhöht* die experimentellen gegenüber den berechneten Intensitäten um ein Geringes. Bei größeren Dicken andererseits beginnt das

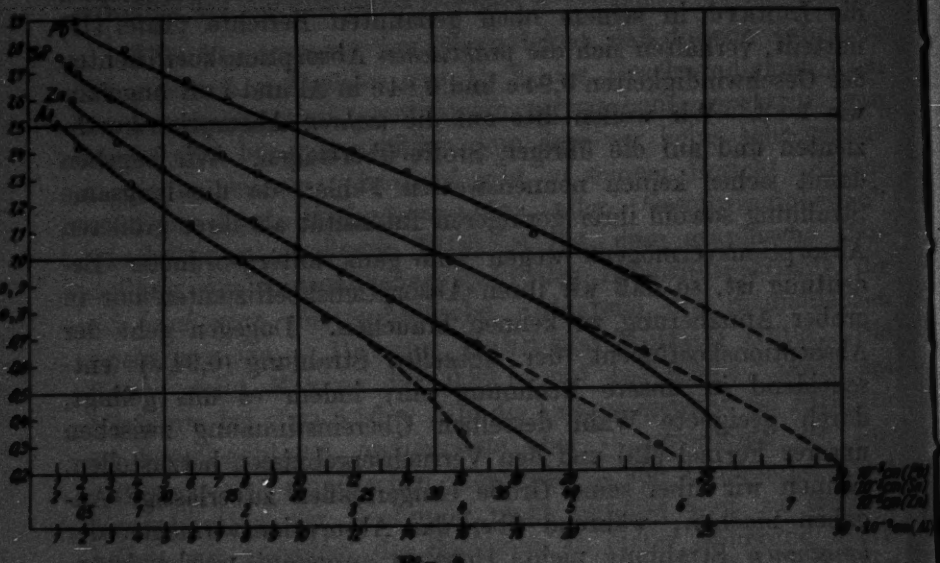


Fig. 3.

Streuungsglied (41) in die Größenordnung des Hauptgliedes (40) hereinzuwachsen und veranlaßt in dem Augenblick, wo es etwa die halbe Größe des Hauptgliedes erreicht, eine plötzliche Abbiegung der Kurve nach unten, so daß der Ausdruck (49) schnell gegen 0, der Logarithmus gegen $-\infty$ geht. Es ist klar, daß in demselben Augenblick das vernachlässigte Glied (42) zu maßgebender Bedeutung kommen und diesen rapiden Abstieg (zu sinnlosen negativen Intensitäten) aufhalten muß. Wir können also von unserer Formel (49) nur bei mittleren Schichtdicken eine exakte Wiedergabe des Sachverhalts verlangen, und diese liefert sie in der Tat.

Fig. 3 zeigt auch aufs deutlichste, wie der scheinbar exponentielle Abfall der diffus durchgegangenen Intensität

zustande kommt. Das Hauptglied (40) allein würde, logarithmisch dargestellt, durchaus keine Gerade, sondern eine nach oben konkave Kurve geben.[1]) Das Streuungsglied (41) aber biegt dieselbe bei wachsendem δ_1 in immer stärkerem Maße nach unten ab, so daß die Krümmung erst nur geschwächt, dann Null und schließlich umgekehrt wird. Dank dem Umstande, daß das Verhältnis Θ/α von der Größenordnung 1 ist, erfolgt diese Abbiegung gerade in solcher Stärke, daß die Kurve auf eine Strecke hinaus fast geradlinig wird. In Wirklichkeit scheint sich die leicht geschweifte Kurve mit ihrem Wendepunkt den experimentellen Punkten sogar noch feiner anzuschließen als die Gerade. Ferner ist bemerkenswert, daß auch die experimentelle Kurve an derselben Stelle, wo nach unserer Rechnung (42) das nächste Glied zum ersten Mal zur Geltung kommen sollte, deutlich aus ihrer geradlinigen Richtung abbiegt; zunächst nach unten[2]), späterhin wieder nach oben. (Man vergleiche die punktierten Kurven bei Al und Sn! Bei Al tritt die Abbiegung der berechneten gegenüber der experimentellen Kurve sogar etwas zu spät ein.) Wir müssen uns leider versagen, in diesem Zusammenhang näher auf den Intensitätsabfall bei großen Schichtdicken einzugehen.

Variiert man die α-Werte (50) um 5—10 Proz., so wird die Übereinstimmung der Kurven bereits merklich schlechter. Wir möchten hiernach annehmen, daß die Zahlen (50) in Anrechnung der Unsicherheit der Θ-Werte, um nicht mehr als 15 Proz. falsch sind. *Von einer Proportionalität mit der Dichte kann höchstens in großen Zügen die Rede sein.* Nach (50) ist α bei Zn ein wenig größer als bei Sn, während Sn die größere Dichte hat (Sn: 7,8, Zn: 7,2). Es ist sehr unwahrscheinlich, daß diese Umkehrung der Größenverhältnisse durch Fehler vorgetäuscht sei, wenn auch die oben angegebene Fehlergrenze der Rechnung diese Annahme an und für sich nicht verbietet; auch spricht das im folgenden Paragraphen zu behandelnde Zahlenmaterial der Rückdiffusion für die Richtigkeit der

---

1) Vgl. Fig. 10 bei Schmidt a. a. O., S. 690. Gl. (30) bei Schmidt ist (nach Beseitigung eines Druckfehlers, der sich auch bei Lenard, a. a. O. S. 238, Note 679, wiederfindet) mit unserer Gl. (40) identisch.

2) Schmidt bringt diese Abbiegung mit dem *Geschwindigkeitsverlust* der Strahlen in Zusammenhang. Wir können nicht entscheiden, wie weit dieser an der Erscheinung beteiligt ist.

Zahlen (50). Die theoretische Aufklärung dieses Sachverhalts muß einer künftigen Theorie der Kathodenstrahlabsorption vorbehalten bleiben.

§ 10. Die Rückdiffusion.

Hier ist die Schmidtsche Messungsreihe a) (vgl. § 3) zu besprechen, in welcher das Medium I durch die dünne Al-Platte ($d_1 = 9{,}5 \cdot 10^{-3}$ cm, $\delta_1 = 6{,}65 \cdot 10^{-2}$ nach (50)) repräsentiert war und das Medium II variiert wurde. Es wurde einerseits die Intensität U_0 bei fehlender Platte II ($\delta_{II} = 0$) gemessen, andererseits der *Zuwachs* der Intensität $U - U_0$ in Abhängigkeit von der variierten Dicke d_{II}. Das Verhältnis

$$q = \frac{U - U_0}{U_0} = \frac{U}{U_0} - 1 \tag{51}$$

hat Schmidt in seiner Fig. 3 in Abhängigkeit von d_{II} graphisch dargestellt; läßt man d_{II} von 0 gegen ∞ zunehmen, so wächst q (ähnlich wie unsere Kurve, Fig. 2) von 0 gegen einen Sättigungswert q_∞, der von Schmidt als *Rückdiffusionskonstante* (p) bezeichnet wird. Die Rückdiffusionskonstanten q_∞ haben nach Schmidt bei den von ihm untersuchten Metallen die folgenden Werte:

(52) Al: 0,270, Zn: 0,432, Sn: 0,575, Pb: 0,684.

Die Intensität U_0 (*ohne* Rückdiffusion) haben wir in Formel (50) bereits dargestellt. Um U zu erhalten, haben wir die durch 2 dividierten und über n summierten Ausdrücke (47) zu U_0 zu addieren. Nach (51) kommt also:

$$q = \frac{1}{U_0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varkappa_{II}}{\sigma_{II}}\right)^n \cdot f_n(\delta_I, \delta_{II}). \tag{53}$$

Beachten wir, daß U_0 nur von den in allen Messungen konstant gehaltenen Daten des Mediums I abhängt, so sagt uns diese Formel folgendes aus: Die sämtlichen Schmidtschen Messungen der Rückdiffusion müssen sich durch eine stark konvergente Reihe von der Form:

$$q = a_1 \frac{\varkappa_{II}}{\sigma_{II}} + a_2 \cdot \left(\frac{\varkappa_{II}}{\sigma_{II}}\right)^2 + \cdots \tag{54}$$

darstellen lassen, deren Koeffizienten nur von δ_{II} abhängen. Oder weiter: Da in der Konstanten $\varkappa_{II}$ (30) die Strahlenergie T in allen Messungen die gleiche war, so variiert $\varkappa_{II}$

nur mit $n Z^2$, oder auch mit $\varrho Z^2/A$, wenn ϱ die Dichte und A das Atomgewicht bedeutet. An Stelle von (54) kann man also auch schreiben:

$$q = b_1 \cdot \left(\frac{Z^2 \varrho}{\alpha A}\right) + b_2 \cdot \left(\frac{Z^2 \varrho}{\alpha A}\right)^2 + \cdots, \tag{55}$$

wo die b_i wieder nur von δ_{II} abhängen und alle Daten Z, ϱ, A, α auf das Medium II zu beziehen sind. *Wählen wir also die Dicken d_{II} der vier verschiedenen Metalle so, daß sie, in Vielfachen der freien Weglänge der Absorption gemessen, die gleichen Zahlwerte δ_{II} haben, so müssen sich die betreffenden Intensitätsverhältnisse q durch die gleiche Potenzreihe* (55), *d. h. durch die gleichen Koeffizienten b_i beschreiben lassen. Wesentlich ist hierbei die Forderung, daß die Reihe* (55) *überdies (wenigstens bei den leichten Elementen) stark konvergieren solle.*

Gl. (55) wurde zunächst nur für homogene Strahlung abgeleitet; doch überträgt sich die ganze Überlegung ohne weiteres auf unseren Fall. Wie verabredet, haben wir in (51) sowohl die im Zähler als die im Nenner auftretende Intensität für die beiden Spektrallinien 0,84 c und 0,94 c getrennt zu berechnen und die beiden Komponenten jeweils in ihrem Intensitätsverhältnis 1 : 4 zu addieren. An Stelle von (53) kommt also, wenn die auf die langsame Strahlung bezüglichen Daten durch einen Akzent ausgezeichnet werden:

$$\left\{ q = \frac{1}{4 U_0 + U_0'} \cdot \left\{ 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z_{II}}{a_{II}}\right)^n \cdot f_n(\delta_I, \delta_{II}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z_{II}'}{a_{II}'}\right)^n \cdot f_n(\delta_I', \delta_{II}') \right\} . \right. \tag{56}$$

Nun ist aber nach (30):

$$\frac{z_{II}'}{z_{II}} = \frac{T^2}{T'^2} \tag{57}$$

und nach unserer obigen Annahme *bei allen Elementen*:

$$a' = 3a, \quad \delta_I' = 3\delta_I, \quad \delta_{II}' = 3\delta_{II}. \tag{58}$$

Hiermit geht (56) offenbar in (54) und (55) über, wenn man setzt:

$$a_n = \frac{1}{4 U_0 + U_0'} \cdot \left\{ 4 f_n(\delta_I, \delta_{II}) + \left(\frac{T^2}{3 T'^2}\right)^n \cdot f_n(3\delta_I, 3\delta_{II}) \right\} ; \tag{59}$$

$$b_n = a_n \cdot \left(\frac{\pi L e^4}{4 T^2}\right)^n \qquad (L = \text{Loschmidtsche Zahl}). \tag{60}$$

Wir zeigen zunächst, daß sich die Messungsergebnisse von Schmidt tatsächlich durch eine Reihe von der Form (55) darstellen lassen, deren Konvergenz bei den leichteren Elementen (Al, Zn und zum Teil Sn) und bei nicht zu kleinem δ_{II} eine genügend starke ist. Beim Übergang zu schwereren Elementen (Pb) und zu kleineren δ_{II} ($\delta_{II} < 0{,}1$) verschlechtert sich die Konvergenz allerdings so weit, daß die Reihenentwicklung schließlich sinnlos wird; doch bleibt nach Ausschluß dieser Fälle immer noch ein weites Feld zur Anwendung unserer Formeln übrig.

Tab. 2 faßt für die verschiedenen Metalle die Werte ihrer Ordnungszahlen Z, ihrer Dichten ϱ, ihrer Atomgewichte A und ihrer Absorptionskoeffizienten α für die Strahlung 0,94 c [nach (50)] zusammen; in der letzten Kolumne stehen die daraus berechneten Werte von $Z^2\varrho/\alpha A$.

Tabelle 2.

	Z	ϱ (g/cm^{-3})	A	α (cm^{-1})	$Z^2\varrho/\alpha A$ (g/cm^{-3})
Al	13	2,7	27,1	7	2,4
Zn	30	7,2	65,37	22	4,5
Sn	50	7,3	118,7	30	7,7
Pb	82	11,37	207,2	30	12,3

Am meisten interessieren die Sättigungswerte q_∞, die in den Schmidtschen Kurven praktisch bereits bei $\delta_{II} \geqq 0{,}8$ erreicht sind. Ihre Zahlwerte wurden in (52) bereits mitgeteilt. Sie werden vortrefflich durch die folgende Reihe wiedergegeben:

$$(61)\quad \begin{cases} q_\infty = 0{,}13\left(\dfrac{Z^2\varrho}{\alpha A}\right) - 0{,}008\cdot\left(\dfrac{Z^2\varrho}{\alpha A}\right)^2 \\ \qquad\qquad + 0{,}0001\cdot\left(\dfrac{Z^2\varrho}{\alpha A}\right)^3 + \cdots \qquad (\delta_{II} \gtrsim 0{,}8). \end{cases}$$

In Tab. 3 ist die Reihe (61) für die einzelnen Elemente ausgewertet ($q_{ber.}$) und mit den experimentellen Werten ($q_{exp.}$) zum Vergleich zusammengestellt. Die Übereinstimmung läßt nur bei Pb zu wünschen übrig, wo auch die Konvergenz ungenügend ist. Bei Al und Zn ist die Konvergenz sehr stark.

Tabelle 3 ($\delta_{II} = \infty$).

	$q_{ber.}$	$q_{exp.}$
Al. . . .	0,312 − 0,046 + 0,001 = 0,27	0,270
Zn . . .	0,585 − 0,162 + 0,009 = 0,43	0,432
Sn . . .	1,001 − 0,474 + 0,046 = 0,57	0,575
Pb . . .	1,60 − 1,21 + 0,19 ≅ 0,6	0,684

Um den Abstieg der q-Kurven mit abnehmendem δ_{II} zu verfolgen, wird es genügen, die Reihenentwicklungen für zwei diskrete δ_{II}-Werte, nämlich $\delta_{II} = 0{,}8$ und $\delta_{II} = 0{,}1$, anzugeben:

$$(62)\quad \begin{cases} q = 0{,}12\left(\frac{Z^2\varrho}{a\,A}\right) - 0{,}009\cdot\left(\frac{Z^2\varrho}{a\,A}\right)^3 \\ \qquad\qquad + 0{,}0003\cdot\left(\frac{Z^2\varrho}{a\,A}\right)^5 + \cdots \qquad (\delta_{II} = 0{,}3), \end{cases}$$

$$(63)\quad \begin{cases} q = 0{,}10\left(\frac{Z^2\varrho}{a\,A}\right) - 0{,}013\cdot\left(\frac{Z^2\varrho}{a\,A}\right)^3 \\ \qquad\qquad + 0{,}0005\cdot\left(\frac{Z^2\varrho}{a\,A}\right)^5 + \cdots \qquad (\delta_{II} = 0{,}1). \end{cases}$$

Die Tabellen 4 und 5 mögen zur Beurteilung der Übereinstimmung dienen. Man beachte insbesondere den Gang der Koeffizienten in (61), (62), (63); während der Koeffizient des linearen

Tabelle 4 ($\delta_{II} = 0{,}3$).

	$q_{ber.}$	$q_{exp.}$
Al. . . .	0,288 − 0,052 + 0,004 = 0,24	0,245
Zn . . .	0,540 − 0,182 + 0,027 = 0,38	0,38
Sn . . .	0,924 − 0,534 + 0,137 = 0,53	0,54
Pb . . .	1,48 − 1,36 + 0,56 ≅ 0,7	0,62

Tabelle 5 ($\delta_{II} = 0{,}1$).

	$q_{ber.}$	$q_{exp.}$
Al. . . .	0,240 − 0,075 + 0,007 = 0,17	0,17
Zn . . .	0,450 − 0,263 + 0,045 = 0,23	0,23
Sn . . .	0,77 − 0,77 + 0,23 ≅ 0,2	0,37
Pb . . .	1,23 − 1,97 + 0,93 ≅ 0,2	0,46

Gliedes bei abnehmendem δ_{II} langsam abnimmt, nehmen die höheren Koeffizienten gesetzmäßig zu. Hiermit bestätigen

wir unsere obige Angabe, daß sich die Konvergenz der Reihe mit abnehmendem δ_n verschlechtert; aus dem Vergleich der Tabellen 3, 4, 5 erkennt man deutlich, daß die Konvergenz bei $\delta_n < 0{,}1$ höchstens noch bei Al ausreichend sein wird, womit uns aber die Möglichkeit einer einigermaßen eindeutigen Koeffizientenbestimmung entzogen ist. (Selbstverständlich beziehen sich alle hier angegebenen δ_n-Werte, wie verabredet, auf die schnelle Strahlung 0,94 e; die entsprechenden Werte für die langsame Strahlung 0,84 e (δ_n') sind gemäß (58) jeweils dreimal so groß.)

§ 11. Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit dem Experiment.

Das Wichtigste, was wir durch diese Vergleichung der Messungen an verschiedenen Elementen erreicht haben, ist *die zahlenmäßige Isolierung des linearen Gliedes der Reihe* (55) *auf empirischem Wege*. Dieses Glied ist nämlich, wie aus der Ableitung der Reihe hervorgeht, von konstanten berechenbaren Faktoren abgesehen, identisch mit dem in Formel (44) theoretisch dargestellten Hauptbestandteil der Rückdiffusion; mit anderen Worten: wir haben die Möglichkeit, *den soeben empirisch bestimmten Koeffizienten b_1 der Reihe* (55) *theoretisch* [auf dem Wege über die Formeln (60), (59), (46) und (44)] *absolut zu berechnen* und damit über Brauchbarkeit oder Unbrauchbarkeit der theoretischen Grundannahmen zu entscheiden.

Das Ergebnis der Rechnung ist folgendes. Nach (61), (62), (63) ist bzw. für $\delta_n = \infty$; 0,8; 0,1:

$$b_1 = 0{,}18; \quad 0{,}12; \quad 0{,}10 \ \mathrm{g^{-1}cm^2}. \tag{64}$$

Andererseits erhält man aus (44) (vgl. auch Fig. 2) bzw.:

$$b_1 = 0{,}12; \quad 0{,}12; \quad 0{,}11 \ \mathrm{g^{-1}cm^2}. \tag{65}$$

Sämtliche Abweichungen liegen innerhalb $\pm$ 10 Proz. Daß die empirischen Koeffizienten (64) bei abnehmendem δ_n etwa dreimal so schnell abnehmen als die theoretischen (65), hat seinen Grund vermutlich darin, daß die in Formel (46) für $n \geqq 2$ begangenen Vernachlässigungen [Anwendung von (85)!] bei schlechter werdender Konvergenz unserer Reihe einen kleinen systematischen Fehler mit sich bringen. Wir legen

deshalb am meisten Wert auf die gute Übereinstimmung der Sättigungswerte:

$$h_1 = 0{,}13 \quad \text{und} \quad 0{,}12.$$

Bei Al z. B. beträgt das Hauptglied der Reihe (55) $0{,}13 \cdot \left(\frac{Z^2 \varrho}{a A}\right) = 0{,}31$, während der theoretische Wert 0,28 ist. Begnügt man sich in der theoretischen Entwicklung mit diesem Hauptterm $q_\infty = 0{,}28$ (unter Vernachlässigung der höheren Terme $n = 2, 3, \ldots$), so verbessert sich die Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert 0,27 zufällig noch wesentlich dank dem Umstande, daß sich hier zwei Fehler annähernd kompensieren.

Die Unsicherheit der theoretischen Werte ist lediglich durch die geringe Kenntnis des β-Geschwindigkeitsspektrums und durch etwaige Fehler in den benutzten Werten der wahren Absorptionskoeffizienten bedingt. Größer ist, nach der Kritik Lenards[1]) zu urteilen, die Unsicherheit der experimentellen Werte. Wir diskutieren die von Lenard angeführten Fehlerquellen und Korrektionen der Reihe nach. Hierbei ist zu beachten, daß Lenard nach Vorgang von Schmidt alle Einflüsse des Mediums I (der Unterlageplatte) bei den Rückdiffusionsversuchen als entstellende Einflüsse beurteilt und durch geeignete Korrektionen nachträglich zu eliminieren sucht, während das Medium I in unserer Rechnung von vornherein als wesentlicher Bestandteil eingeführt wurde.

α) *Rückdiffusion im Medium I; d. h. doppelte Richtungsumkehr von Partikeln.* Die betreffende Korrektion wird von Lenard auf 9—12,5 Proz. geschätzt, ist aber in unseren Ansätzen von vornherein in Rechnung gezogen.

β) *Absorption der rückdiffundierten Partikeln im Medium I.* Lenard vermutet, daß die betreffende Korrektion gegenüber den anderen klein sei; im Gegensatz hierzu ergab unsere Theorie, daß die Rückdiffusion sehr stark von d_1 abhängt, was im wesentlichen nur auf Absorptionswirkungen im Medium I beruhen kann. In diesem Zusammenhange weist Lenard auch auf den Einfluß des *Geschwindigkeitsverlustes* hin, der gerade bei den rückdiffundierten Partikeln, welche lange Wege im Metall zurückgelegt haben, beträchtlich sein dürfte. Dazu

1) Lenard, a. a. O. S. 92 f. u. 229 ff.

können wir nur sagen, daß die Vernachlässigung des Geschwindigkeitsverlustes bei der hier angestrebten Genauigkeit in keiner Weise störend bemerkbar wird (vgl. insbesondere die Fußnote 2 auf S. 585), vermutlich, weil die Konstanten $\varkappa$, Θ und a bei Verringerung der Strahlenergie *gleichzeitig* in solchem Maße vergrößert werden, daß die Gesamtänderung in unseren Formeln gering ist.

γ) *Fehlerquelle der Luftleitungsmethode bei der Intensitätsmessung.* Auch hier ist nach Lenard der Geschwindigkeitsverlust indirekt von maßgebender Bedeutung. In der von Schmidt zur Intensitätsmessung benutzten Ionisierungsmethode kommen nämlich die langsamen Strahlen, da sie stärker ionisierend wirken, zu stark zur Geltung, und die rückdiffundierten Strahlen werden also im Verhältnis zu den direkt durchgegangenen Strahlen, da sie stärker verlangsamt sind, in größerer Intensität erscheinen, als ihrer wirklichen Elektronenzahl entspricht. Nach Lenards Schätzung wäre z. B. die Schmidtsche Rückdiffusionskonstante von Al (0,27) um etwa 9 Proz. zu verkleinern; bei Zn, Sn und Pb seien die Korrektionen erheblich größer, aber nicht genau genug zu schätzen. Wie es scheint, berühren diese Korrektionen in unserer Reihe (55) hauptsächlich nur das quadratische und kubische Glied; wenn auch das lineare Glied (bzw. der Koeffizient b_1) dadurch verkleinert würde, könnte dies der Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert nur zum Vorteil gereichen. — Wichtiger scheint uns in diesem Zusammenhang, daß die langsame Komponente der Strahlung (0,84 c) in den Ionisationsmessungen (nach Tafel VII bei Lenard) etwa 1,3-mal so stark zur Geltung kommen sollte, als ihrem wirklichen Intensitätsverhältnis zur schnellen Komponente (0,94 c) entspricht. Wenn es uns also weniger darauf ankommt, die *Zahl der austretenden Elektronen* (*wirkliche Intensität*) zu erhalten, als vielmehr die von Schmidt gemessenen „*Scheinintensitäten*“ (Lenard), so hätten wir an Stelle des wahren Intensitätsverhältnisses 1 : 4 das scheinbare Intensitätsverhältnis 1,3 : 4 = 1 : 3 in Rechnung setzen müssen. So wie wir die Rechnung oben durchgeführt haben, würde sie uns die gemessenen Scheinintensitäten unter der Voraussetzung liefern, daß das wahre Intensitätsverhältnis der beiden fingierten Spektrallinien etwa 1 : 5 betrüge. Da aber die langsame Strahlung an sich schon

wegen ihrer stärkeren Absorbierbarkeit von untergeordneter Bedeutung ist und überdies die spektrale Intensitätsverteilung im obigen nur in roher Näherung und nicht ganz ohne Willkür berücksichtigt wurde, können wir auf eine eingehendere Diskussion dieses Gegenstandes verzichten.

δ) *Die ionisierende Wirkung der in der rückdiffundierenden Schicht angeregten Röntgenstrahlung.* Diese läßt sich nicht schätzen, dürfte aber bei Al gering sein (Lenard). Auch hierdurch wird vermutlich das lineare Glied der Reihe (55) nicht merklich in Mitleidenschaft gezogen.

Die Korrektion ε) („Umrechnung von vollkommen diffusem Eintritt auf den Normalfall") kommt hier nicht in Betracht.

η) *Rückdiffusion in der Luft.* Auch die hierfür anzubringende Korrektion kann nicht genauer angegeben werden; nach Lenard ist sie vermutlich unwesentlich.

Wie groß auch die Unsicherheit auf der theoretischen und der experimentellen Seite sei, daran ist nach unseren Ergebnissen keinesfalls zu zweifeln, daß das Rutherford-Bohrsche Atommodell die von Schmidt gemessene Rückdiffusion *zum mindesten größenordnungsmäßig, wahrscheinlich aber auch quantitativ* zu erklären vermag. Zur weiteren Klärung der Frage wären vervollkommnete Messungen (Elimination der störenden Effekte) wünschenswert.

Zusammenfassung.

Die Rückdiffusion der β-Strahlen wird auf Grund bekannter Modellvorstellungen (Kernablenkung im Rutherford-Bohrschen Atom) einer theoretisch-rechnerischen Behandlung zugänglich gemacht. Der mathematische Ansatz wird speziell für eine Versuchsanordnung von H. W. Schmidt formuliert. Das Problem führt auf eine Integrodifferentialgleichung, die durch eine stark konvergente Reihenentwicklung integriert werden kann. Die hiernach berechneten Intensitäten der Rückdiffusion sind in guter Übereinstimmung mit den Schmidtschen Messungen.

Von den Einzelergebnissen seien die folgenden hervorgehoben:

1. Die in die Formeln für die Rückdiffusion eingehenden *wahren Absorptionskoeffizienten* der betreffenden β-Strahlung

(Ur X) in Al, Zn, Sn, Pb werden mit Hilfe der gleichen (für die rückdiffundierende Dicke Null spezialisierten) Formeln durch Anpassung an andere Messungen von Schmidt numerisch mit ausreichender Sicherheit bestimmt. Sie sind nur in grober Näherung massenproportional (§ 9).

2. Der scheinbar exponentielle Intensitätsabfall eines diffusen Kathodenstrahlbündels (Normalfall) ist eine Wirkung der Streuung (§ 9).

3. Die Intensität der Rückdiffusion ist stark von dem Material und der Dicke der Unterlageplatte (bei Schmidt Al von $9{,}5 \cdot 10^{-3}$ cm Dicke) abhängig; die Schmidtschen „Rückdiffusionskonstanten" haben also *nicht* die Bedeutung von Materialkonstanten des rückdiffundierenden Mediums (§ 8).

4. Dieselben „Rückdiffusionskonstanten" lassen sich (bei konstanter Unterlageplatte) in Abhängigkeit vom rückdiffundierenden Element durch eine stark konvergierende Potenzreihe von der Form:

$$q_\infty = b_1 \left(\frac{Z^2 \varrho}{a A}\right) + b_2 \cdot \left(\frac{Z^2 \varrho}{a A}\right)^2 + \ldots$$

darstellen (Z = Kernladungszahl, ϱ = Dichte, A = Atomgewicht, a = wahres Absorptionsvermögen) (§ 10).

5. Der erste Koeffizient dieser Potenzreihe b_1 hat nach empirischer Bestimmung für die Schmidtsche Versuchsanordnung den Wert $0{,}18$ g^{-1}cm^2; der unabhängig hiervon berechnete theoretische Wert ist $0{,}12$ g^{-1}cm^2 (§ 11).

München, Institut f. theoret. Physik, Dezember 1922.

(Eingegangen 7. Dezember 1922.)

2. *Zur Theorie der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen auf der Erdkugel; von Otto Laporte.*

§ 1. Bericht über den Stand des Problems.

So einfach heutigentags die drahtlose Überbrückung auch der größten Entfernungen auf der Erdoberfläche geworden ist, so schwierig gestaltet sich die theoretische Behandlung dieses Problems auf Grund der Maxwellschen Gleichungen unter Berücksichtigung der Erdkrümmung.

Die allgemeine Lösung des Problems der Wellenausbreitung auf der vollkommen leitend gedachten Erdkugel erscheint nach relativ einfachen Rechnungen in Form folgender Kugelfunktionenreihe für ein Potential

$$(1) \qquad \Pi = -\frac{2}{kar}\sum_{0}^{\infty}(n+1/2)\frac{\zeta_n(kr)}{\zeta_n'(ka)}P_n(\cos\vartheta),$$

aus dem durch Differentistion die Feldstärken erhalten werden. Hierin bedeutet a den Erdradius und $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ die Wellenzahl für 2π Längeneinheiten; r und ϑ sind die Koordinaten des Empfängers. Außerdem ist $P_n(\cos\vartheta)$ die Kugelfunktion und ζ_n im wesentlichen die Hankelsche Zylinderfunktion. — Die Diskussion der obigen Lösung ist indessen wegen der schlechten Konvergenz der Reihe ziemlich schwierig, und den verschiedenen Autoren, die sich mit ihr befaßt haben, ist es meistens erst nach ziemlich langen Rechnungen gelungen, zu einfachen Endformeln zu gelangen, die allerdings bedeutend verschiedene Zahlenwerte liefern.

So fand Poincaré[1]), daß die Amplitude der magnetischen Kraft durch eine Funktion von der Form

$$A\,e^{-\alpha\vartheta}$$

1) H. Poincaré, Rend. Palmero 29. 1910.

dargestellt ist, wobei A und α Konstante sind, und schloß daraus auf die Unerklärbarkeit der Erfolge der Funkentelegraphie. Über den Zahlenwert der Dämpfungskonstanten, auf den praktisch alles ankommt, machte er jedoch keine Angaben. Nicholson[1]) und Macdonald[2]) fanden darauf Formeln, die beide starke Dämpfung zeigen, aber sonst ein gänzlich voneinander abweichendes Verhalten haben. Die Dämpfungskonstante Macdonalds ist sehr groß, nämlich, wenn wir λ zu 5 km festsetzen,

$$\alpha = 0{,}7 \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^{1/6} = 14,$$

und man erhält somit nach dieser Formel eine enorm starke Abnahme der Wellenamplitude, die durchaus mit der Erfahrung im Widerspruch steht.

Zu wesentlich anderen Resultaten gelangen dagegen March[3]) und Rybczyński[4]). Der erstere erhielt unter Benutzung einer Integraldarstellung willkürlicher Funktionen auf der Kugel als allgemeine Lösung das folgende bestimmte Integral:

$$(2) \qquad \Pi = -\frac{2}{k a r} \int_0^\infty \frac{\zeta_{t-1/2}(k r)}{\zeta'_{t-1/2}(k a)} P_{t-1/2}(\cos\vartheta)\, t\, dt.$$

Die näherungsweise Berechnung dieses Integrals lieferte ihm aber für Π einen Ausdruck ohne jegliche exponentielle Dämpfung. Der Grund hierfür liegt, wie Poincaré[5]) vermutet hat, in einer unrichtigen Approximation der Funktion ζ/ζ'. Rybczińsky, der diesen Fehler durch eine kleine Modifikation dieser Annäherungsfunktion zu beheben beabsichtigte, erhielt in seiner Endformel nun ebenfalls einen Dämpfungsfaktor $e^{-\alpha\vartheta}$, aber mit dem Zahlenwert: $\alpha = 6$. Außerdem befand sich Rybczyńskis Ergebnis in bester Übereinstimmung mit Austins Messungen[6]) des Empfangsantennenstroms.

---

1) J. W. Nicholson, Phil. Mag. 20. S. 157. 1910; 21. S. 62. 1910.
2) H. M. Macdonald, Proc. Roy. Soc. 90. S. 50. 1914.
3) H. W. March, Diss. München 1921; auch Ann. d. Phys. 37. S. 29. 1922.
4) W. v. Rybczyński, Ann. d. Phys. 41. S. 191. 1913.
5) H. Poincaré, Compt. rend. 154. S. 795. 1912.
6) L. Austin, Bull. Bur. Stand. 7. Nr. 3. 1911.

Im Jahre 1915 veröffentlichte nun Love[1]) schwerwiegende Einwände gegen die oben erwähnte Marchsche Integraldarstellung willkürlicher Funktionen, und also auch gegen die Resultate von March und Rybczyński, indem er behauptete, daß lediglich die Benutzung dieser falschen Integraldarstellung die Diskrepanz zwischen diesen beiden Autoren und Macdonald verursacht habe. Um die Reihensummation auf analytischem Wege zu umgehen, und um doch Zahlenwerte zum Vergleich mit der Erfahrung zu erhalten, unternahm es Love, die Kugelfunktionenreihe numerisch auszuwerten und zwar für eine Wellenlänge von 5 km und für die Werte $\vartheta = 6°, 9°, 12°, 15°, 18°$. Sein so erhaltenes Zahlenmaterial zeigte sich in guter Übereinstimmung mit Macdonalds Formel. In einer neuerdings erschienenen Untersuchung von Watson[2]) wird zum ersten Male ein einwandfreier Weg der Diskussion des Potentials (1) angegeben; unter Zugrundelegung dieser Arbeit erhält B. van der Pol[3]) eine Formel für die magnetische Feldstärke, in welche die Macdonaldsche wenigstens für kleine ϑ übergeht und die gleichfalls wie jene die starke exponentielle Dämpfung zeigt.

Im folgenden wird nun versucht, die Brücke zu schlagen zwischen der Formel von March einerseits und den englischen Autoren andererseits. *Zu diesem Zwecke zeigen wir zunächst, daß mit der hier angestrebten Näherung die bekannte Reihenlösung (1) mit der Integrallösung (2) identisch ist, ein Satz, der, wie wir sehen werden, einer weitgehenden Verallgemeinerung fähig ist.* Der Grund für die Diskrepanz ist somit nicht, wie Love meinte, in der Alternative *Reihe — Integral* zu suchen, sondern in der in beiden Fällen gänzlich verschiedenen Approximation der Funktion ζ/ζ'. Bei der Diskussion des Potentials sind kleine und große Entfernungen vom Sender scharf zu trennen. Wir kommen so bei kleinen ϑ zu der Formel von March ohne exponentielle Dämpfung, wobei sich im Grenzfalle der ebenen Erdoberfläche ($\vartheta = 0$; $a = \infty$) in Strenge die von Sommerfeld[4]) in seiner bekannten Arbeit abgeleiteten Lösungen ergeben.

---

1) A. E. H. Love, Phil. Trans. Roy Soc. A. 215. S. 105. 1915.
2) G. N. Watson, Proc. Roy. Soc. A 95. S. 83. 1918.
3) B. van der Pol, Phil. Mag. 38. S. 365. 1919; auch Diss. Utrecht 1920.
4) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 28. S. 665. 1909.

Andererseits geben wir eine einfache und mit wenig Rechnung verbundene Diskussion bei großer Entfernung, wobei wir durch Entwickeln (nach Potenzen der reziproken Leitfähigkeit σ) außer dem Potential Π_∞ bei vollkommen leitender Erde auch in einem Gliede Π_σ die Leitfähigkeit in erster Näherung berücksichtigen. Wir erhalten so ein stark gedämpftes Potential, das für $\sigma = \infty$ mit der von van der Pol unter dieser Voraussetzung abgeleiteten Formel identisch ist. Während aber bei kleiner Entfernung in diesem Potential noch die Raumwellen überwiegen, kommen wir, da sowohl Π_∞ wie Π_σ mit $1/\sqrt{\sin\vartheta}$ gehen, zu der folgenden auch vom Standpunkt der Wellenoptik interessanten Folgerung: *Die von der Antenne ausgestrahlten Wellen sind in großer Entfernung vom Dipol reine Oberflächenwellen, wohingegen die Raumwellen durch die Erdkrümmung gänzlich abgeschirmt werden.*

Es liegen also hier die Verhältnisse anders wie bei dem ebenen Problem, wo *nur* das dem Π_σ entsprechende Glied Oberflächenwellencharakter besaß.

Eine bedeutsame Stütze erhält diese Anschauung und somit unsere ganze Rechnung durch die Tatsache, daß der bei großer Entfernung vom Sender für Π_∞ erhaltene Ausdruck im Grenzfall ebener Trennungsfläche zwischen Luft und Erde verschwindet, während Π_σ genau in die Sommerfeldschen Oberflächenwellen (P) übergeht.

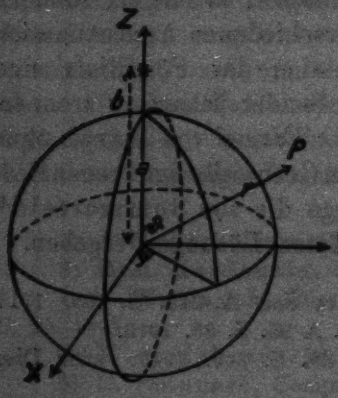


Fig. 1.

§ 2. Ableitung der allgemeinen Lösung des Problems.

Die Maxwellschen Gleichungen in Kugelkoordinaten nehmen, wenn wir unter der Annahme reiner Zyklizität des Problems

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0; \quad \mathfrak{E}_\varphi = 0,$$

also:

$$\mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_\vartheta = 0 \tag{3}$$

setzen, die folgende einfache Form an:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = -\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial r \mathfrak{E}_\vartheta}{\partial r} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \vartheta}\right) \\ \left(\dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\sigma}{c}\right)\mathfrak{E}_r = \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial \sin\vartheta\, \mathfrak{H}_\varphi}{\partial \vartheta} \\ \left(\dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\sigma}{c}\right)\mathfrak{E}_\vartheta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r \mathfrak{H}_\varphi}{\partial r}. \end{cases}$$

Hier bedeutet $\mathfrak{E}$ die elektrische und $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, ε die Dielektrizitätskonstante, σ die Leitfähigkeit. Die Feldgleichungen sind in Heavisideschen Einheiten geschrieben. Die Permeabilität μ werde gleich 1 gesetzt.

Nach dem Vorgang von Debye[1]) führen wir nun ein Potential Π ein durch:

$$(5)\quad \mathfrak{H}_\varphi = \left(\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma}{c}\right)\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta},$$

also auch:

$$(6)\quad \mathfrak{E}_r = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\sin\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta},$$

$$(7)\quad \mathfrak{E}_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\Pi}{\partial r\,\partial \vartheta}.$$

Nehmen wir nun an, daß Π rein harmonisch von der Zeit abhängt:

$$(8)\quad \frac{\partial \Pi}{\partial t} = i\omega\Pi;\quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = -\omega^2\Pi,$$

so bestimmt sich Π aus der Schwingungsgleichung

$$(9)\quad \Delta\Pi + k^2\Pi = 0,$$

wobei Δ wie üblich den zweiten Differentialparameter in Kugelkoordinaten bedeutet und

$$k^2 = \frac{\varepsilon\omega^2 - i\sigma\omega}{c^2}$$

ist. Die Feldgrößen und Konstanten wollen wir im Äußeren der Kugel mit dem Index a, im Innern mit dem Index i versehen. Die durch einen Hertzschen Dipol ersetzte Antenne befinde sich vorläufig außerhalb der Kugel auf der Achse $\vartheta = 0$

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 30. S. 62. 1909.

im Abstand b vom Kugelmittelpunkt ($b > a$). Dann haben wir für folgende drei Gebiete Lösungen von (9) zu suchen:

$$(10)\quad \begin{cases} \text{Gebiet } 1 & \infty > r > b, \\ \text{„ } 2 & b > r > a, \\ \text{„ } 3 & a > r > 0, \end{cases}$$

in welchen wir das Potential folgendermaßen ansetzen:

Fig. 2.

$$\text{in } 1: \quad \Pi_1 = \Pi_{1\,\text{prim}} + \Pi_{1\,\text{sec}},$$
$$\text{„ } 2: \quad \Pi_2 = \Pi_{2\,\text{prim}} + \Pi_{2\,\text{sec}},$$
$$\text{„ } 3: \quad \Pi_3 = \Pi_{3\,\text{sec}}.$$

Die Π_{sec}, die nur durch die Anwesenheit der Kugel verursacht sind, sind partikuläre Lösungen der Differentialgleichung (9) und müssen folgende Bedingungen erfüllen:

1. Das in Π_1 und Π_2 auftretende Π_{sec} muß eine ins Unendliche laufende Welle darstellen und

2. das in Π_3 auftretende $\Pi_{3\,\text{sec}}$ darf für $r = 0$ nicht unendlich werden.

Die Π_{prim} tragen der direkten Ausstrahlung der Antenne Rechnung und sind gleich

$$(11)\quad \frac{e^{-ikR}}{R},$$

wo: $R^2 = b^2 + r^2 + 2\,b\,r\cos\vartheta$.

Außerdem ist zu beachten, daß im Gebiet 1 $r > b$ und in 2 $r < b$ ist.

Partikulärlösungen, aus denen wir die Π_{sec} aufbauen können, sind nun leicht aus (9) zu erhalten; durch Separation der Variabelen ergeben sich die folgenden:

1. $$\frac{\zeta_n(kr)}{r} P_n(\cos\vartheta),$$

2. $$\frac{\psi_n(kr)}{r} P_n(\cos\vartheta).$$

Hierin ist:

$$(12)\quad \begin{cases} \zeta_n(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{1/2} H^2_{n+1/2}(z) \\ \psi_n(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(z). \end{cases}$$

Außerdem bedeutet:

$P_n(\cos\vartheta)$ die $n$te Kugelfunktion,

$H_{n+1/2}^{2}(z)$ die zweite Hankelsche Zylinderfunktion vom Index $n+1/2$,

$J_{n+1/2}(z)$ die Besselsche Zylinderfunktion vom Index $n+1/2$.

Die beiden partikulären Lösungen erfüllen unsere dem Π_{1zz} bzw. Π_{2zz} auferlegten Bedingungen und wir können also allgemeiner schreiben:

$$\Pi_{1zz} = \sum_0^\infty a_n \frac{\zeta_n(kr)}{r} P_n(\cos\vartheta), \tag{13}$$

$$\Pi_{2zz} = \sum_0^\infty b_n \frac{\psi_n(kr)}{r} P_n(\cos\vartheta). \tag{14}$$

Benutzen wir noch die bekannten Entwicklungen von e^{-ikz}/R nach Kugelfunktion[1]), so erhalten wir:

$$\Pi_1 = \sum_0^\infty (a_n + c_n) \frac{\zeta_n(k_1 r)}{r} P_n(\cos\vartheta), \tag{15}$$

$$\Pi_2 = \sum_0^\infty \left(a_n \frac{\zeta_n(k_2 r)}{r} + d_n \frac{\psi_n(k_2 r)}{r} \right) P_n(\cos\vartheta), \tag{16}$$

$$\Pi_3 = \sum_0^\infty b_n \frac{\psi_n(k_3 r)}{r} P_n(\cos\vartheta), \tag{17}$$

wobei die c_n und d_n die Bedeutung haben:

$$c_n = -2i(n+1/2)\frac{\psi_n(k_1 b)}{k_1 b}; \quad d_n = -2i(n+1/2)\frac{\zeta_n(k_2 b)}{k_2 b}.$$

Es sind jetzt noch die Konstanten a_n und b_n aus den Grenzbedingungen zu bestimmen. Diese erfordern die Stetigkeit der tangentiellen Feldkomponenten $\mathfrak{E}_\vartheta$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ an der Kugeloberfläche und lauten in den Π geschrieben:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial r\Pi_1}{\partial r} = \dfrac{\partial r\Pi_2}{\partial r} \\ \left(\dfrac{s_1}{\sigma}\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon}\right)\Pi_2 = \left(\dfrac{s_2}{\sigma}\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon}\right)\Pi_3 \end{array} \right\} r = a \tag{18}$$

1) N. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunkt. S. 280. Gl. (3).

oder, da sich durch Ausführung der Operation

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\sigma}{c}$$

Π mit

$$\frac{i\varepsilon\omega+\sigma}{c}=-\frac{ck^2}{i\omega} \tag{19}$$

multipliziert:

$$\left.\begin{aligned} k_i^2\Pi_i &= k_a^2\Pi_a \\ \frac{\partial r\Pi_a}{\partial r} &= \frac{\partial r\Pi_i}{\partial r}\end{aligned}\right\} r=a. \tag{20}$$

Durch Einsetzen obiger Reihen für die Potentiale ergeben sich dann zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der a_n und b_n. Trägt man die hieraus berechneten Koeffizienten wieder in die Gleichungen (17) bis (19) ein, und geht zum Limes $b=a$ über — es liegt dann der Sender auf der Erdoberfläche —, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\Pi_1=-\frac{1}{k_a^2}\frac{2k_a}{ar}\sum_0^\infty(n+1/2)\frac{P_n(\cos\vartheta)}{\dfrac{\zeta_n(k_a a)}{\zeta_n(k_a r)}-\dfrac{k_a}{k_i}\dfrac{\psi'_n(k_i a)}{\psi_n(k_i a)}\dfrac{\zeta_n(k_a a)}{\zeta_n(k_a r)}}, \tag{21}$$

$$\Pi_2=-\frac{1}{k_i^2}\frac{2k_a}{ar}\sum_0^\infty(n+1/2)\frac{P_n(\cos\vartheta)}{\dfrac{\zeta_n(k_a a)}{\zeta_n(k_a a)}\dfrac{\psi_n(k_i a)}{\psi_n(k_i r)}-\dfrac{k_a}{k_i}\dfrac{\psi'_n(k_i a)}{\psi_n(k_i r)}}. \tag{22}$$

Diese Gleichungen repräsentieren die allgemeine Lösung des Problems der Wellenausbreitung auf der Erdkugel. Da die Leitfähigkeit σ und also auch

$$k_i\cong(1-i)\frac{\sqrt{\sigma\omega}}{c} \tag{23}$$

sehr groß ist, können wir den Nenner in (21) nach fallenden Potenzen von k_i entwickeln und erhalten bis auf Glieder höherer Ordnung in $1/k_i$ für das Potential im Äußeren:

$$\Pi_1=\Pi_\infty+\Pi_\sigma \tag{24}$$

wo:

(1) $$\Pi_\infty=-\frac{2}{k_a ar}\sum_0^\infty(n+1/2)\frac{\zeta_n(k_a r)}{\zeta'_n(k_a a)}P_n(\cos\vartheta)$$

das Potential für die vollkommen leitende Erde darstellt und

$$\Pi_\sigma=-\frac{2}{k_i ar}\sum_0^\infty(n+1/2)\frac{\psi'_n(k_i a)}{\psi_n(k_i a)}\frac{\zeta_n(k_a a)}{\zeta'_n(k_a a)}\frac{\zeta_n(k_a r)}{\zeta'_n(k_a a)}P_n(\cos\vartheta) \tag{25}$$

in erster Näherung die Leitfähigkeit des Bodens berücksichtigt.

Durch die Reihe (1) für Π_∞, mit deren Diskussion wir uns im nächsten Paragraphen zu befassen haben, ist die Ausbreitung der Wellen auf der Erde schon im wesentlichen bestimmt; der Ausdruck für Π_a stellt nur eine Korrektion dar.

Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, bediente sich **March**, um die Schwierigkeiten der Diskussion einer Kugelfunktionenreihe zu vermeiden, einer Integraldarstellung, welche, wenn wir die darzustellende Funktion mit $f(\vartheta)$ bezeichnen, die folgende Form hat:

$$(26) \qquad f(\vartheta) = \int_0^\infty t\,dt\,P_{t-1/2}(\cos\vartheta) \int_0^\pi f(\gamma)\,S_{t-1/2}(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma\,.$$

$S_{t-1/2}(\cos\gamma)$ ist hierin eine der Kugelfunktion verwandte Funktion. Unter Benutzung dieser Formel erhält man als allgemeine Lösung:

$$(27)\ \Pi_1 = -\frac{2}{k_a a r}\int_0^\infty t\,dt\,\frac{P_{t-1/2}(\cos\vartheta)}{\dfrac{\zeta'_{t-1/2}(k_a a)}{\zeta_{t-1/2}(k_a a)} - \dfrac{k_a}{k_i}\dfrac{\psi'_{t-1/2}(k_i a)}{\psi_{t-1/2}(k_i a)}\dfrac{\zeta_{t-1/2}(k_a a)}{\zeta_{t-1/2}(k_a r)}}$$

die ein genaues Analogon von (21) darstellt. Insbesondere ergibt sich für Π_∞ das in der Einleitung [Gleichung (2)] angegebene Integral, aus welchem **March** im Gegensatz zu allen anderen Autoren seine bekannte Formel ohne exponentiellen Dämpfungsfaktor erhielt.

Den Grund für diese Unstimmigkeit suchten mehrere Verfasser, insbesondere **Love**, in der Integraldarstellung (26). Der Lovesche Einwand beruht in folgendem: Da, wie leicht gezeigt werden kann, die Kugelfunktion $P(\cos\vartheta)$ *mit nicht ganzzahligem Index* für das Argument -1, d. h. für $\vartheta = \pi$ sich singulär verhält[1]), so besitzen die Integrale, in denen nach dem Index integriert wird, und also auch die mit der Integraldarstellung (26) konstruierten Lösungen der Schwingungsgleichung eine singuläre Linie längs $\vartheta = \pi$, die nicht im Wesen der Sache liegt und zu dem (falschen) Resultat **Marchs** Anlaß gibt.

Wie der Verfasser aus einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Hrn. N. Zeilon-Upsala erfuhr, gilt hingegen

1) Vgl. z. B. Riemann-Weber, 6. Aufl., § 122.

auf der Kugeloberfläche die Marchesche Integraldarstellung in Strenge; ja sie läßt sich aus der bekannten Legendreschen Reihendarstellung willkürlicher Funktionen auf der Kugeloberfläche durch direkte Summation ableiten.

Aber auch außerhalb der Kugeloberfläche scheinen sich die Singularitäten längs $\vartheta = \pi$ in weitgehendstem Maße auszugleichen, oder doch nur in nächster Nähe des Südpols wirksam zu sein; denn es lassen sich — *wenigstens mit der hier angestrebten Genauigkeit* — die Integrallösung (2) und die Reihe (1) ineinander überführen. Dies zeigen wir im nächsten Paragraphen.

§ 3. Vergleichende Betrachtung der beiden Lösungstypen.

Wir bringen Reihe und Integral auf eine gemeinsame Form, von welcher aus sich die Diskussion bequem vornehmen läßt.

1. *Die Reihe* (1) für Π_∞ transformieren wir nach einem bekannten Verfahren in ein komplexes Integral, dessen Integrand unendlich viele Pole längs der reellen Achse besitzt, derart, daß die Summe der Residuen an diesen Polen gleich der Reihe ist, von der wir ausgingen. Die verlangten Eigenschaften hat folgendes Integral:

$$(28) \qquad \Pi_\infty = -\frac{1}{i k_a a r} \int_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} \frac{\zeta_{t-1/2}(k_a r)}{\zeta'_{t-1/2}(k_a a)} P_{t-1/2}(-\cos\vartheta) \frac{t\,dt}{\cos \pi t},$$

wo der Integrationsweg die positiv-reelle Achse der t-Ebene umschlingt. Nun ist aber:

$$\zeta_{-t-1/2} = e^{-t\pi i} \zeta_{t-1/2},$$

also:

$$\frac{\zeta_{-t-1/2}(k_a r)}{\zeta'_{-t-1/2}(k_a a)} = \frac{\zeta_{t-1/2}(k_a r)}{\zeta'_{t-1/2}(k_a a)}.$$

Ferner folgt leicht aus der Integraldarstellung der Kugelfunktion, daß die Beziehung:

$$P_{-t-1/2}(\cos\vartheta) = P_{t-1/2}(\cos\vartheta)$$

gilt. Es folgt also, daß, wegen des Faktors t, der Integrand in (28) eine ungerade Funktion der Integrationsvariabelen ist. Wir können demnach (vgl. Fig. 3) den Weg $\mathfrak{B}$ durch einen

zum Nullpunkt der t-Ebene symmetrisch gelegenen Weg $\mathfrak{A}'$ ersetzen und den Weg $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'$ durch einen Weg $\mathfrak{C}$, der unterhalb und parallel der reellen Achse läuft. Setzen wir, was

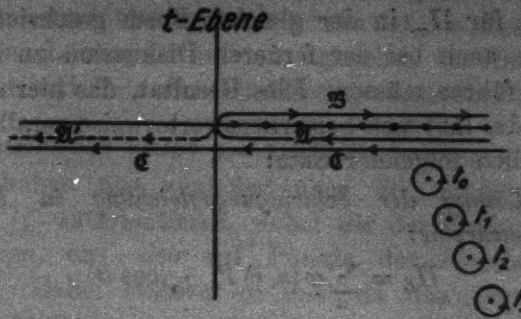


Fig. 3.

jetzt durchaus zulässig ist, für die Kugelfunktion ihre asymptotische Formel, so erhalten wir:

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{P_{t-1/2}(-\cos\vartheta)}{\cos \pi t} &= \sqrt{\frac{2}{\pi \sin\vartheta}}\,\frac{2}{\sqrt{t-1/2}}\,\frac{\cos\left\{t(\pi-\vartheta)-\frac{\pi}{4}\right\}}{\cos \pi t} \\ &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi \sin\vartheta}}\,\frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-i\left(t\vartheta+\frac{\pi}{4}\right)}, \end{aligned}\right.$$

und für das Potential ergibt sich:

$$(30)\quad \Pi_\infty = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{i k_a a r}\sqrt{\frac{2}{\pi \sin\vartheta}}\int_{\mathfrak{C}} \sqrt{t}\,dt\,\frac{\zeta_{t-1/2}(k_a r)}{\zeta'_{t-1/2}(k_a a)}\,e^{-i t\vartheta}.$$

2. Auch das *Integral* (2) für Π_∞ läßt sich unschwer auf diese Form bringen. Wir haben nur die asymptotische Formel für $P_{t-1/2}(\cos\vartheta)$ einzuführen und erhalten:

$$\Pi_\infty = -\frac{2}{k_a a r}\sqrt{\frac{2}{\pi \sin\vartheta}}\int_0^\infty \sqrt{t}\,dt\,\frac{\zeta_{t-1/2}(k_a r)}{\zeta'_{t-1/2}(k_a a)}\cos\left(t\vartheta-\frac{\pi}{4}\right),$$

was wir, da ζ/ζ' eine gerade Funktion von t ist, in:

$$\Pi_\infty = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{k_a a r}\sqrt{\frac{2}{\pi \sin\vartheta}}\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{t}\,dt\,\frac{\zeta_{t-1/2}(k_a r)}{\zeta'_{t-1/2}(k_a a)}\,e^{-i t\vartheta}$$

umformen; dem Verzweigungspunkt $t = 0$ möge der Integrationsweg rechts ausweichen. Dies ist aber nichts anderes wie (30), welche Formel wir ja aus der Reihe abgeleitet haben.

Wir haben somit gezeigt, daß sowohl die Reihe (1) wie das Integral für Π_∞ in der gleichen Form geschrieben werden können, also auch bei der ferneren Diskussion zu identischen Endformeln führen müssen. Dies Resultat, das hier speziell abgeleitet wurde, läßt sich bemerkenswerterweise verallgemeinern; es gilt nämlich folgender Satz:

Eine Lösung der Schwingungsgleichung in Form einer Kugelfunktionenreihe:

$$\Pi_R = \sum_n \varphi(n, r)\, P_{n-1/2}(\cos\vartheta)$$

und eine solche in Integralform:

$$\Pi_J = \int_0^\infty \varphi(t, r)\, P_{t-1/2}(\cos\vartheta)\, dt$$

sind praktisch identisch, d. h. sie führen mit der hier angestrebten Genauigkeit stets zu identischen Ergebnissen. Hier bedeutet φ eine beliebige Funktion des Summationsindex n bzw. der Variabele t und eines oder mehrer Parameter, z. B. des Radiusvektors r. Die Gleichheit beider Ausdrücke ist nicht auf die Kugeloberfläche beschränkt, sie gilt im ganzen Raum.[1])

---

1) Der Beweis sei in Kürze skizziert. Nachdem die Reihe durch Multiplikation mit $1/\cos\pi t$ in ein die reelle Achse umschlingendes Schleifenintegral verwandelt ist, wird die asymptotische Darstellung der Kugelfunktion eingesetzt. Da nun längs des Wegstückes $\mathfrak{B}$, das in der oberen Halbebene verläuft:

$$\frac{P_{t-1/2}(\cos\vartheta)}{\cos\pi t} = \sqrt{\frac{2}{\pi\sin\vartheta}}\,\frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{i\left(t\vartheta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

und in der unteren Halbebene längs

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\vartheta}}\,\frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-i\left(t\vartheta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

ist, so wird:

$$\Pi_R = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\sin\vartheta}}\left\{ i\int_{\mathfrak{B}} \frac{\varphi}{\sqrt{t}}\, e^{it\vartheta}\, dt + \int_{\mathfrak{U}} \frac{\varphi}{\sqrt{t}}\, e^{-it\vartheta}\, dt \right\}.$$

Es besteht somit kein Grund, Lösungen der Schwingungsgleichung in Integralform, wie sie zuerst von March angegeben wurden, abzulehnen. Sie andererseits den Kugelfunktionenreihen aus Gründen einer bequemeren Diskussion vorzuziehen, wäre ebenso ungerechtfertigt, da diese bei beiden Typen von Lösungen auf ein gleiches Studium der Verzweigungen und Pole der Funktion φ herausläuft.

§ 4. Diskussion für kleine und große Entfernungen vom Sender.

Wir haben uns zunächst über die Singularitäten der Funktion ζ/ζ' zu orientieren, wobei wir der Einfachheit halber $r = a$ setzen, uns also auf Punkte der Erdoberfläche beschränken. Dabei stützen wir uns, da das Argument dieser Zylinderfunktionen

$$z_a = k_a a = \frac{2\pi a}{\lambda}, \tag{31}$$

das Verhältnis des Erdumfangs zur Wellenlänge, bei der größten in der Praxis angewandten Wellenlänge noch etwa gleich 3000 ist, auf die bekannten von Debye[1]) nach der Methode der Sattelpunkte gefundenen asymptotischen Entwicklungen. Hiernach ist für $t \gtrless z_a$:

$$\left\{\begin{aligned} &\zeta_{t-1/2}(z_a) = \frac{i}{(\sin\tau)^{1/2}} \cos\left\{\frac{\pi}{4} + z_a(\sin\tau - \tau\cos\tau)\right\} \\ &\qquad\qquad \cos\tau = \frac{t}{z_a} \\ &\text{analog ist:} \\ &\zeta'_{t-1/2}(z_a) = i(\sin\tau)^{1/2} \sin\left\{\frac{\pi}{4} + z_a(\sin\tau - \tau\cos\tau)\right\} - \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Andererseits führen wir in das Integral Π_J die Näherungsformel für $P_{t-1/2}$ ein und zerlegen den so im Integranden auftretenden Kosinus in seine Exponentialfunktionen. Nachdem von den beiden Integralen jedes in die Halbebene gezogen wird, wo sein Integrand exponentiell verschwindet, kommt:

$$\Pi_J = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sin\vartheta}} \left\{ \int_{\mathfrak{B}} \frac{\varphi}{\sqrt{t}}\, e^{i\left(t\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)} dt + \int_{-\mathfrak{A}} \frac{\varphi}{\sqrt{t}}\, e^{-i\left(t\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)} dt \right\},$$

was mit dem Obigen identisch ist. Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

1) Math. Ann. 67. S. 535. 1909; besonders Münch. Akad. 1910. 5. Abhandl. S. 22f.

1. Bei der Diskussion für *kleines* ϑ können wir näherungsweise die Erdoberfläche als eben betrachten, d. h. den Erdradius sehr groß annehmen. Es ist dann sofort aus (32) zu sehen, daß nach Einführung von

$$\lambda = \frac{t}{a} \tag{33}$$

als Integrationsvariable:

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\zeta_a \lambda^{-1/2}_{\nu}(k_a a)}{\zeta'_a \lambda^{-1/2}_{\nu}(k_a a)} = \frac{k_a}{\sqrt{\lambda^2 - k_a^2}} \tag{34}$$

ist. Zieht man dann das Integral längs $\mathfrak{C}$ auf die Ufer des von dem singulären Punkte $\lambda = -k_a$ ins Unendliche der negativ-imaginären Halbebene sich erstreckenden Verzweigungsschnitts, so folgt sofort die Marchsche Formel:

$$\Pi_\infty = -\frac{2}{a}\frac{e^{-ik_a a\vartheta}}{\sqrt{\vartheta \sin\vartheta}}.$$

Auf dem gleichen Wege können wir auch den Grenzwert unseres Potentials für $a \to \infty$ ableiten. In dem Maße, wie wir a wachsen lassen, geht auch ϑ gegen Null, das Produkt

$$a\vartheta = d \tag{36}$$

muß endlich bleiben, und mißt die Entfernung des Empfängers vom strahlenden Dipol. Wir erhalten, da in diesem Grenzfalle:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi \lambda a \sin\vartheta}}\, e^{-i\left(\lambda a\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda d}}\, e^{-i\left(\lambda d + \frac{\pi}{4}\right)} = H_0^2(\lambda d) \tag{37}$$

ist, als Grenzwert des Potentials:

$$\Pi_\infty = \int \frac{H_0^2(\lambda d)}{\sqrt{\lambda^2 - k_a^2}}\, \lambda\, d\lambda = 2\,\frac{e^{-ik_a d}}{d}, \tag{38}$$

wo das Integral als Schleife um den zu $\lambda = -k_a$ gehörigen Verzweigungsschnitt zu führen ist. Wir erhalten somit die primäre Erregung in Form eines Schleifenintegrals, wie es auch von Sommerfeld angegeben wurde. Es sei hier bemerkt, daß wir, indem wir bei der Ableitung dieser für kleines ϑ gültigen Formeln die asymptotische Darstellung für $P_{-1/2}$ benutzten, uns eine Inkonsequenz zu Schulden kommen ließen, die uns zu der wenig strengen Schlußweise in (37) zwang. Doch sind die obigen Resultate unabhängig hiervon, denn man erhält nach Einsetzen von (34) in (1) durch direkte Summation

das Marchsche Ergebnis; andererseits kommt aus der Integrallösung (2) mit (34), da ja exakt[1])

$$\lim_{n\to\infty} P_{n\,1-\eta}\left(\cos\frac{d}{a\lambda}\right) = J_0(\lambda d)$$

ist, ohne weiteres:

$$\Pi_\infty = 2\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda d)}{\sqrt{\lambda^2 - k_a^2}}\,\lambda\,d\lambda. \tag{38'}$$

Dies ist die ursprüngliche von Sommerfeld für die Primärerregung angegebene Form.[2])

Wir ersehen aus den obigen Betrachtungen, daß der Marchsche Ausdruck (35) für das Potential wegen (34) nur für kleine Entfernungen vom Sender richtig ist. Aus diesem Grunde ist auch das Fehlen einer exponentiellen Dämpfung verständlich. Es ist indessen unrichtig, diese ebenso wie Rybczyńskis Formel auch für Aufpunkte mit größerem ϑ anzuwenden, wo die Erdoberfläche nicht mehr näherungsweise als eben angesehen werden darf. Denn die Annäherungsformel (34) brächte so eine Verzweigung für $t = z_a = k_a a$ herein, die die Funktion ζ/ζ' in Wirklichkeit nicht besitzt; außerdem gibt bei der Auswertung des Schleifenintegrals nur die Nähe dieses Verzweigungspunktes einen wesentlichen Beitrag, d. h. die Um-

---

1) Obige Beziehung ist unmittelbar zu verifizieren, denn es ist für $n > 1$:

$$P_n\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos\frac{\vartheta}{n} + i\sin\frac{\vartheta}{n}\cos\omega\right)^n d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(1 + i\frac{\vartheta}{n}\cos\omega\right)^n d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{i\vartheta\cos\omega}\,d\omega = J_0(\vartheta);$$

was zu beweisen war.

2) Auch die allgemeine Lösung des ebenen Problems folgt aus (25) durch Einsetzen von (34) und des analogen Ausdrucks für ψ/ψ'. Man erhält:

$$\Pi_1 = -2k_1^2\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda d)}{N}\,\lambda\,d\lambda; \qquad N = k_a^2\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + k_1^2\sqrt{\lambda^2 - k_a^2},$$

wobei wir erinnern, daß Sommerfelds Definition der Potentialfunktion etwas von der unsrigen abweicht.

gebung des Punktes, wo die Annäherungsformel — wie aus ihrer Ableitung hervorgeht — gar nicht mehr gilt. Die Formel von Rybczyński, dessen Approximation des ζ-Quotienten nur eine Korrektion von (34) darstellt, ist aus denselben Gründen, wenigstens wo sie für größere ϑ Geltung beansprucht, unrichtig; für kleine Entfernung stimmt sie ja mit Marchs Ausdruck überein.[1])

Zusammenfassend können wir also sagen: Die Diskussion für kleine ϑ liefert die Marchsche Formel ohne exponentielle Dämpfung; sie auch für größere Entfernungen anzuwenden, wäre verfehlt.

2. Bei *großer* Entfernung von der Sendeantenne spielen die Pole der Funktion ζ/ζ' eine wesentliche Rolle. Nennen wir den $k$ten Pol in der unteren Halbebene t_k, so folgt aus (30)

$$(39)\quad \Pi_\infty = -\frac{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}{k_a a^2}\sqrt{\frac{2\pi}{\sin\vartheta}}\sum_k \sqrt{t_k}\,\mathfrak{Res}\left[\frac{\zeta_t - {}^1/_3(x_a)}{\zeta_t' - {}^1/_3(x_a)}\right]_{t_k} e^{-i\,t_k\vartheta}.$$

Das Zeichen $\mathfrak{Res}$ bedeutet wie üblich das Residuum des in der Klammer stehenden Ausdrucks an der Stelle t_k. Die Nullstellen der Funktion $\zeta_t' - {}^1/_3$ liegen, wie aus der asymptotischen Formel (32) zu sehen ist, an den Stellen, wo das Argument des Sinus gleich einem glanzzahligen Vielfachen von π ist. Nach einer Rechnung, die dem Verfahren Debyes[2]) zur Ermittlung der Wurzeln der zweiten Hankelschen Funktion genau analog ist, erhalten wir:

$$(40)\quad \left.\begin{aligned} t_k &= z_a + \varrho_k z_a^{1/3} e^{-\frac{\pi i}{3}} \\ \varrho_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3}(4k+1)^{2/3} \end{aligned}\right\} \quad k = 0, +1, +2\ldots$$

Für den Ausdruck (30) können begreiflicherweise nur die ersten Nullstellen von Belang sein. Gerade diese werden — wie auch Debye hervorhebt — deshalb ungenau sein, weil sie in der Nähe der Stelle $t \cong z_a$ liegen, wo die asymptotische

1) Auch Hr. Prof. Sommerfeld ist dieser Meinung, besonders was die daraus gezogenen Folgerungen betreffs Erklärung der Austinschen Versuche anlangt. Vgl. Jahrbuch für drahtlose Telegraphie 12. S. 2. 1917.

2) Vgl. Münchener Akad. 1910. § 4. S. 22f.

Darstellung (32) nur noch schlecht gilt. Unser Verfahren ähnelt dem der approximativen Berechnung der ersten Wurzeln der Besselschen Funktion $J_n(x)$ nach der für kleines x versagenden asymptotischen Formel:

$$J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cos\left\{x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Der so begangene Fehler ist hier wie in unserem Falle *gering.* Denn durch Ausrechnen erhält man aus (40) für ϱ_0 den Zahlenwert 0,88, während man genauer nach den speziell für $t \cong z_a$ geltenden Formeln 0,81 findet. Die weiteren Wurzeln erhalten wir nach unserer Formel sehr genau. Wir schreiben somit:

$$(41)\quad \left\{ \begin{array}{ll} & t_k = z_a + \varrho_k z_a^{1/3} e^{-\frac{\pi i}{3}} \\ \text{oder auch} & \\ & t_k = z_a - i\alpha_k z_a^{1/3}, \end{array} \right.$$

wo:

$$\begin{array}{l|l} \varrho_0 = 0{,}81 & \alpha_0 = 0{,}70 \\ \varrho_1 = 2{,}57 & \alpha_1 = 2{,}23 \\ \varrho_2 = 3{,}83 & \alpha_2 = 3{,}32\,. \end{array}$$

Wir gehen jetzt zur Berechnung des Residuums in (39). Wegen

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta_{t-1/3}(z_a) = -i\tau(\sin\tau)^{1/3}\cos\left\{\frac{\pi}{4} + z_a(\sin\tau - \tau\cos\tau)\right\}$$

ergibt sich ohne weiteres, wenn wir mit τ_k den Wert von τ im Punkte t_k bezeichnen:

$$(42)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{Rel}\left[\dfrac{\zeta_{t-1/3}(z_a)}{\zeta_t' - 1/3(z_a)}\right] = -\dfrac{1}{\tau_k \sin\tau_k} = \dfrac{z_a}{2(t_k - z_a)} \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{2\varrho_k} e^{\frac{\pi i}{3}} z_a^{2/3}. \end{array} \right.$$

Wir erhalten somit nach Einsetzen in (39) als Endresultat:

$$(43a)\quad \Pi_\infty = -\frac{1}{a}\left(\frac{2\pi}{z_a}\right)^{1/3} z_a^{2/3} e^{\frac{\pi i}{3}} e^{-i\left(z_a\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}} \sum_k \frac{1}{\varrho_k} e^{-\alpha_k z_a^{1/3}\vartheta}$$

und die Amplitude, der absolute Betrag des Potentials, nimmt den Wert an:

$$(43b)\quad |\Pi_\infty| = \frac{(k_a a)^{2/3}}{\varrho_0 a}\left(\frac{2\pi}{k_a a}\right)^{1/3} \frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}} e^{-\alpha_0 (k_a a)^{1/3}\vartheta},$$

wobei wir uns wegen der raschen Konvergenz der in (43a) auftretenden Reihe auf das erste Glied beschränkt haben. Bezeichnen wir mit $|\Pi_\infty^{(1)}|$ die Amplitude des Potentials in einem Punkte mit dem Winkelabstand ϑ_1 vom Sender und mit $|\Pi_\infty^{(2)}|$ die entsprechende Größe im Abstand ϑ_2, so wird das Verhältnis beider, wenn wir $z_a = k_a a = \frac{2\pi a}{\lambda}$ berücksichtigen und für den Erdradius a seinen in km gemessenen Zahlenwert einsetzen:

$$\frac{|\Pi_\infty^{(1)}|}{|\Pi_\infty^{(2)}|} = \sqrt{\frac{\sin\vartheta_2}{\sin\vartheta_1}}\, e^{28{,}9\,\lambda^{-1/3}(\vartheta_2-\vartheta_1)} \tag{43c}$$

Unsere Endformel (43) stimmt genau mit der von Watson und van der Pol überein und zeigt ebenso den durch die Erdkrümmung verursachten Exponentialfaktor mit großer Dämpfung. Eine Erklärung der Erfolge der drahtlosen Telegraphie ohne spezielle Annahmen über die Natur der Atmosphäre ist somit nicht möglich.

§ 5. Diskussion bei Berücksichtigung der Leitfähigkeit des Erdbodens.

Wir behandeln jetzt den Einfluß der Leitfähigkeit. Dabei können wir uns auf den Fall größerer Entfernung beschränken, da die Behandlung der Nähe der Antenne durch die Formeln bei ebener Trennungsfläche beider Medien erledigt ist.[1])

Wie im vorigen Paragraph transformieren wir die Reihe (25) für Π_a in ein Integral längs des Weges $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. Um indessen den Weg $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A}'$ ersetzen zu können, führen wir für die Funktion ψ'/ψ die bekannte Näherung

$$-\frac{\sqrt{t^2 - z_1^2}}{z_1}$$

ein, die in der Nähe der reellen Achse, also in großer Entfernung vom Punkte

$$z_1 = k_1 a = (1 - i)\frac{a}{c}\sqrt{\sigma\omega}, \tag{44}$$

nach der Funktion ψ'/ψ gut anschließt. Wir haben somit als Integrand eine ungerade Funktion und erhalten in direkter Übertragung früherer Schlüsse:

1) Ebenso setzen wir wieder $r = a$.

$$(45)\quad \left\{ \Pi_a = -\frac{1}{i k_1 a^2} \int_{\mathfrak{C}} \frac{\psi_t' - {}_1/_2(z_a)}{\psi_t - {}_1/_2(z_a)} \left(\frac{\zeta_t - {}_1/_2(z_a)}{\zeta_t' - {}_1/_2(z_a)} \right)^2 \right.$$
$$\left. \cdot P_{t-{}_1/_2}(-\cos\vartheta) \frac{t\,dt}{\cos \pi t} \right.$$

Bei der Ausrechnung dieses Integrals ist zu berücksichtigen, daß die Singularitäten der Funktion ψ'/ψ gegenüber den durch (41) gegebenen Polen von $(\zeta/\zeta')^2$ ganz unwesentlich sind. Da nämlich diese Singularitäten in der Nähe des Punktes z_t liegen, tritt bei der Berechnung des zugehörigen Residuums der Faktor e^{-tz_a} auf, der wegen des großen Imaginärteils von z_t (vgl. (44)) den Beitrag dieser Pole zu Null macht. Es bleiben somit nur noch Integrale um die durch (41) definierten Pole zweiter Ordnung übrig, die wir jetzt berechnen wollen. Wie aus (32) ersichtlich, verhält sich die Funktion $(\zeta/\zeta')^2$ an den Punkten t_k wie $\sin^{-2}(t - t_k)$, und wir erhalten somit als Residuum des Integranden nach dem Cauchyschen Integralsatz mit Berücksichtigung von (29):

$$(46)\quad \left\{ \Pi_a = -\frac{2 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{k_1 a^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\sin\vartheta}} \right.$$
$$\left. \sum_k \lim_{t \to t_k} \frac{d}{dt} \left\{ (t - t_k)^2 \left(\frac{\zeta_t - {}_1/_2(z_a)}{\zeta_t' - {}_1/_2(z_a)} \right)^2 \frac{\psi_t' - {}_1/_2(z_a)}{\psi_t - {}_1/_2(z_a)} \sqrt{t}\, e^{-i t \vartheta} \right\} \right.$$

Dieser Ausdruck stellt gewissermaßen das Gegenstück zu Formel (39) für Π_∞ dar. Zur Ausrechnung bemerken wir, daß in der Umgebung von t_k folgende aus (32) resultierende Entwicklung gilt:

$$\left(\frac{\zeta_t - {}_1/_2(z_a)}{\zeta_t' - {}_1/_2(z_a)} \right)^2 = \left\{ \frac{\cos \tau_k (t - t_k)}{\tau_k \sin\left(\tau_k - \frac{t - t_k}{a_k \tau_k} \right)} \right\}^2 \frac{1}{(t - t_k)^2} + \text{const} + \ldots$$

plus Glieder höherer Ordnung. Es ergibt sich, wenn man (42) berücksichtigt und benutzt, daß

$$|z_t| > |z_a| ,$$

ist, nach elementarer Rechnung:

$$(47)\quad \left\{ \Pi_a = -\frac{i}{2 z_1 a} e^{\frac{2\pi i}{8}} z_a \sqrt{\frac{2\pi}{\sin\vartheta}}\, e^{-i\left(z_a \vartheta + \frac{\pi}{4}\right)} \sum_k \frac{1}{\varrho_k^2} e^{-a_k z_a^{1/2} \vartheta} \right.$$
$$\left. \left(\frac{e^{\frac{\pi i}{8}}}{\varrho_k} z_a^{1/2} - \frac{1}{2} z_a^{-1/2} + i z_a^{1/2} \vartheta \right) . \right.$$

In Verbindung mit (43a) ergibt sich somit für das Potential mit Berücksichtigung der Leitfähigkeit

$$\Pi_1 = \Pi_\infty + \Pi_\sigma$$

$$(48)\quad \left\{ = \Pi_\infty \left\{ 1 + \frac{i}{2\varrho_0} e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{z_a}{z_i} \left(\frac{e^{\frac{\pi i}{8}}}{\varrho_0} z_a^{1/2} - \frac{1}{2} z_a^{-1/2} + i z_a^{3/2} \vartheta \right) \right\} \right.$$

Wir haben uns hierbei auf die Glieder mit $k = 0$ beschränkt, da die Reihe doch sehr schnell konvergiert.

Da sowohl Π_∞ wie Π_σ proportional $1/\sqrt{(\sin)\,\vartheta}$ sind, *erkennen wir in diesen beiden Bestandteilen des Potentials Oberflächenwellen.* Dieses Resultat ist insofern bemerkenswert, als bei dem von Sommerfeld behandelten ebenen Problem *nur* das dem Π_σ entsprechende Glied die Oberflächenwellen vertrat, während das Potential bei unendlicher Leitfähigkeit Raumwellencharakter hatte.

Um unsere Formeln zu prüfen, führen wir den Grenzübergang zur ebenen Erdoberfläche in der auf Seite 608 beschriebenen Weise aus. Dabei zeigt sich sofort, daß das Potential bei vollkommen leitender Erde in diesem Grenzfall verschwindet:

$$(49)\qquad \lim_{a \to \infty} \Pi_\infty = 0,$$

da ja von σ unabhängige Oberflächenwellen bei dem ebenen Problem nicht auftreten.

Führen wir nun die analoge Rechnung für Π_σ aus. Es ergibt sich, wenn wir berücksichtigen, daß wegen des Zahlenwertes von ϱ_0 näherungsweise

$$2\varrho_0^3 = 1$$

ist,

$$\lim_{a \to \infty} \Pi_\sigma$$

$$(50)\qquad = \lim_{a \to \infty} \Pi_1 = C e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{k_a d}}\, e^{i k_a d};$$

wo

$$C = -\frac{k_a^2}{k_i}.$$

Wir erhalten somit genau den von Sommerfeld[1]) *unter der*

1) A. Sommerfeld, a. a. O. S. 696. Gleichung (26c).

Annahme einer ebenen Erdoberfläche für die Oberflächenwellen P gefundenen Ausdruck. Denn da wir von Anfang an

$$|k_1| > |k_a|$$

angenommen haben, ist die Wellenzahl s der Oberflächenwellen, die durch

$$\frac{1}{s^2} = \frac{1}{k_a^2} + \frac{1}{k_1^2}$$

gegeben ist, angenähert gleich der Wellenzahl k_a des im Äußeren der Kugel befindlichen Mediums; außerdem ist die dortige Konstante

$$C = \frac{k_a^2 k_1^2}{k_a^2 - k_1^2} \sqrt{\frac{k_1^2 - k_a^2}{k_1^4 - k_a^4}}$$

bei uns mit derselben Näherung gleich $-k_a^2/k_1$.

Aus dem Vorstehenden erhellt somit, daß — wie dies von Sommerfeld vermutet wurde — in größerer Entfernung vom Sender die ausgestrahlten Wellen ausschließlich Oberflächenwellencharakter haben und als solche die Erdkrümmung überwinden; die bekannte Anschauung, daß dies durch Beugung der Raumwellen längs der Erdoberfläche geschieht, ist zu verwerfen, da schon in mäßiger Entfernung vom Sender die Raumwellen gänzlich abgeschirmt werden.

Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß die beiden allgemeinen Lösungen des Problems, nämlich die in Form einer Kugelfunktionenreihe und die von March angegebene in Form eines bestimmten Integrals mit der hier angestrebten Genauigkeit äquivalent sind. Die Diskussion dieser, übrigens im Limes eines unendlichen Erdradius in die Sommerfeldschen Formeln übergehenden Lösungen liefert für kleine Entfernung vom Sender die Formel von March ohne exponentielle Dämpfung. Für große Entfernungen ergibt die Diskussion (nach Anwendung eines von Debye angegebenen einfachen Verfahrens der Wurzelberechnung von Zylinderfunktionen) für das Potential einen exponentiell stark gedämpften Ausdruck, der im Grenzfall der vollkommen leitenden Erde mit dem von Watson und van der Pol für diesen Fall angegebenen übereinstimmt. Ferner wird gezeigt,

daß in einiger Entfernung vom Sender die ausgestrahlten Wellen reine Oberflächenwellen sind und als solche die Erdkrümmung überwinden. In Übereinstimmung hiermit ist, daß im Limes einer als eben angenommenen Erdoberfläche die Sommerfeldschen Oberflächenwellen P erhalten werden.

Hrn. Prof. Sommerfeld bin ich für vielfachen Rat und für das fördernde Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat, zu aufrichtigem Dank verpflichtet.

München, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 20. Oktober 1922.)

3. *Über die Dampfdruckverminderung einiger Metallsalze in wäßriger Lösung bei 0° C; von C. Dieterici.*

In einer noch im Druck erschienenen Inauguraldissertation[1]) habe ich die Dampfdruckverminderungen untersuchen lassen, welche die Sulfate von Metallen in wäßriger Lösung bei 0° C hervorbringen. Die angewendete Methode war mit einigen experimentellen Verbesserungen im wesentlichen die, welche ich in meinen früheren Arbeiten[2]) angewandt hatte, bei der der Dampf des reinen Wassers auf die eine Seite einer Aneroidbarometerkapsel wirkte, der der Lösung auf die andere, so daß direkt die Druckdifferenz beobachtet wurde, nicht erst die Dampfdruckverminderung sich aus der Differenz von zwei getrennten Druckbeobachtungen ergab. Die Frage, welche durch die Beobachtungen beantwortet werden sollte, war die, ob alle Sulfate in wäßrigen Lösungen eine ähnliche Abhängigkeit der Dampfdruckverminderung von der Konzentration zeigen, wie ich es an der Säure H_2SO_4 in Wasser beobachtet hatte.

Das Resultat der Beobachtungen war, daß Li_2SO_4 sich völlig gleich verhält, wie die Säure; auch die Sulfate der Metalle Mn, Cd, Zn, Mg, Ni insofern der reinen Säurelösung ähnlich sind, als die Dampfdruckverminderung mit der Konzentration beschleunigt zunimmt; es trat aber das auffällige Resultat auf, daß die Sulfate von Zn, Cd und Ni bis zu Konzentrationen von fast 2 n. (zweifach normal) eine geringere Dampfdruckverminderung zeigten, als die Nichtelektrolyte Zucker, Harnstoff bei gleicher Konzentration.

Obgleich dieses Resultat durch Kontrollversuche sicher gestellt war, wünschte ich unter Anwendung eines besonders empfindlich gemachten Druckmessers eine erneute Unter-

1) B. Bruhn, Inaug.-Dissert. Kiel 1916.

2) C. Dieterici, Wied. Ann. 62. S. 616—643. 1897 u. 67. S. 859 bis 870. 1899.

suchung und Erweiterung des Beobachtungsmaterials nach der Richtung, ob auch die Nitrate und Chloride derselben Metalle eine gleichartig abnorm geringe Dampfdruckverminderung zeigten, wie die Sulfate. Sind doch gerade die Sulfatlösungen der genannten Metalle wegen ihrer Verwendung in den galvanischen Elementen von besonderem Interesse.

Ich gebe im folgenden kurz die tatsächlichen Beobachtungen wieder, weil sie wertvolles experimentelles Material geben und nicht im Druck erschienen sind.

Die Tabellen enthalten neben der Konzentration — Molenzahlen des Salzes, welche zu 1000 g Wasser zugesetzt sind — die unmittelbar beobachtete Dampfdruckverminderung in mm Hg und den Dampfdruck selbst. Unter p theoretisch ist der Dampfdruck angegeben, den die Nichtelektrolyte bei gleicher Konzentration zeigen müßten, also

$$p = p_w \left[1 - \frac{n}{55{,}5}\right].$$

Tabelle 1.

Cadmiumsulfat. $M = 208{,}5$

Konz.	$p_w - p_s$ mm Hg	p	p_w
0	0,000	4,579	4,579
0,504 n.	0,024	4,555	4,533
1,011	0,066	4,513	4,491
1,498	0,116	4,463	4,451
2,190	0,214	4,365	4,394
2,500	0,269	4,310	4,368
3,179	0,467	4,112	4,304

Cadmiumnitrat. $M = 246{,}4$

Konz.	$p_w - p_s$	p_s	p_w
0	0	4,579	4,579
0,501 n.	0,095	4,484	4,533
0,998	0,211	4,368	4,492
1,496	0,346	4,233	4,451
1,994	0,496	4,083	4,410
2,500	0,652	3,927	4,368
3,004	0,823	3,756	4,327
3,904	1,153	3,426	4,292

Cadmiumchlorid. $M = 182{,}3$

Konz.	$p_w - p$	p	p_w
0	0	4,579	4,579
1,000 n.	0,094	4,485	4,492
1,491	0,138	4,441	4,451
1,999	0,186	4,393	4,410
2,999	0,278	4,301	4,327
3,995	0,375	4,204	4,245

Zinksulfat. $M = 161{,}44$

Konz.	$p_w - p$	p	p_w
0	0,000	4,579	4,579
0,497 n.	0,027	4,552	4,533
0,992	0,061	4,518	4,493
1,489	0,107	4,472	4,452
1,997	0,168	4,411	4,410
2,557	0,275	4,304	4,364

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Zinknitrat.
$M = 189{,}4$

Konz.	$p_w - p$	p	p_n
0	0	4,579	4,579
0,498 n.	0,097	4,482	4,533
0,994	0,216	4,363	4,493
1,469	0,362	4,217	4,453
1,875	0,502	4,077	4,420
2,487	0,749	3,830	4,369
2,997	0,989	3,590	4,327
3,718	1,343	3,236	4,268

Nickelsulfat.
$M = 154{,}75$

Konz.	$p_w - p$	p	p_n
0	0,000	4,579	4,579
0,467 n.	0,026	4,553	4,536
0,870	0,050	4,529	4,503
1,516	0,097	4,482	4,449

Nickelnitrat.
$M = 182{,}7$

Konz.	$p_w - p$	p	p_n
0	0,000	4,579	4,579
1,001 n.	0,216	4,363	4,492
1,969	0,534	4,045	4,412
2,981	0,980	3,599	4,320
3,649	1,377	3,202	4,274

Nickelchlorid.
$M = 129{,}6$

Konz.	$p_w - p$	p	p_n
0,000	0,000	4,579	4,579
0,994 n.	0,255	4,324	4,492
2,006	0,657	3,922	4,410
2,572	1,041	3,538	4,362

Übersieht man die Zahlenreihen der Tabellen, so ergibt sich:

1. Die Dampfdrucke der wäßrigen Sulfatlösungen sind bei geringer Konzentration größer, als die der Nichtelektrolyte gleicher Konzentration; erst bei etwa 2 n. tritt eine Lösung des Elektrolyten ein, welche gleichen Dampfdruck hat wie ein Nichtelektrolyt. Oberhalb dieser Konzentration ist die Dampfdruckverminderung größer als die der Nichtelektrolyte.

Auch Magnesiumsulfat verhält sich gleichartig[1]), nur ist das Konzentrationsintervall des abnorm großen Dampfdruckes kleiner. Kupfersulfat ist in zu geringem Maße löslich, um sicher untersucht werden zu können.

2. Die Dampfdrucke der Nitratlösungen derselben Metalle zeigen durchgängig beträchtlich niedrigere Werte als die Nichtelektrolyte, sie verhalten sich so, wie man es nach der Dissoziationstheorie erwarten muß.

3. Auch die Chloridlösungen verhalten sich ebenso, nur ist die Abweichung von den Normalwerten nicht so groß, wie

1) B. Bruhn, a. a. O.

bei den Nitraten. $ZnCl_2$ mußte wegen Hydrolyse ausgelassen werden.

Tabelle 2.

Konzentration		Tammann $t = 100°$ $P_w = 760$ mm Hg		Jubitz $t = 0°$ $P_w = 4{,}579$ mm Hg	
		P_s	$P_w : P_s$	P_s	$P_w : P_s$
		mm Hg		mm Hg	
	0,000 n.	760	1,000	4,579	1,000
	0,789	752,9	1,009	4,534	1,009
$CdSO_4$	1,240	749,3	1,014	4,492	1,019
	1,497	747,1	1,017	4,464	1,026
	2,001	741,7	1,025	4,395	1,042
	2,394	736,8	1,031	4,331	1,057
	0,965	750,0	1,013	4,520	1,013
$ZnSO_4$	1,650	744,2	1,021	4,457	1,027
	2,214	734,6	1,035	4,377	1,046
$NiSO_4$	0,731	752,6	1,010	4,537	1,009
	1,289	747,0	1,017	4,490	1,018
	0,346	749,3	1,014	4,516	1,014
	0,746	734,9	1,034	4,429	1,034
	1,360	708,2	1,073	4,270	1,073
$Cd(NO_3)_2$	2,036	681,0	1,116	4,070	1,125
	2,553	657,8	1,155	3,911	1,171
	2,570	656,7	1,157	3,905	1,173
	3,312	622,2	1,221	3,646	1,256
	0,492	743,7	1,022	4,484	1,021
	1,127	715,0	1,063	4,323	1,059
$Zn(NO_3)_2$	1,718	682,0	1,114	4,133	1,108
	2,231	651,5	1,167	3,937	1,164
	3,009	595,5	1,277	3,588	1,276
	0,556	741,8	1,025	4,476	1,023
	0,787	731,4	1,039	4,420	1,036
	0,908	726,4	1,046	4,388	1,044
$Ni(NO_3)_2$	1,359	705,9	1,077	4,256	1,067
	1,659	687,7	1,105	4,158	1,101
	2,198	657,7	1,156	3,956	1,157
	2,312	649,0	1,171	3,910	1,171
	0,711	746,5	1,018	4,512	1,015
	1,352	734,2	1,035	4,453	1,028
$CdCl_2$	1,680	729,7	1,042	4,422	1,036
	1,965	724,0	1,050	4,395	1,042
	2,653	712,7	1,066	4,332	1,057
	3,069	701,9	1,083	4,293	1,067
	0,498	743,9	1,022	4,473	1,024
$NiCl_2$	0,903	728,1	1,044	4,355	1,051
	1,588	697,3	1,090	4,105	1,115
	2,167	664,7	1,143	3,840	1,192

Die von Hrn. Jubitz bei 0° C gemachten Beobachtungen sind in überraschender Weise in Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Tammann[1]) bei 100° C. Die Tabelle 2 enthält das Verhältnis $p_w : p_s$ nach Tammann bei 100° C und von Jubitz 0° C. Zu den von Hrn. Tammann angewendeten Konzentrationen sind die entsprechenden Dampfdrucke aus den Beobachtungen von Jubitz durch Interpolation gewonnen.

Die Tabelle 2 ergibt folgendes Resultat:

1. Die abnorme geringe Dampfdruckerniedrigung der Sulfate zeigt sich bei 100° ebenso wie bei 0°.

2. Die Übereinstimmung der Zahlen für p_w/p_s ist bei geringen Konzentrationen eine vollkommene, bei höheren Konzentrationen treten Differenzen auf, die auch auftreten müssen, weil das Verhältnis $p_w : p_s$ nur solange unabhängig von der Temperatur sein kann, als die Verdünnungswärmen klein sind.

Kiel, Physik. Institut d. Universität, 10. Dez. 1922.

---

1) Tammann in Landolt-Börnsteins Tabellen.

(Eingegangen 19. Dezember 1922.)

4. *Zur Theorie des Schroteffektes;* von *L. S. Ornstein und H. C. Burger.*

Bekanntlich hat Schottky[1]) die Erscheinung des Schroteffektes beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\ddot{J} + \omega_0^2 J + \varrho \dot{J} = \omega_0^2 \iota, \tag{1}$$

wo J der Strom im Schwingungskreis, ι derjenige im Glühkathodenrohr, ω_0 die Eigenfrequenz und ϱ den Ohmschen Widerstand des Stromkreises darstellt.

Wenn Δ die Zeit darstellt, die ein Elektron zur Abgabe seiner Ladung braucht, so ist

$$\int_0^{\Delta} \iota \, dt = e,$$

wo e die Ladung des Elektrons ist; ι ist null für jeden Augenblick, wo kein Elektron das Gitter trifft.

Schottky hat nun einen Ausdruck für $\overline{J^2}$ hergeleitet mittels Integration der Gleichung (1) mit Hilfe von Fourierreihen. Fürth[2]) hat eine andere Lösung angewandt, welche eine beschränkte Gültigkeit hat. Es gibt noch eine andere Methode der Lösung, die in verschiedenen Wahrscheinlichkeitsproblemen Anwendung finden kann.[3])

Einleitend bemerken wir, daß der Mittelwert eines Differentialquotienten immer null ist, es ist

$$\overline{\frac{d^p q}{dt^p}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d^p q}{dt^p} \, dt = \frac{1}{T} \left(\frac{d^{p-1} q}{dt^{p-1}} \right)_0^T = 0.$$

1) W. Schottky, Ann. der Phys. 57. S. 541. 1918.

2) R. Fürth, Phys. Zeitschr. 23. S. 354. 1922.

3) Es findet sich in dieser Notiz die Herleitung der Formel für den Schroteffekt, welche wir brieflich Herrn Schottky mitgeteilt haben und wovon in Hartmann, Phys. Zeitschr. 23. S. 436. 1922 die Rede ist.

Wir bilden nun den Mittelwert der Gleichung (1), das ergibt

$$\overline{J} = \overline{\imath}.$$

Gibt es nun im Mittel n Elektronenstöße pro Zeiteinheit so ist $\overline{\imath} = ne$, also

$$\overline{J} = ne.$$

Multipliziert man die Gleichung (1) mit J oder $\dot{J}$ und bildet man den Mittelwert, so ergibt sich

$$-\overline{\dot{J}^2} + \omega_0^2 \overline{J^2} = \omega_0^2 \overline{\imath J},$$

da

$$\overline{J\ddot{J}} = \overline{\frac{d}{dt}(J\dot{J})} - \overline{\dot{J}^2} = -\overline{\dot{J}^2}$$

und

$$\varrho \overline{\dot{J}^2} = \omega_0^2 \overline{\imath \dot{J}}.$$

Es ist also

$$\overline{J^2} = \overline{\imath J} + \frac{1}{\varrho} \overline{\imath \dot{J}}. \tag{2}$$

Die Kombination im zweiten Glied kann nun sehr leicht aus (1) berechnet werden.

Es ist

$$\overline{\imath J} = \frac{1}{T} \int_0^T \imath J dt = \frac{1}{T} \Sigma \int_0^\Delta \imath J dt, \tag{3}$$

wo, da $\imath$ überall Null ist, wo kein Elektron eintritt nur über die Elektronenstöße zu summieren ist. Der Tatsache Rechnung tragend, daß die Stoßzeit sehr klein ist, folgt aus (1)

$$\dot{J} + \varrho J = \omega_0^2 \int_0^t \imath dt + \dot{J}_0 + \varrho J_0,$$

für jeden Stoß, wo t eine Zeit zwischen 0 und Δ ist, J_0 und $\dot{J}_0$ der Strom und dessen Fluxion am Anfang des Stoßes sind.

Man hat also für jedes Glied der Summe $\overline{J^2}$

$$\int_0^\Delta \imath \dot{J} dt + \varrho \int_0^\Delta \imath J dt = \omega_0^2 \int_0^\Delta \imath dt \int_0^t \imath dt + \dot{J}_0 \int_0^\Delta \imath dt$$

$$+ \varrho J_0 \int_0^\Delta \imath dt = \frac{\omega_0^2 e^2}{2} + \dot{J}_0 e + \varrho J_0 e.$$

Wenn man nun addiert und durch T dividiert und bedenkt, daß $\overline{J_0} = 0$, und $\overline{J_0} = n\,e$, so erhält man wie leicht ersichtlich

$$\overline{\dot{i}\,\dot{J}} + \varrho\,\overline{i\,J} = \frac{n\,\omega_0^2\,e^2}{2} + \varrho\,n^2\,e^2,$$

und daher für $\overline{J^2}$

$$\overline{J^2} = \frac{n\,\omega_0^2\,e^2}{\varrho} + n^2\,e^2.$$

Diese Herleitung gilt allgemein, solange die Stöße getrennt sind.

Utrecht, Physisch Laboratorium der Ryks Universeteit,
16. Januar 1923.

(Eingegangen 18. Januar 1923.)

5. *Bemerkung zu meiner Arbeit über Hochvakuumentladung*[1]; *von Richard Gans.*

Als ich meinem Freunde und Kollegen Prof. G. Jaffé in Leipzig vor kurzem über das von mir behandelte Problem der Thermionenströme geschrieben hatte, machte er mich auf eine Arbeit von Epstein aufmerksam, die mir leider entgangen war.

Epstein[2]) hat genau die gleiche Aufgabe behandelt, so daß ihm also die Priorität gebührt.

In einigen Punkten bin ich vielleicht über ihn hinausgegangen. Erstens habe ich die drei Gebiete der Sättigung, der mittleren Spannungen und der Gegenspannungen der Rechnung unterzogen, während das letzte dieser drei Gebiete bei Epstein fehlt, zweitens habe ich die Gleichungen für die Grenzen dieser Gebiete sowie die Formel für den spontanen Strom angegeben und die zu ihrer unmittelbaren Bestimmung nötigen Funktionentafeln numerisch berechnet. Dann habe ich die Spannungs- und Raumdichteverteilung diskutiert und durch zahlenmäßige Auswertung bestimmt, und schließlich habe ich der Charakteristik eine Form gegeben, die gestattet, sie systematisch mittels der Funktionentafeln zu berechnen (indem man den Strom als unabhängige, die Spannung als abhängige Variable wählt), während Epstein mittels sukzessiver Approximation verfährt, indem er von dem durch die Langmuirsche Beziehung gegebenen Wertepaar ausgeht. Sein Verfahren ist bei hohen Temperaturen und großen Abständen zwischen Glühkathode und Anode angebracht, da dann die Langmuirsche Formel eine Näherung darstellt, meine Rechnungsweise führt aber auch in dem Falle tieferer Temperaturen und kleiner Elektrodenabstände, wo Langmuirs Gleichung nicht annähernd gilt, unmittelbar zum Ziel.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 69. S. 385. 1922.

2) P. S. Epstein, Verh. d. D. Phys. Ges. 21. S. 85. 1919.

Andererseits hat Epstein gezeigt, daß die Charakteristik für hohe Spannungen in die Langmuirsche Beziehung als Grenzfall übergeht.

Es sei mir gestattet, dies durch eine Zahlenrechnung noch einmal zu belegen, trotzdem Epstein durch seine Tabelle 2 bereits darauf hingewiesen hat.

Hierfür brauchen wir folgende Entwicklungen für die in meiner Arbeit eingeführten Integrale. Ist z groß, so gilt

$$(1)\quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{p(z)}} = -0{,}487 + 1{,}255\, z^{1/4} + 1{,}669\, z^{1/2} - 0{,}1670\, z^{-1/2} + \ldots$$

$$(2)\quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{r(z)}} = 2{,}5533 - \sqrt{2}\, e^{-z}.$$

Ist z extrem groß, so folgt wie bei Epstein

$$(3)\quad \frac{i}{q} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sqrt{\frac{e}{m}}\, \frac{\Phi^{3/2}}{l^2},$$

d. h. die Langmuirsche Beziehung.

Mittels (1) und meiner Tabelle für $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{r}}$ wollen wir, nur etwas ausführlicher wie Epstein, die Charakteristik für die beiden Temperaturen $T = 1073$ und $T = 1273$, und zwar mit dem von Germershausen[1]) benutzten Elektrodenabstand $l = 1{,}176$ cm und den von ihm beobachteten Sättigungsströmen berechnen. Es ergibt sich

i/J	Spannung in Volt	
	$T = 1073$	$T = 1273$
0,1	4,23	106,5
0,2	7,50	172,0
0,333	11,16	244,2
0,5	15,16	321,8
0,7	19,49	404,6
0,9	23,47	479,9
0,95	24,44	497,8

Sättigung tritt ein für

$T = 1073$ bei 25,50 Volt,

$T = 1273$ „ 516,0 „

Der spontane Strom ist für $T = 1073$ $i/J = 0{,}00841$.

1) W. Germershausen, Ann. d. Phys. 51. S. 862. 1916.

Mittels dieser Wertepaare sind die Kurven der Figg. 1 und 2 gezeichnet, während die Kreise die mittels Gleichung (3) berechneten und in der folgenden Tabelle niedergelegten Werte nach Langmuir bedeuten.

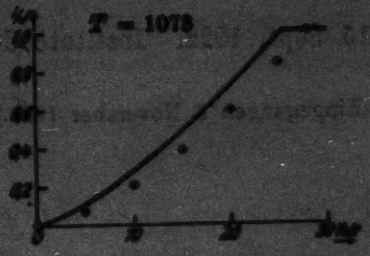


Fig. 1.

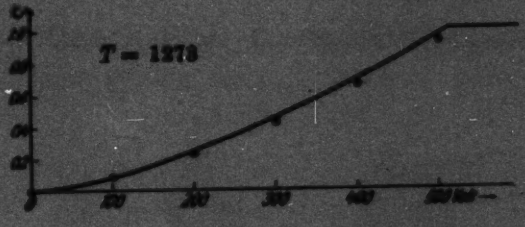


Fig. 2.

$T = 1073$	
Volt	i/J
5	0,0754
10	0,2132
15	0,3917
20	0,6030
25	0,8426
28	0,9991

$T = 1273$	
Volt	i/J
100	0,0822
200	0,2326
300	0,4273
400	0,6580
500	0,9196

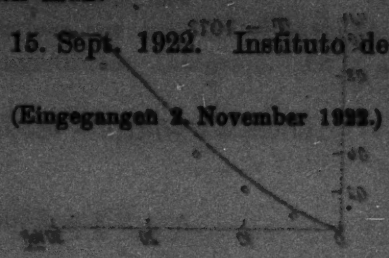
Wie man sieht, sind die Abweichungen bei $T = 1273$ bereits viel kleiner als bei $T = 1073$. Dagegen würden die in meiner zitierten Arbeit berechneten Fälle sich auch nicht mit grober Annäherung durch die Langmuirsche Gleichung darstellen lassen.

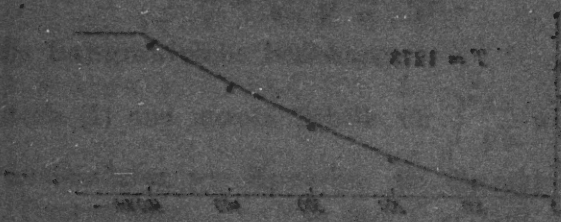
Die Beobachtungen von Germershausen weichen aus den von Epstein angegebenen Gründen stark von den theoretischen Zahlen ab.

Es sei noch bemerkt, daß in Epsteins Gleichung (5), und deshalb auch in den folgenden, die Konstante k durch $2k$ ersetzt werden muß.

La Plata, 15. Sept. 1922. Instituto de Física.

(Eingegangen 2. November 1922.)





Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.